108. Die projektive Theorie der "paths" $x^{(3)i}+A^i_k x^{(2)k}+B^i=0$.

Von Hitoshi HOMBU.
Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 13, 1937.)

1. Die *projektiven* (oder *bahntreuen*) Transformationen der verallgemeinerten "paths" 3-ter Ordnung werden durch die Gleichungen von der Gestalt

$$(1) \qquad \bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}+\beta x^{(1)})=\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})-3\beta x^{(2)i}-\gamma x^{(1)i}$$

$\left(\gamma=\dfrac{d\beta}{dt}+2\beta^2\right)$ gegeben.[1] Im folgenden ziehen wir die Systeme der "paths" ins Betracht, deren Gleichungen von der Gestalt

$$(2) \qquad x^{(3)i}+A^i_k x^{(2)k}+B^i=0$$

sind und unter linearen Parametertransformationen invariant bleiben (der Parameter heisst sodann affin), und behandeln die projektive Theorie der Systeme. $A^i_k(x, x^{(1)})$, $B^i(x, x^{(1)})$ sind in bezug auf $x^{(1)j}$ homogen von 1- bzw. 3-ter Ordnung.

Dafür, dass zwei Systeme von der Gestalt (2) projektiv verwandt seien, muss solche Funktion β existieren, dass nach (1)

$$\beta(3x^{(2)i}+\bar{A}^i_k x^{(1)k})+\gamma x^{(1)i}+(\bar{A}^i_k-A^i_k)x^{(2)k}+\bar{B}^i-B^i=0$$

und $\gamma=\dfrac{d\beta}{dt}+2\beta^2$ sind. Daraus lässt sich β in $x^{(2)k}$ linear gebrochen ausdrücken; der Nenner des Ausdrucks ist

$$(3x^{(2)i}+\bar{A}^i_k x^{(1)k})x^{(1)j}-(3x^{(2)j}+\bar{A}^j_k x^{(1)k})x^{(1)i} \qquad i, j=1, 2, \ldots\ldots, \text{ oder } n.$$

Wir können also für $n>2$ schliessen, dass β von $x^{(2)k}$ unabhängig und in bezug auf $x^{(1)j}$ homogen von 1-ter Ordnung ist. Da $\gamma=\beta_{(0)k}x^{(1)k}+\beta_{(1)k}x^{(2)k}+2\beta^2$ ist, so haben wir die projektive Transformation

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad \bar{A}^i_k=A^i_k-3\beta\delta^i_k-\beta_{(1)k}x^{(1)i}, \\ \text{(b)} \quad \bar{B}^i=B^i-\beta A^i_k x^{(1)k}-\beta_{(0)k}x^{(1)k}x^{(1)i}+2\beta^2 x^{(1)i}. \end{cases}$$

2. Aus (3, a) erhält man sogleich

$$\bar{A}^i_k-\bar{A}^i_{j(1)k}x^{(1)j}=A^i_k-A^i_{j(1)k}x^{(1)j}-2(\beta\delta^i_k-\beta_{(1)k}x^{(1)i})$$

und

$$(4) \qquad \bar{A}=A-\beta, \qquad (5) \quad A=\frac{1}{2(n-1)}(A^i_i-A^i_{j(1)i}x^{(1)j}).$$

1) H. Hombu, Projektive Transformation eines Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung, Proc. **13** (1937), 187–190.

Da unter einer Koordinatentransformation $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} A^i_j = A^\lambda_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} + 3 \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^j} x^{(1)i} \tag{6}$$

ist, so ist A ein Skalar. Damit sehen wir nach (4), dass es in jeder projektiven Klasse der Systeme von der Gestalt (2) ein und nur ein ausgezeichnetes System gibt, für welches der Skalar A identisch verschwindet; aus einem beliebigen System mit nicht verschwindendem A ergibt sich das ausgezeichnete durch die projektive Transformation (3) mit $\beta = A$. *Affine Invarianten des ausgezeichneten Systems und nur solche sind offenbar projektive Invarianten des ursprünglichen Systems.* Wir möchten aber die letztgenannten Invarianten in direkter Weise herleiten.

