5. Über die Gruppe der messbaren Abbildungen.

Von Kunihiko KODAIRA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 13, 1941.)

1. Es seien Ω ein Raum (mit Punkten $P, Q, \ldots$) und G eine Gruppe der ein-eindeutigen Abbildungen $x: P \to P\cdot x$ von Ω auf sich selbst. In vorliegender Note betrachten wir G-invariante Masse[1] μ^* in Ω. Dabei kann $\mu(\Omega)$[2] auch unendlich sein, jedoch verlangen wir immer, dass Ω die Summe höchstens abzählbar vieler Mengen mit endlichen Massen ist. In G sei ein links-invariantes Mass m^* mit der folgenden Eigenschaft erklärt: *Ist eine (komplex-wertige) Funktion $f(x)$ in Ω messbar, so ist $f(y^{-1}x)$ es auch.* Dabei soll G auch die Summe höchstens abzählbar vieler Mengen mit endlichen Massen sein. Eine Gruppe mit einem solchen Mass wurde von Herrn A. Weil „groupe mesuré" genannt.[3] Wir wollen ein solches m^* ein Weilsches Mass nennen.[4] In G ist dann $f(x^{-1})$ mit $f(x)$ auch messbar, da aus der Voraussetzung folgt, dass $f\left((y^{-1}x)^{-1}\right)=f(x^{-1}y)$ für fast alle y messbar in x ist. Wenn $\int_G f(x)dx=0$ ist, ist auch $\int_G f(x^{-1})dx=0$. *Die Messbarkeit ist daher in G invers- und rechts-invariant. Ebenso invariant ist die Eigenschaft einer Teilmenge A: $m(A)=0$.*[5] Eine Abbildung eines Raumes Ω_1 mit einem Mass in einem ebensolchen Raum Ω_2 heisst nach Herrn J. von Neumann messbar,[6] wenn das Urbild jeder messbaren Teilmenge aus Ω_2 wieder messbar ist. Die oben genannte Bedingung für das Weilsche Mass ist nichts anders als die Messbarkeit der Abbildung $x \times y \to y^{-1}x$ von $G \times G$ auf G. Wir bezeichnen die Familie aller μ^* (bzw. m^* u. s. w.)-messbaren Teilmengen mit endlichen Massen von Ω (bzw. G, u. s. w.) mit (μ) (bzw. (m), u. s. w.).

Satz 1. *Die Abbildung: $P \times x \times y \to P \times y^{-1}x$ von $\Omega \times G \times G$ auf $\Omega \times G$ ist messbar.*

Beweis. Das Produktmass $\mu m m^*$ sei mit ν^* bezeichnet. Eine Teilmenge $\Gamma \subset \Omega \times G$ sei messbar, und man setze $\mathfrak{A}=(P\times x \times y;\ P \times y^{-1}x \in \Gamma)$.[7] Zum Beweis genügt es die Messbarkeit von $\mathfrak{A}$ zu zeigen,

1) Wir verstehen im folgenden unter Mass immer ein reguläres äusseres Mass vom Carathéodoryschen Typus. Vgl. z. B. S. Saks: Theory of Integral, S. 39–55.

2) Für messbare Teilmenge A schreiben wir $\mu(A)$ statt $\mu^*(A)$.

3) A. Weil: Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés. C. R. t. **202** (1936), S. 1147-1149.

4) Vgl. eine Arbeit des Verfassers: Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, Kap. III. Nr. 3, die demnächst in Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan erscheinen wird. Dies wird im folgenden mit B. M. T. zitiert.

5) Ein Mass mit dieser Eigenschaft heisst nach J. von Neumann „right-0-invariant". Vgl. J. von Neumann: The uniqueness of Haar's measure, Recueil Math., I (43) (1936), S. 721–734.

6) J. von Neumann: Über messbare Abbildungen, Annals of Math. Vol. **33** (1932), S. 574–586.

