PAPERS COMMUNICATED

82. *Sur la nouvelle théorie unitaire de MM. Einstein et Bergmann.*

Par Kentaro YANO.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokio.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1938.)

1. Nous avons récemment étudié la relativité non holonome[1] en prenant, pour representer l'espace-temps, un espace non holonome V_5^4 défini par une équation de Pfaff non complètement intégrable

$$A_\lambda dx^\lambda = 0\,, \qquad (\lambda, \mu, \nu \ldots = 0, 1, 2, 3, 4)\,, \tag{1}$$

dans un espace de Riemann V_5 à cinq dimensions qui satisfait à la condition suivante:

L'espace de Riemann V_5 admet un déplacement infinitésimal

$$x^\lambda \rightarrow x^\lambda + A^\lambda dt\,, \tag{2}$$

qui ne change pas la métrique de l'espace

$$d\sigma^2 = G_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu\,, \tag{3}$$

et qui déplace tous les points d'une même distance, où A^λ est défini par $A^\lambda = G^{\lambda\mu} A_\mu$.

De cette condition, nous pouvons déduire

$$A_{\lambda;\,\mu} + A_{\mu;\,\lambda} = 0\,, \qquad \text{(Equations de Killing)} \tag{4}$$

$$G_{\lambda\mu} A^\lambda A^\mu = \text{constante}, \tag{5}$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ formés avec les $G_{\lambda\mu}$.

Si l'on choisit un système spécial de coordonnées dans lequel le vecteur contrevariant A^λ a les composantes $(1, 0, 0, 0, 0)$, on obtient de (4)

$$\partial G_{\lambda\mu} / \partial x^0 = 0\,, \tag{6}$$

et de (5)

$$G_{00} = \text{constante}. \tag{7}$$

Donc, on voit que notre espace V_5 est celui de Riemann employé

---

1) K. Yano: La théorie unitaire des champs proposée par M. Vranceanu, C. R. t. **204** (1937), 332–334.

" : Sur les espaces non holonomes totalement géodésiques, C. R. t. **205** (1937), 9–12.

" : Sur la théorie unitaire non holonome des champs, I, II, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, t. **19** (1937), 867–896, 945–976.

" : La relativité non holonome et la théorie unitaire d'Einstein et Mayer, Mathematica, t. **14** (1938), 124–132.

par M. Kaluza dans sa théorie unitaire des champs gravitationnel et éléctromagnetique.

D'autre part, MM. Einstein et Bergmann[1] ont tout récemment proposée une nouvelle théorie unitaire des champs en modifiant la théorie originale de M. Kaluza.

Dans cette Note, nous allons montrer que cette nouvelle théorie de MM. Einstein et Bergmann peut être aussi traitée de notre point de vue expliqué dans les Mémoires cités cidessus.

2. La condition posée dans le § 1 peut être dite comme il suit: *La dérivée de Lie*[2] *du tenseur fondamental par rapport au vecteur unitaire* A^λ *s'annule, c'est-à-dire*

$$\left\{\begin{array}{l} G_{\lambda\mu;\,\nu}A^\nu + G_{\nu\mu}A^\nu{}_{;\,\lambda} + G_{\lambda\nu}A^\nu{}_{;\,\mu} = 0\,, \\ G_{\lambda\mu}A^\lambda A^\mu = 1\,. \end{array}\right. \tag{8}$$

Si l'on remplace cette condition par

La dérivée de Lie du vecteur covariant A_λ *par rapport au vecteur unitaire* A^λ *s'annule,*

on obtient

$$A_{\lambda;\,\mu}A^\mu + A_\alpha A^\alpha{}_{;\,\lambda} = 0\,, \tag{9}$$

et

$$G_{\lambda\mu}A^\lambda A^\mu = 1\,. \tag{10}$$

Mais, on a de (10)

$$A_\alpha A^\alpha{}_{;\,\lambda} = 0\,, \tag{11}$$

par conséquent, on a encore de (9)

$$A_{\lambda;\,\mu}A^\mu = 0 \quad \text{ou} \quad A^\lambda{}_{;\,\mu}A^\mu = 0\,, \tag{12}$$

ce qui nous dit qu'une courbe à laquelle A^λ est tangente est géodésique.

Donc, dans un système spécial de coordonnées où A^λ a les composantes $(1, 0, 0, 0, 0)$, on a de (10)

$$G_{00} = 1\,, \tag{13}$$

et de (12)

$$2G_{\lambda 0,\,0} - G_{00,\,\lambda} = 0\,, \qquad (A_\lambda = G_{\lambda 0}) \tag{14}$$

où le virgule désigne la dérivée partielle par rapport à x^λ. Les équations (13) et (14) nous montrent que $G_{00}=1$ et $G_{i0}=A_i$ $(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, 4)$ ne contiennent pas la variable x^0. C'est justement la condition posée par MM. Einstein et Bergmann sauf la périodicité des fonctions G_{ij} par rapport à x^0.

