104. *Zur Bewertung der einfachen Algebren.*

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1937.)

Im folgenden bezeichnet A eine einfache Algebra mit P als Koeffizientenkörper, welcher seinerseits folgende Eigenschaften besitzt:

1. P ist der Quotientenkörper eines Integritätsbereiches R.
2. R ist ganz-abgeschlossen in P.
3. In R gilt der Teilerkettensatz für Ideale.
4. Alle vom Nullideal verschiedenen Primideale aus R sind teilerlos.
5. Das Zentrum von A ist separable über P.

Ist nun $\mathfrak{o}$ eine R enthaltende Maximalordnung von A/P, welche aus, bezüglich R, ganzen Elementen besteht, und $\mathfrak{a}$ eine Ideal aus $\mathfrak{o}$, so kann man nach Deuring eine Bewertung $|\ \ |_{\mathfrak{a}}$ von A/P herstellen.[1] Diese Deuringsche Bewertung hat folgende Beschaffenheiten:[2]

(A)
1. Die Bewertung ist nicht-archimedisch.
2. Die Bewertungen aller Elemente aus $\mathfrak{o}$ sind nicht grösser als 1.
3. Die Bewertung ist nicht-trivial und diskret. d. h. es gibt in A mindestens ein von der Null verschiedenes Element, dessen Bewertung kleiner ist als 1, und ferner existiert eine positive Zahl $C<1$ von der Art, dass die Bewertung eines Elementes aus A entweder $\geqq 1$ oder $<C$ ist.

Es fragt sich nun, ob *eine Bewertung von A/P unter der Bedingung* (A) *stets einer Deuringschen Bewertung äquivalent ist.*

In der vorliegenden Note will ich diese Frage durch folgenden Satz beantworten:

Satz. *Es sei φ eine Bewertung von A/P unter der Bedingung* (A). *Dann bildet die Gesamtheit $\mathfrak{a}$ aller derjenigen Elemente aus $\mathfrak{o}$, deren Bewertungen kleiner sind als 1, ein gleichseitiges Ideal*[3] *aus $\mathfrak{o}$. Ferner ist φ der durch $\mathfrak{a}$ bestimmten, Deuringschen Bewertung $|\ \ |_{\mathfrak{a}}$ äquivalent.*

Zum Beweis will ich einige Vorbemerkungen und Hilfssätze vorausschicken.

Vorbemerkung 1. Nach einem bekannten Wedderburnschen Struktursatz[4] kann man A als ein direktes Produkt einer Divisionsalgebra $\mathfrak{D}$ mit einer Matrixalgebra $\mathfrak{M}$ über P als Koeffizientenkörper annehmen: $A=\mathfrak{D}\times\mathfrak{M}$. Multipliziert man jede Matrixeinheit e_{ij} aus $\mathfrak{M}$ mit einem passend gewählten Element γ aus R, so gehört $e_{ij}^*=\gamma e_{ij}$ zu $\mathfrak{o}$.

---

1) M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin (1935), S. 93–95. Die Deuringsche Bewertung kann nur in einfache Algebren eingeführt werden, aber nicht mehr in halb-einfache Algebren.

2) Deuring, loc. cit., S. 94–95.

3) Da wir bloss gleichseititige Ideale betrachten, so lassen wir später das Wort „gleichseitig" weg und sprechen schlechthin von einem Ideal.

4) Vgl. etwa Deuring, loc. cit., S, 18–19.

Vorbemerkung 2. Nach einem Bewertungspostulat und 2, (A) ist $\varphi(1)=1$.

Hilfssatz 1. Es gibt in R mindestens ein Element, dessen Bewertung kleiner ist als 1.

Beweis. Nach 3, (A) existiert ein Element $a \neq 0$ mit $\varphi(a)<1$. Da $\mathfrak{o}$ eine Ordnung ist, so kann man ein Element $\delta \neq 0$ aus R so bestimmen, dass δa zu $\mathfrak{o}$ gehört. Offenbar ist dann $\varphi(\delta a) \leqq \varphi(\delta)\varphi(a)<1$. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass a von vornherein ein Element aus $\mathfrak{o}$ ist.