7) Wir bezeichnen die Menge aller Elementen E mit Eigenschaft $\mathfrak{E}$ mit $(E;\ \mathfrak{E})$.

d. h. dass für jedes $\Lambda \in (\mu)$, A, $B \in (m)$

$$(*)\qquad \nu(\Lambda \times A \times B) = \nu^*(\Lambda \times A \times B \frown \mathfrak{A}) + \nu^*(\Lambda \times A \times B - \mathfrak{A})$$

gilt. Aus der Messbarkeit von Γ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ messbare Λ_j, Λ'_j, $\Lambda''_j \subset \Lambda$ und D_j, D'_j, $D''_j \subset G$ von der Art gibt, dass

$$\Lambda \times G \frown \Gamma \subset \sum_j \Lambda_j \times D_j\,, \quad \Lambda \times G - \Gamma \subset \sum_j \Lambda'_j \times D'_j\,,$$

$$\sum_j \Lambda_j \times D_j \frown \sum_j \Lambda'_j \times D'_j = \sum_j \Lambda''_j \times D''_j\,,$$

$$\Lambda''_l \times D''_l \frown \Lambda''_k \times D''_k = 0 \quad (k \neq l)\,,$$

$$\text{und}\quad \mu m(\sum_j \Lambda''_j \times D''_j) = \sum_j \mu(\Lambda''_j) m(D''_j) < \varepsilon$$

besteht. Man setze nun

$$\Delta_j = (x \times y\,;\; y^{-1}x \in D_j)\,, \quad \Delta'_j = (x \times y\,;\; y^{-1}x \in D'_j)\,,$$
$$\text{und}\quad \Delta''_j = (x \times y\,;\; y^{-1}x \in D''_j)\,.$$

Δ_j, Δ'_j, Δ''_j sind dann messbar, und es gibt

$$\Lambda \times A \times B \frown \mathfrak{A} \subset \sum \Lambda_j \times (\Delta_j \frown A \times B)\,,$$
$$\Lambda \times A \times B - \mathfrak{A} \subset \sum \Lambda'_j \times (\Delta'_j \frown A \times B)\,.$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichingen sind messbar, und da

$$mm(\Delta''_j \frown A \times B) = \iint\limits_{A \times B} e_{D''_j}(y^{-1}x)^{1)} dx dy \leqq m(B) m(D''_j) < \varepsilon m(B)\,.$$

ist, gilt

$$\nu\Big(\sum \Lambda_j \times (\Delta_j \frown A \times B) \frown \sum \Lambda'_j \times (\Delta'_j \frown A \times B)\Big)$$
$$= m(B) \sum \mu(\Lambda''_j) m(D''_j) < \varepsilon m(B)\,.$$

Daraus erhält man leicht die Gleichung $(*)$, w. z. b. w.

Definition 1. *G heisst messbar über Ω, wenn die Abbildung $P \times x \to P \cdot x$ von $\Omega \times G$ in Ω messbar ist.*[2]

Die Gruppe G kann man als eine Abbildungsgruppe von sich selbst auffassen, indem man jedes $a \in G$ als eine Abbildung $x \to a^{-1}x$ von G auf sich ansieht. Das Weilsche Mass m^* ist dann G-invariant und G ist messbar über G im obigen Sinne.

Satz 2. *Wenn G messbar über Ω ist, so ist die Abbildung $P \times x \to P \cdot x^{-1}$ auch messbar.*

Beweis. $f(P)$ sei messbar. Dann ist $f(P \cdot x)$ messbar in $\Omega \times G$, also nach Satz 1 ist $f(P \cdot x^{-1}y)$ messbar in $\Omega \times G \times G$. $f\big((P \cdot x^{-1}) \cdot y\big)$ ist also nach dem Satz von Fubini für fast alle y messbar in P und x. Da μ^* G-invariant ist, ist daher $f(P \cdot x^{-1})$ messbar in $\Omega \times G$, w. z. b. w.

Auf den Fall $\Omega = G$ angewandt, ergibt dieser Satz den folgenden

1) $e_D(x)$ bedeutet die charakteristische Funktion von D.

2) Vgl. E. Hopf: Ergodentheorie, S. 9, Definition 3.4.

Satz 3. *Die Abbildung* $x \times y \to yx$ *von* $G \times G$ *in* G *ist messbar.*[1)]

Es seien $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$ der (nicht notwendig separable) Hilbertsche Raum aller μ^*-quadrat-summierbaren Funktionen auf Ω, und U_x der durch $U_x f(P) = f(P \cdot x)$ definierte unitäre Operator von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$. Es gilt dann der folgende

Satz 4. *Ist* G *messbar über* Ω, *so ist für jedes* $f \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$ *die durch alle* $U_x f$ *aufgespannte abgeschlossene lineare Mannigfaltsgkeit* $[U_x f;\ x \in G]$ *separabel.*[2)]