---

1) A. Einstein et P. Bergmann: On a generalization of Kaluza's theory of electricity. Annals of Math. t. **36** (1938), 683–701.

2) J. A. Schouten et E. R. van Kampen: Beiträge zur Theorie der Deformation. Prace. Mat. Fiz. t. **41** (1934), 1–19.

P. Diens et E. T. Davies: On the infinitesimal deformations of tensor submanifolds. Journal de Mathématiques t. **16** (1937), 111–150.

3. Dans ce paragraphe, on suppose qu'on soit toujours dans les systèmes de coordonnées par rapport auxquels A^λ a toujours les composantes (1, 0, 0, 0, 0). Donc les transformations des coordonnées doivent avoir la forme

$$\begin{cases} \bar{x}^0 = x^0 + f(x^1, x^2, x^3, x^4)\,, \\ \bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, x^2, x^3, x^4)\,. \end{cases}$$

Prenons un vecteur v^i à quatre composantes. On sait que[1] les quantités définies par

$$\begin{cases} V^0 = -A_i v^i \\ V^i = v^i \end{cases} \tag{15}$$

forment un vecteur à cinq composantes dans l'espace non holonome V_5^4 défini par (1) ou

$$dx^0 + A_i dx^i = 0\,. \tag{16}$$

La dérivée covariante du vecteur V^λ est définie dans V_5 par

$$\delta V^\lambda = dV^\lambda + V^\mu \Pi^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu\,, \tag{17}$$

mais nous allons considérer seulement la dérivée covariante dans la direction qui se trouve sur l'hyperplan non holonome (16).

En substituant $dx^0 = -A_k dx^k$ et $V^0 = -A_k V^k$ dans (17), on trouve

$$\begin{aligned} \delta V^i = V^i_{,0}(-A_k dx^k) + V^i_{,k} dx^k + (-A_j V^j)(-\Pi^i_{00} A_k dx^k + \Pi^i_{0k} dx^k) \\ + V^j(-\Pi^i_{j0} A_k dx^k + \Pi^i_{jk} dx^k)\,, \end{aligned}$$

$$\delta V^i = \left[(V^i_{,k} - V^i_{,0} A_k) + V^j(\Pi^i_{jk} - \Pi^i_{j0} A_k - \Pi^i_{0k} A_j)\right] dx^k\,, \tag{18}$$

parce que

$$\Pi^\lambda_{00} = 0\,,$$

à cause de (13) et de (14).

D'autre part, on a

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{\lambda\omega}(G_{\omega\mu,\nu} + G_{\omega\nu,\mu} - G_{\mu\nu,\omega})\,,$$

donc en posant

$$g_{\lambda\mu} = G_{\lambda\mu} - A_\lambda A_\mu\,,$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} &G^{ij} = g^{ij}\,, \qquad (g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k) \\ &G^{i0} = -g^{ij} A_j\,, \\ &G^{00} = 1 + g^{ij} A_i A_j\,, \\ &G_{\lambda 0, 0} = 0\,, \end{aligned}$$

on obtient

$$\Pi^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia}(g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a}) + A^i_j A_k + A^i_k A_j + \frac{1}{2} g^{ia} A_a g_{jk,0}\,, \tag{19}$$

$$\Pi^i_{j0} = \Pi^i_{0j} = A^i_j + \frac{1}{2} g^{ia} g_{aj,0}\,, \tag{20}$$

où

$$A^i_j = g^{ik} A_{kj}\,, \qquad A_{kj} = \frac{1}{2}(A_{k,j} - A_{j,k})\,.$$

---

1) K. Yano: Sur la théorie unitaire non holonome des champs I, II, déjà cité.

Donc, en substituant (19) et (20) dans (18), on obtient finalement

$$\delta V^i = \left[(V^i_{\,.\,k} - V^i_{\,.\,0} A_k) + V^j \{^{\,i}_{jk}\} \right] dx^k \tag{21}$$

où

$$\{^{\,i}_{jk}\} = \frac{1}{2} g^{ia} \left[(g_{aj,\,k} - A_{aj,\,0} A_k) + (g_{ak,\,j} - g_{ak,\,0} A_j) - (g_{jk,\,a} - g_{jk,\,0} A_a) \right].$$

On sait que,[1] δV^λ étant des compasantes d'un vecteur contrevariant, $\delta V^i (= \delta v^i)$ définies par (21) ou par

$$\delta v^i = \left[(v^i_{\,.\,k} - v^i_{\,.\,0} A_k) + v^j \{^{\,i}_{ik}\} \right] dx^k \tag{22}$$

forment un vecteur contrevariant à quatre composantes; c'est ce que MM. Einstein et Borgmann appellent "four-vector."

Et l'on voit bien que δv^i est la dérivée covariante pour un vecteur à quatre composantes de MM. Einstein et Bergmann et que leur théorie peut être aussi traitée du point de vue de la théorie des espaces non holonomes.

1) K. Yano: Sur la théorie unitaire non holonome des champs I, II, déjà cité.