3. Aus (3, a) ergibt sich durch Überschiebung mit $x^{(1)k}$

$$\bar{A}^i = A^i - 4\beta x^{(1)i}, \qquad A^i = A^i_k x^{(1)k}, \tag{7}$$

und wir leiten her

$$\bar{B}^i_k = B^i_k - 8\beta \delta^i_k, \qquad B^i_k = 4A^i_k - A^i_{(1)k}. \tag{8}$$

Da A^i_k durch B^i_k in der Form

$$A^i_k = \frac{3}{8} B^i_k + \frac{1}{8} B^i_{j(1)k} x^{(1)j} \tag{9}$$

ausgedrückt wird, so kann man leicht überzeugen, dass *(3, a), (8) miteinander gleichwertig sind.* Eliminieren wir β aus (4), (8), so erhalten wir $\bar{\mathfrak{G}}^i_k = \mathfrak{G}^i_k$ (projektiv-invariant), wobei

$$\mathfrak{G}^i_k = \frac{1}{6}(B^i_k - 8A\delta^i_k) = \frac{1}{2} A^i_k - \frac{1}{6} A^i_{j(1)k} x^{(1)j} - \frac{2}{3(n-1)} \times (A^l_l - A^l_{j(1)l} x^{(1)j}) \delta^i_k. \tag{10}$$

Unter $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$ transformiert sich $\mathfrak{G}^i_k$ wegen (6), (7), (8) in der Weise

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \mathfrak{G}^i_j = \mathfrak{G}^\lambda_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^j} x^{(1)i}.$$

Wir können also durch

$$\tilde{\Delta} v^i = \frac{dv^i}{dt} + \mathfrak{G}^i_j v^j \tag{11}$$

eine *projektiv-invariante, tensorielle Ableitung* von v^i definieren. Setzen wir

$$x^{(3)i} + A^i_k x^{(2)k} + B^i = \tilde{\Delta}^2 x^{(1)i} + {}^*A^i_k \tilde{\Delta} x^{(1)k} + {}^*B^i,$$

so haben wir an Stelle von B^i einen Vektor

$$\begin{cases} {}^*B^i = B^i - A^i_k \mathfrak{G}^k - \mathfrak{G}^i_{(0)k} x^{(1)k} + \mathfrak{G}^i_{(1)k} \mathfrak{G}^k \\ ({}^*A^i_k = A^i_k - \mathfrak{G}^i_k - \mathfrak{G}^i_{(1)k}) \end{cases} \tag{12}$$

$(\mathfrak{G}^i \equiv \mathfrak{G}^i_j x^{(1)j})$, der sich unter (3) folgendermassen transformiert:

$$(13)\qquad {}^*\bar{B}^i = {}^*B^i + [-4\beta A + 2\beta^2 - (\beta_{(0)k}x^{(1)k} - \beta_{(1)k}\mathfrak{G}^k)]\,x^{(1)i}\,.$$

Da wegen (4)

$$-2\beta A + \beta^2 = \bar{A}^2 - A^2,$$

$$-(\beta_{(0)k}x^{(1)k} - \beta_{(1)k}\mathfrak{G}^k) = (\bar{A}_{(0)k}x^{(1)k} - \bar{A}_{(1)k}\bar{\mathfrak{G}}^k) - (A_{(0)k}x^{(1)k} - A_{(1)k}\mathfrak{G}^k)$$

sind, so erreichen wir aus (13), dass die Grösse

$$(14)\qquad \mathfrak{B}^i = {}^*B^i - [A_{(0)k}x^{(1)k} - A_{(1)k}\mathfrak{G}^k + 2A^2]\,x^{(1)i}$$

projektiv-invariant ist ($\bar{\mathfrak{B}}^i = \mathfrak{B}^i$). Andererseits ist $\mathfrak{B}^i$ wieder ein Vektor, da $A_{(0)k}x^{(1)k} - A_{(1)k}\mathfrak{G}^k$ ein Skalar ist. Der Vektor $\mathfrak{B}^i$ wird nach (10), (12), (14) in die Form geschrieben:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}^i = B^i - \dfrac{1}{3}A^i_k A^k + \dfrac{1}{3}\left(A_{(0)k}x^{(1)k} - A_{(1)k}\cdot\dfrac{A^k}{3}\right)x^{(1)i} \\ \qquad - \dfrac{1}{3}\left(A^i_{(0)k}x^{(1)k} - A^i_{(1)k}\cdot\dfrac{A^k}{3}\right) + \dfrac{2}{9}A^2 x^{(1)i}\,. \end{cases}$$