Beweis. G lässt sich nach der Voraussetzung als die Summe **höchstens abzählbar** vieler $A_j \in (m)$ darstellen. In jedem $\Omega \times A_j$ gehört $f(P \cdot x)$ zu L^2. Man kann also $g_{jk}^{(N)} \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$ und $h_{jk}^{(N)}(x)$ so wählen, dass

$$\lim_N \int\int_{\Omega \times A_j} |f(P \cdot x) - \sum_{k=1}^{n_N} g_{jk}^{(N)}(P) h_{jk}^{(N)}(x)|^2 dP dx = 0$$

gilt. Hieraus folgt nach dem Satz von Fubini, dass $U_x f$ für jedes x ausserhalb einer x-Nullmenge X in der durch $g_{jk}^{(N)}$ aufgespannten separablen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ enthalten ist. $G - X$ ist also in bezug auf die links-invariante „Quasi-metrik" $\rho(x, y) = \| U_x f - U_y f \|$ separabel. Man setze nun $\Theta_\varepsilon = \big(x; \rho(x, 1) < \varepsilon\big)$. Θ_ε ist dann messbar, und da für eine ρ-überall dichte Folge x_j $(j = 1, 2, \dots)$ aus $G - X$

$$G - X = \sum_j x_j \Theta$$

gilt, muss $m(\Theta_\varepsilon) > 0$ sein. Es gibt also für jedes $y \in X$ ein $x \in \Theta_\varepsilon$ mit $yx \notin X$. Daher gilt

$$\| U_y f - U_{yx} f \| = \| U_x f - f \| < \varepsilon, \quad \text{und} \quad U_{yx} f \in \mathfrak{M}.$$

Also muss $U_y f \in \mathfrak{M}$ auch für $y \in X$ sein.

2. Definition 2. *Man sagt, dass in* Ω *eine Uniform-topologie (die wir nötigenfalls mit* $\mathfrak{T}$ *bezeichnen) definiert ist, wenn in* Ω *ein System der jedem Punkte* $P \in \Omega$ *zugeordneten Teilmengen* $(V_\alpha(P);\ \alpha \in I)$ *mit dem „Indizen-bereich"* I *als das „Umgebungssystem" so ausgezeichnet wird, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

i) $V_\alpha(P) \ni P$. *Für jede* $\alpha, \beta \in I$ *gibt es ein* $\gamma \in I$ *mit* $V_\gamma(P) \subset V_\alpha(P) \frown V_\beta(P)$.

ii) *Für jedes* $\alpha \in I$ *gibt es ein* $\gamma \in I$, *so dass aus* $P' \in V_\gamma(P)$, $P'' \in V_\gamma(P)$ $P' \in V_\alpha(P'')$ *folgt.*

iii) *Für jedes* $\alpha \in I$ *gibt es höchstens abzählbar viele Punkte* $P_1, P_2, \dots \in \Omega$ *mit* $\sum_j V_\alpha(P_j) = \Omega$.

In diesem Fall heisst Ω *ein uniform-topologischer (kurz: u-t.) Raum.*[3)]

In einem *u-t.* Raum werden die Stetigkeit, die Gleichmässig-stetigkeit, die Total-beschränktheit, u. s. w. wie üblich definiert. Ein *u-t.*

---

1) Vgl. B. M. T. Kap. IV. Satz 16.

2) Vgl. B. M. T. Kap. V. Satz 22.

3) Der *u-t.* Raum wurde von Herrn A. Weil ausführlich behandelt. Vgl. A. Weil: Espaces à structure uniforme, Act. sc. et ind. **551** (1937). Hier wird die Bedingung (U_1) (in S. 7) von A. Weil — d. i. das Trennungsaxiom: $\prod_\alpha \frown V_\alpha(P) = P$ — ausgelassen, und die Bedingung iii) neu hinzugefügt.

Raum heisst im Kleinen total beschränkt (kurz: im Kl. *t. b.*), wenn für ein $\alpha \in I$ alle $V_\alpha(P)$ total beschränkt sind.

Definition 3. *Man sagt, dass in der Gruppe G eine Topologie definiert ist, wenn in G im obigen Sinne eine Uniform-topologie definiert ist, die noch der Bedingung:* $aV_\alpha(x)=V_\alpha(ax)$ *genügt, und wenn dabei die Abbildung* $x\times y\rightarrow y^{-1}x$ *stetig ist. G heisst dann eine topologische Gruppe.*

Jede topologische Gruppe im üblichen Sinne ist es auch im Sinne der obigen Definition, wenn sie der zu iii) entsprechende Abzählbarkeitsbedingung genügt.