Nach Vorbemerkung 1 können wir $a=\sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}e_{ij}^*$ setzen, wo m^2 den Rang von $\mathfrak{M}$ bedeutet und die d_{ij} Elemente aus $\mathfrak{D}$ sind. Da $a \neq 0$ ist, so nehmen wir an, dass etwa $d_{ij} \neq 0$ ist. Nun folgt ohne weiteres

$$\sum_{k=1}^{m} e_{ki}^* a e_{jk}^* = \gamma^2 d_{ij} \sum_{k=1}^{m} e_{kk} = \gamma^2 d_{ij} \neq 0 ,$$

wenn man wie üblich $\sum_{k=1}^{m} e_{kk}=1$ setzt. Da nach Definition die e_{ki}^*, e_{jk}^* zu $\mathfrak{o}$ gehören, so gehört $\gamma^2 d_{ij}$ auch zu $\mathfrak{o}$ und ferner gilt:

$$\varphi(\gamma^2 d_{ij}) \leqq \operatorname{Max}\left(\ldots\ldots, \varphi(e_{ki}^* a e_{jk}^*), \ldots\ldots\right)<1 ,$$

weil $\varphi(e_{ki}^* a e_{jk}^*) \leqq \varphi(e_{ki}^*)\varphi(a)\varphi(e_{jk}^*)<1$ ist.

Da $b=\gamma^3 d_{ij} \neq 0$ zum Durchschnitt $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{o}$ von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{o}$ gehört, so genügt es einer irreduziblen Gleichung $x^r+\mu_1 x^{r-1}+\cdots\cdots+\mu_r=0$ in R. Dabei ist natürlich $\mu_r \neq 0$. Also ist $\mu_r=-b(b^{r-1}+\cdots\cdots+\mu_{r-1}$ und *ferner gilt noch:*

$$\varphi(\mu_r) \leqq \varphi(b)\varphi(b^{r-1}+\cdots\cdots+\mu_{r-1}) \leqq \varphi(b)<1 ,$$

weil $b^{r-1}+\cdots\cdots+\mu_{r-1}$ ein Element aus $\mathfrak{o}$ ist.

Hilfssatz 2. Für ein Element $a \neq 0$ aus A ist das Hauptideal (a) in bezug auf $\mathfrak{o}$ die Gesamtheit $\mathfrak{k}$ aller Elemente von der Form $\sum_{i=1}^{r} c_i a c_i'$, wobei die c_i, c_i' Elemente aus $\mathfrak{o}$ bedeuten.

Beweis. Dass $\mathfrak{k}$ ein gleichseitiger $\mathfrak{o}$-Modul ist, folgt sofort aus der Definition von $\mathfrak{k}$. Nach Hilfssatz 1 kann man in R stets ein Element $\delta \neq 0$ derart finden, dass δa zu $\mathfrak{o}$ gehört und $\varphi(\delta a)<1$ ist. Für dieses Element δ und ein beliebiges Element $\sum_{i=1}^{r} c_i a c_i'$ aus $\mathfrak{k}$ gilt offenbar:

$$\delta \sum_{i=1}^{r} c_i a c_i' = \sum_{i=1}^{r} c_i (\delta a) c_i' \in \mathfrak{o} .$$