Seien umgekehrt zwei Systeme der "paths" von der Gestalt (2) gegeben, welche die Bedingungen

$$\bar{\mathfrak{G}}^i_k = \mathfrak{G}^i_k\,, \qquad \bar{\mathfrak{B}}^i = \mathfrak{B}^i$$

erfüllen. Wegen der ersten Gleichungen und der Gestalt von $\mathfrak{G}^i_k$ (10) gibt es eine Funktion β, die (8) erfüllt und in bezug auf $x^{(1)j}$ homogen von 1-ter Ordnung ist. Da (8) mit (3, a) gleichwertig ist, so bestehen (3, a), (4) mittels dieser β. Aus $\bar{\mathfrak{B}}^i = \mathfrak{B}^i$ folgen sodann (13) und somit (3, b). Die zwei Systeme sind projektiv verwandt.

4. Da $\mathfrak{G}^i_k$ projektiv-invariant ist, können wir mittels dieser Grösse das *kovariante Differential* Dv^i eines Vektors v^i, die *Grundübertragung* $\delta x^{(1)i}$ und die *kovarianten Ableitungen* $\nabla_k v^i$, $\overset{1}{\nabla}_k v^i$ definieren, welche projektiv-invariant sind:

$$(16)\qquad Dv^i = dv^i + \Pi^i_{jk}v^j dx^k \qquad (\Pi^i_{jk} = \mathfrak{G}^i_{j(1)k})\,,^{1)}$$

$$(17)\qquad \delta x^{(1)i} = dx^{(1)i} + \mathfrak{G}^i_j dx^j\,,$$

$$(18)\qquad \nabla_k v^i = v^i_{(0)k} - v^i_{(1)j}\mathfrak{G}^j_k + \Pi^i_{jk}v^j\,, \qquad \overset{1}{\nabla}_k v^i = v^i_{(1)k}\,.$$

Die Krümmungs- und Torsionsgrössen dieser Übertragung werden in üblicher Weise berechnet. Wir erreichen endlich den

Satz. *Sei ein System der "paths" (2) gegeben, so sind der Vektor (15) und die Übertragung (16–18) projektiv-invariant. Die Vektoren* $x^{(1)i}$ *und* $\mathfrak{B}^i$, *die Krümmungs- und Torsionsgrössen, und deren sukzes-*

---

1) $\tilde{\Delta} v^i = \dfrac{Dv^i}{dt}$.

sive kovarianten Ableitungen bilden das vollständige System der projektiv-invarianten Komitanten der "paths."[1] [2]

Das Problem der projektiven Equivalenz kann mittels dieses Komitantensystems vollständig diskutiert werden.

---

1) Wenn für zwei Systeme $\overline{Dv^i}=Dv^i$, $\overline{\delta x^{(1)i}}=\delta x^{(1)i}$ und $\overline{\mathfrak{B}^i}=\mathfrak{B}^i$ bestehen, so folgt $\overline{\mathfrak{S}^i_k}=\mathfrak{S}^i_k$, und somit sind sie projektiv verwandt.

2) Dieses System bilden zusammen mit dem Affinor $^*A^i_k$ (12) und seinen sukzessiven kovarianten Ableitungen das vollständige System der *affinen* Komitanten der "paths." Es ist

$$^*A^i_k=\frac{1}{6}A^i_k-\frac{1}{6}A^i_{j(1)k}x^{(1)j}+\frac{8}{3}A\delta^i_k+\frac{4}{3}A_{(1)k}x^{(1)i}. \tag{19}$$