PAPERS COMMUNICATED

78. *L'Uniformisation des complémentaires analytiques.*

Par Motokiti KONDÔ.

L'Institut mathématique, l'Université imperiale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1937.)

Dans sa note,[1] M. N. Lusin a introduit quelques notions sur l'uniformisation des ensembles. D'après sa définitions, pour un ensemble E de points contenu dans un plan XOY, nous appelons que E est uniforme (relativement à l'axe OX) si toute parallèle à l'axe OY coupe E en un point au plus. Et, nous dirons qu'un ensemble plan E est uniformisable lorsqu'on sait obtenir une partie uniforme U de E ayant la même projection sur l'axe OX. Cet ensemble U est dit uniformisateur de E et trouver tel ensemble U c'est uniformiser l'ensemble donné E.

Sur le problème d'uniformisation des ensembles, MM. N. Lusin[2] et W. Sierpinski a démontré le

Théorème. Tout ensemble plan mesurable (B) peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.

M. W. Sierpinski[3] a posé un problème suivant: un ensemble $C(A)$ plan est-il toujours uniformisable (même au sens idéaliste) au moyen d'un ensemble $CPC(A)$, ou même d'un ensemble projectif?

Récemment, M. P. Novikoff[4] a démontré le

Théorème. Chaque complémentaire analytique plan (situé dans un plan XOY) qui a sur chaque parallèle à l'axe OY un nombre fini de points au plus peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.

Or, on peut démontrer un théorème d'uniformisation qui contient ces deux théorèmes comme le cas special.

Théorème 1. Tout complémentaire analytique plan peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.

Pour le voir, il suffit considerer le cas où un complémentaire analytique plan E donné est contenu dans le domaine fondamental $R(x, y)$[5] à deux dimensions.

Pour un complémentaire analytique E, on peut définir un schéma de Souslin $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de rectangles de Baire qui défini l'ensemble

1) N. Lusin, Sur la problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles. Mathematica, **4** (1930), p. 54–66.

2) N. Lusin, loc. cit., p. 59.

W. Sierpinski, Sur l'uniformisation des ensembles mesurables (B). Fund. Math., **16** (1930), p. 136–139.

3) W. Sierpinski, loc. cit., p. 139.

4) P. Novikoff, Les projections des complémentaires analytiques uniformes. Recueil Mathématique, Nouvelle Séries, **2** (1937), p. 3–16.

5) Nous entendrons par le domaine fondamental $R(x, y)$ à deux dimensions l'ensemble de tous les paires (x, y) de nombres irrationnels x et y tels qu'on ait $0 < x, y < 1$. De même, nous définirons les domaines fondamentals $R(y)$, $R(t)$, $R(x, y, t)$, etc.

analytique $CE=R(x, y)-E$, c'est-à-dire, $CE=\sum\prod_{k-1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Ici, on peut supposer que $E_{n_1}=R(x,y)$ et $E_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k+1}$. Etant donnée une fonction $\nu(n)$ de nombres naturels tells que pour tout nombre naturel k il existe une infinité dénombrable de nombres n tels qu'on ait $\nu(n)=k$ et posons dans l'espace $XOYZ$ à trois dimensions

$$C=\sum E_{\nu(n_1)\nu(n_2)\dots\nu(n_k)} \times (Z_{n_1 n_2 \dots n_k}),$$

où

$$Z_{n_1 n_2 \dots n_k}=1-\sum_{j-1}^{k} \frac{1}{2^{n_1 n_2 + \dots + n_j}}.$$

On voit alors sans peine qui 1°, C est un crible régulier[1] qui défini CE, 2°, quel que soit le nombre rationnel r, la partie de C située au-dessous du plan parallèle au plan XOY qui passe par le point r de l'axe OZ est aussi régulier, 3°, pour tout point p de $R(x, y)$, $C^{(p)}$[2] contient une infinité dénombrable de points.

Maintenant, nous diviserons les rectangles de C en rectangles disjoints de Baire partiels — désignons par $\bar{\delta}_n(n=1, 2, \dots\dots)$ — de la façon que les projection de $\bar{\delta}_n$ sur le plan XOY sont distincts deux à deux. Nous définirons les rectangles $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}(k, n_k=1, 2, \dots\dots)$ comme il suit. Prenons d'abord tout rectangle $\bar{\delta}_n$ dont la projection sur le plan XOY n'appartient à aucune projection d'autre rectangle $\bar{\delta}_{n'}$, et désignons par $\delta_{n_1}(n_1=1, 2, \dots\dots)$ ces rectangles ainsi obtenus. D'une manière générale, les rectangles $\delta_{n_1 n_2 \dots n_j}(j=1, 2, \dots\dots, k)$ etant définis, nous prenons tout rectangle $\bar{\delta}_n$ dont la projection sur le plan XOY n'appartient qu' aux projections de $\delta_{n_1 n_2 \dots n_j}(j=1, 2, \dots\dots, k)$ sur le même plan et désignons par $\delta_{n_1 n_2 \dots n_{k+1}}(n_{k+1}=1, 2, \dots\dots)$ ce rectangles ainsi obtenus. Désignons par $\delta^*_{n_1 n_2 \dots n_k}$ la projection de $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sur le plan XOY. On voit alors sans peine que 1°, quelque soit le point (x, y) de $R(x, y)$, il existe une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels telle qu'on ait $\prod_{k-1}^{\infty} \delta^*_{n_1 n_2 \dots n_k}=(x, y)$, 2°, pour deux suites distincts $\{n_k^{(i)}\}\ (i=1, 2)$ de nombres naturels, $\prod_{k=1}^{\infty} \delta^*_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_k^{(1)}} \delta^*_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_k^{(2)}}=0$, 3°, tout rectangle $\bar{\delta}_n$ appartient à la famille $\{\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de rectangles ainsi definis. Enfin, désignons par $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ la partie de C suituée au-dessous rigoureusement de $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$. D'après la définition de C, $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est aussi un crible régulier.