Da $\delta a \neq 0$ ist, so können wir $\bar{a}=\delta a=\sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}e_{ij}^*$ mit mindestens einem $d_{ij} \neq 0$ setzen, wobei i, j geeignete Indizes unter $1, \ldots\ldots, m$ sind. Wie im Beweis von Hilfssatz 1 erhält man $b=\sum_{i,j=1}^{m} e_{ki}^* \bar{a} e_{jk}^* = \gamma^2 d_{ij} \neq 0$, worin b ein Element aus $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{o}$ und $\varphi(b)<1$ ist. Es gilt ferner:

$$b^r+\mu_1 b^{r-1}+\cdots\cdots+\mu_r=0$$

für passend gewählte Elemente $\mu_1, \ldots\ldots, \mu_r$ aus R, wo insbesondere $\mu_r \neq 0$ ist. Wie aus der Konstruktion hervorgeht, gehört b einerseits zu $\mathfrak{k}$ und anderseits zu $\mathfrak{o}$. Hieraus folgt ohne weiteres, dass $-b(b^{r-1}+\cdots\cdots\mu_{r-1}) \neq 0$ ein Element aus $\mathfrak{k}$ ist. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{k}$ ein a enthaltendes Ideal in bezug auf $\mathfrak{o}$ ist: $\mathfrak{k} \supseteqq (a)$. Da aber offenbar $(a) \supseteqq \mathfrak{k}$[1] ist, so ist $\mathfrak{k}=(a)$, w. z. b. w.

Beweis des Satzes. a) Dass $\mathfrak{a}$ ein gleichseitiger $\mathfrak{o}$-Modul ist, folgt sofort aus der Definition von $\mathfrak{a}$. Nach Hilfssatz 1 gibt es in R ein Element, dessen Bewertung kleiner ist als 1, und das natürlich zu $\mathfrak{a}$ gehört. Also ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$.

b) *Es sei $a_1, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ eine Nullfolge in bezug auf φ. Dann ist sie auch Nullfolge in bezug auf die Deuringsche Bewertung $|\ |_{\mathfrak{a}}$.*

i) Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die $\varphi(a_1), \ldots\ldots, \varphi(a_n), \ldots\ldots$ alle kleiner sind als 1. Ferner sei das Hauptideal (a_n), dargestellt als reduziertes gebrochenes Ideal, von der Form $\mathfrak{z}_n/\mathfrak{n}_n$, wobei $\mathfrak{z}_n, \mathfrak{n}_n$ Ideale aus $\mathfrak{o}$ sind. Dann behaupten wir, dass $\mathfrak{z}_n$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Da nämlich $(a_n)\mathfrak{n}_n=\mathfrak{z}_n$ ist, so ist jedes Element aus $\mathfrak{z}_n$ von der Form $\sum_{i=1}^{r} c_i a_n c_i'$ mit den c_i, c_i' aus $\mathfrak{o}$, weil $(a_n)\mathfrak{n}_n \subseteqq (a_n)\mathfrak{o} =(a_n)$ ist. Ferner ist $\varphi(\sum_{i=1}^{r} c_i a_n c_i') \leqq \operatorname{Max}\left(\ldots\ldots, \varphi(c_i)\varphi(a_n)\varphi(c_i'), \ldots\ldots\right) \leqq \varphi(a_n) < 1$. Also ist nach der Definition von $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{z}_n$ aus $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{a}$ enthalten, d. h. $\mathfrak{z}_n$ ist durch $\mathfrak{a}$ teilbar.

ii) Nach i) kann man für das Hauptideal (a_n) eine natürliche Zahl r_n und die Ideale $\mathfrak{z}_n', \mathfrak{n}_n$ so bestimmen, dass $(a_n)=\mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n'/\mathfrak{n}_n$, $(\mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n', \mathfrak{n}_n)=\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{z}_n'$ nicht mehr durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Nun behaupten wir, dass aus $\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n)=0$ $\lim_{n\to\infty} r_n=\infty$ folgt. Nämlich, es gibt in $\mathfrak{z}_n'$ ein Element z_n mit $\varphi(z_n)=1$, weil $\mathfrak{z}_n'$ nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Für ein Element γ aus $\mathfrak{a}$, welches gleichzeitig zu R gehört, gilt offenbar:

$$1=\varphi(\gamma^{r_n}z_n\gamma^{-r_n}) \leqq \varphi(\gamma^{r_n}z_n)\varphi(\gamma^{-r_n}) \leqq \varphi(\gamma^{r_n}z_n)\varphi(\gamma^{-1})^{r_n}.$$