Maintenant, nous allons définir les complémentaires analytiques $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Dans l'espace $XOYTZ$ à quatre dimensions, considérons une

---

1) P. Novikoff, Sur la separabilité des ensembles projectifs de seconde classe. Fund. Math., **25** (1935), p. 459–466.

2) Désignons par $C^{(p)}$ l'ensemble de tous les points de C dont la projections sur le plan XOY sont le point p.

transformation qui transforme l'espace $XOYZ$ en l'espace $XOTZ$ de la manière suivante :

$$x'=x\,, \qquad y'=0\,, \qquad z'=z\,, \qquad t'=y\,.$$

Grâce à cette transformation, les cribles C et $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de l'espace $XOYZ$ sont transformés en les cribles de l'espace $XOTZ$, désignons par C^* et $C^*_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ces cribles. Etant donné une suite $\{n_k\}$ de nombres naturels, posons pour le moment dans l'espace $XOYTZ$

$$\overset{(1)}{\Gamma}_0=C\times R(t)\,, \qquad \overset{(1)}{\Gamma}_k=C_{n_1 n_2 \dots n_k}\times R(t)\,,$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}_0=C^*\times R(y)\,, \qquad \overset{(2)}{\Gamma}_k=C^*_{n_1 n_2 \dots n_k}\times R(y)$$

$$(k=1,\, 2,\, \dots\dots)^{1)}$$

et $\overset{(k)}{\nu}_i(p)=\tau(\overset{(k)}{\Gamma}{}_i^{(p)})$[2] pour tout point p du domaine fondamental $R(x, y, t)$.[3] Et enfin, posons

$$M_{n_1 n_2 \dots n_k}=\overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_0(p) \geqq \overset{(2)}{\nu}_0(p)+1\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{k} \overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_0(p)=\overset{(2)}{\nu}_0(p)\right) \overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_1(p)=\overset{(2)}{\nu}_1(p)\right) \dots\dots \overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_{j-1}(p)=\overset{(2)}{\nu}_{j-1}(p)\right)$$

$$\times \overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_j(p) \geqq \overset{(2)}{\nu}_j(p)+1\right) D_j\,,^{4)}$$

où désignons par D_j l'ensemble de tous les points $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ de $R(x, y, t)$ tels que $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{x}, \bar{t})$ appartiennent à $\delta^*_{n_1 n_2 \dots n_j}$ en même temps, et encore, posons

$$Q_{n_1 n_2 \dots n_k}=\delta^*_{n_1 n_2 \dots n_k}-\mathrm{Proj}_{R(x,\,y)} M_{n_1 n_2 \dots n_k}\,.$$

En appliquant le raisonnement[5] de M. N. Lusin sur les cribles réguliers, nous avons que les ensembles $\overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_i(p)=\overset{(2)}{\nu}_i(p)\right)$ et $\overset{(p)}{E}\left(\overset{(1)}{\nu}_i(p) \geqq \overset{(2)}{\nu}_i(p)+1\right)$ et par suite $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont analytiques. Donc, $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont les complémentaires analytiques. En autre part, on peut aussi définir $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ géométriquement. Pour chaque point x de la projection de CE sur l'axe OX, nous désignons par $\hat{Q}^{(x)}$ l'ensemble de tout point (x, y) tel que le type d'ordre $\tau(C^{(x,\,y)})$ soit minimum lorsque y parcourt $R(y)$, et par

1) Voir la note (1) de la page 287.

2) Etant donné un crible C contenu dans l'espace $XOYZ$ cinsidérons $C^{(p)}$ pour un point p du plan XOY. Si $C^{(p)}$ est bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ, désignons par $\tau(C^{(p)})$ le type d'ordre de $C^{(p)}$, et sinon, posons $\tau(C^{(p)})=\Omega$.

3) Voir la note (1) de la page 287.