Wenn also für $n\to\infty$ r_n beschränkt ist, dann ist für jedes n

$$\varphi(\gamma^{r_n}z_n) > \varphi(\gamma^{-1})^{-r_n} > \varkappa > 0,$$

wobei $\varkappa$ eine passend gewählte Zahl ist. Anderseits ist $\gamma^{r_n}z_n$ als Element aus $\mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n'=(a_n)\mathfrak{n}_n$ von der Form $\sum_{i=1}^{r} c_i a_n c_i'$, wobei die c_i, c_i' Elemente aus $\mathfrak{o}$ ist. Es ist also $0<\varkappa<\varphi(\gamma^{r_n}z_n) \leqq \operatorname{Max}(\ldots\ldots, \varphi(c_i a_n c_i'), \ldots\ldots) < \varphi(a_n)$. Dies ist offenbar ein Widerspruch, weil sonst $0=\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n)>0$ sein müsste.

Aus der Darstellung von (a_n) als reduziertes gebrochenes Ideal folgt ohne weiteres $|a_n|_{\mathfrak{a}}=e^{-r_n}$. Es ist also $\lim_{n\to\infty}|a_n|_{\mathfrak{a}}=0$, wenn $\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n)=0$ ist. Somit ist die Behauptung im Anfang von b) bewiesen.

c) *Es sei $a_1, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ eine Nullfolge in bezug auf $|\ |_{\mathfrak{a}}$. Dann ist sie auch Nullfolge in bezug auf φ.*

1) Deuring, loc. cit., S. 95.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder annehmen, dass die $|a_1|_{\mathfrak{a}}, \ldots\ldots, |a_n|_{\mathfrak{a}}, \ldots\ldots$ kleiner sind als 1. Dann kann man $(a_n) = \mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n'/\mathfrak{n}_n$ setzten, wobei $\mathfrak{z}_n', \mathfrak{n}_n$ Ideale aus $\mathfrak{o}$ sind, und $(\mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n', \mathfrak{n}_n) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a} \nmid \mathfrak{z}_n'$ und $r_n \geqq 1$ ist. Ferner ist nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$.

Da $(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_n) = \mathfrak{o}$ ist, so gibt es in $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_n$ Elemente α_n resp. ν_n von der Art, dass $\alpha_n + \nu_n = 1$ ist. Hieraus folgt ohne weiteres

$$\varphi(a_n\nu_n) = \varphi(a_n - a_n\alpha_n) \leqq \operatorname{Max}\left(\varphi(a_n), \varphi(a_n)\varphi(\alpha_n)\right).$$

Weil aber $\varphi(a_n)\varphi(\alpha_n) < \varphi(a_n)$ ist, so ist $\varphi(a_n\nu_n) = \varphi(a_n)$. Anderseits ist $a_n\nu_n$ als Element aus $\mathfrak{a}^{r_n}\mathfrak{z}_n' \subseteqq \mathfrak{a}^{r_n}$ von der Form $\sum_{k=1}^{s} \alpha_1^{(k)} \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha_{r_n}^{(k)}$, wobei die $\alpha_1^{(k)}, \ldots\ldots, \alpha_{r_n}^{(k)}$ alle zu $\mathfrak{a}$ gehören. Also ist

$$\varphi(a_n) = \varphi(a_n\nu_n) \leqq \operatorname{Max}(\ldots\ldots, \varphi(\alpha_1^{(k)}) \cdot \ldots\ldots \cdot \varphi(\alpha_{r_n}^{(k)}), \ldots\ldots) < C^{r_n},$$

woraus $\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) \leqq \lim_{n\to\infty} C^{r_n} = 0$ folgt.

Nach a), b) und c) ist der Satz bewiesen.