4) Désignons par $\overset{(p)}{E}(\dots\dots)$ l'ensemble de tous les points de $R(x, y, z)$ qui satisfont à la condition $(\dots\dots)$. De plus, si l'on a $\overset{(k)}{\nu}_i(p)=\Omega$, posons $\overset{(k)}{\nu}_i(p)+1=\Omega$.

5) N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques. Paris, 1930, p. 214.

$\hat{Q}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}^{(x)}$. Etant donné un point x de la projection de $\hat{Q}\,\delta^*_{n_1}$ sur l'axe OX, désignons par $\hat{Q}^{(x)}_{n_1}$ l'ensemble de tout point (x, y) tel que le type d'ordre $\tau(C^{(x,y)}_{n_1})$ soit minimum lorsque y parcourt $\hat{Q}^{(x)}\,\delta^*_{n_1}$, et par $\hat{Q}_{n_1}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}^{(x)}_{n_1}$. D'une manière générale, $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j}$ $(j=1, 2, \dots\dots, k)$ etant définis ; pour un point x de la projection de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}\ \delta^*_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ sur l'axe OX, désignons par $\hat{Q}^{(x)}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ l'ensemble de tout point (x, y) tel que le type d'ordre $\tau(C^{(x,y)}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}})$ soit minimum lorsque y parcourt $\hat{Q}^{(x)}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ et par $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}^{(x)}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$. On voit alors que nous avons

$$Q_{n_1 n_2 \dots n_k} = \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} \qquad (k=1, 2, \dots\dots).$$

Maintenant, posons

$$S_k = \sum Q_{n_1 n_2 \dots n_k}, \quad \text{et} \quad S = \prod_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Il est alors évident que S est un complémentaire analytique contenu dans E. Or, selon le raisonnement[1] de MM. N. Lusin et P. Novikoff sur les complémentaires analytiques, on peut démontrer le

Lemme. Pour tout point x tel qu'on ait $E^{(k)} \neq 0$, $S^{(x)}$ est non vide et fermé dans $R(y)$.

De plus, en modifiant convenablement le procédé précédent, on peut modifier l'ensemble S comme il suit ; étant donné un nombre naturel k, $S^{(x)}$ est contenu dans un intervalle de Baire d'ordre k.

Par consequent, on peut définir une suite $\{\overset{(k)}{S}\}$ $(k=1, 2, \dots\dots)$ des complémentaires analytiques telle qu'on ait

1°, $$E \supset \overset{(k)}{S} \supset \overset{(k+1)}{S} \qquad (k=1, 2, \dots\dots),$$

2°, pour tout point x tel qu'on ait $E^{(x)} \neq 0$, $\overset{(k)}{S}{}^{(x)}$ est non vide et fermé dans $R(y)$,

3°, $\overset{(k)}{S}{}^{(x)}$ est contenu dans un intervalle de Baire d'ordre k.

Pour les complémentaires analytiques $\overset{(k)}{S}$, considérons le complémentaire analytique $U = \prod_{k=1}^{\infty} \overset{(k)}{S}$. Comme $\overset{(k)}{S}$ est contenu dans un intervalle de Baire d'ordre k, $U^{(x)}$ contient un point au plus et lorsque nous avons $E^{(x)} \neq 0$, $U^{(x)}$ contient surement un point. Donc, E est uniformisé au moyen du complémentaire analytique U. C. Q. F. D.

Remarque. Dans ce démonstration, nous nous avons servi l'axiome du choix pour définir les ensemble $\overset{(k)}{S}$. Or, sans faire appel l'axiome du choix, on peut déterminer ces ensembles. Donc, pour un complémentaire analytique qui est défini par un schêma de Souslin (de rectangles de Baire), on peut nommer sa uniformisateur.

---

1) N. Lusin et P. Novikoff, Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible. Fund. Math., **25** (1935), p. 559–560.

Grâce à ce théorème on peut deduire divers théorèmes comme il suit.

Théorème 2. Tout ensemble projectif de la classe (A_2)[1] *peut être uniformisé au moyen d'un ensemble de même classe.*

Théorème 3. Tout ensemble projectif de la classe (A_2) *est la projection d'un complémentaire analytique uniforme.*

Ce théorème contient le théorème de M. S. Mazurkiewicz[2] comme le cas special, et donne solutions des problèmes posés par M. N. Lusin.[3] En autre part, on voit que la classe des ensembles projectifs (A_2) coincide avec celle des ensembles (A_2').[4]

Théorème 4. Tout ensemble projectif de la classe (A_2) *est la somme d'une infinité transfinie d'ensembles mesurables* (B) *numerotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe.*

Nous publierons prochainement les details de ces résultats dans autre travail.

---

1) Voir, N. Lusin, Leçons. p. 270.

2) Voir, p. ex., N. Lusin, Leçons, p. 284.

3) Voir, N. Lusin, Leçons, Chap. V, Ensembles projectifs.

4) P. Novikoff, Recueil mathématique, nouvelle série, 2 (1937), p. 3–16.