In dieser Nr. setzen wir stets voraus: *Es seien Ω ein im Kl. t. b. u-t. Raum und G eine im Kl. t. b. topologische Gruppe.*

Definition 4. *Eine (komplex-wertige) Funktion in Ω heisst Bairesch, wenn sie aus gleichmässig stetigen Funktionen durch sukzessive Anwendungen der elementaren Rechenregeln und Limes-bildungen erhalten wird. Eine Teilmenge aus Ω heisst Borelsch, wenn ihre charakteristische Funktion Bairesch ist.*

Eine offene Menge ist in diesem Sinne im allgemeinen nicht notwendig Borelsch. Es lässt sich aber zeigen, dass Ω ein Umgebungssystem besitzt, das lauter aus Borelschen Mengen besteht. Umgekehrt enthält jeder absolut additive Mengenkörper, der ein Umgebungssystem enthält, auch alle Borelschen Mengen.[1] Es gilt also

Satz 5. *Die Familie aller Borelschen Mengen ist der minimale absolut additive Mengenkörper, der überhaupt ein Umgebungssystem enthält.*

Definition 5. *Das Mass μ^* heisst zur Topologie von Ω gehörig, wenn* i) *jede total beschränkte Borelsche Teilmenge in* (μ) *enthalten, und* ii) *es für jede Teilmenge A ein Borelsches B von der Art gibt, dass $B\supset A$ und $\mu(B)=\mu^*(A)$ gilt.*[2]

Aus Satz 5 folgt dann leicht der folgende

Satz 6. *Es seien Ω_1, Ω_2 zwei im Kl. t. b. u-t. Räume. Sind μ_1^* bzw. μ_2^* zu den Topologien gehörige Masse von Ω_1 bzw. Ω_2, so gehört das Produkt-mass $\mu_1\mu_2^*$ zur „Produkt-topologie" von $\Omega_1\times\Omega_2$.*[3]

Definition 6. *G heisst stetig über Ω, wenn die Abbildung $P\times x\rightarrow P\cdot x$ in jeder total beschränkten Teilmenge von $\Omega\times G$ gleichmässig stetig ist.*

Z. B. ist G, als Abbildungsgruppe von sich selbst betrachtet, stetig über G.[4]

Satz 7. *G sei stetig über Ω, und μ^* bzw. m^* gehöre zur Topologie von Ω bzw. G. Dann ist G messbar über Ω.*

Beweis. $f(P)$ sei messbar. Dann gibt es ein Bairesches $h(P)$, so dass $f(P)=h(P)$ für fast alle P gilt. Man wähle eine Borelsche Nullmenge N, die die Nullmenge $\big(P; f(P)\neq h(P)\big)$ enthält, und bezeichne

---

1) Für eine ausführliche Darstellung siehe B. M. T. Kap. I. Nr. 5, Nr. 6.

2) Vgl. J. von Neumann, Recueil Math., I (43) (1936), S. 721 u. 722. Siehe auch B. M. T. Kap. IV. Nr. 1.

3) Vgl. B. M. T. Kap. II. Satz 5.

4) Denn jede im Kl. *t. b.* topologische Gruppe ist komplettierbar. Vgl. B. M. T. Kap. I. Satz 3.

die charakteristische Funktion von N mit $e_N(P)$. $e_N(P\cdot x)$ und $h(P\cdot x)$ sind nun Bairesch,[1] also messbar in $\Omega\times G$, da nach Satz 6 μm zur Topologie von $\Omega\times G$ gehört, und es gilt $\int\int_{\Omega\times G} e_N(P\cdot x)dPdx=0$. $f(P\cdot x)$ stimmt also fast überall mit $h(P\cdot x)$ überein. Daher ist $f(P\cdot x)$ messbar, w. z. b. w.

In diesem Beweis wird der Weilsche Charakter von m^* nicht benutzt. Auf den Fall $\Omega=G$ angewandt, ergibt dieser Satz also den folgenden

Satz 8. *Jedes zur Topologie gehörige Mass von G ist Weilsch.*[2]

Es gilt für G noch der folgende wichtige

Satz 9. *Ein in G erklärtes Weilsches Mass m^* gehört zu Topologie von G, wenn* i) *jede total beschränkte Borelsche Menge in* (m) *enthalten wird, und* ii) *es für jedes $A\in(m)$ ein Borelsches B mit $m(A-B)+m(B-A)=0$ gibt.*[3]

3. Einen wichtigen Satz von Herrn A. Weil[4] können wir nun folgendermassen formulieren:

Satz 10 (A. Weil). *Jedem in einer Gruppe G erklärten Weilschen Mass m^* wird eine Topologie $\mathfrak{T}$ so zugeordnet, dass G eine im Kl. t. b. topologische Gruppe und m^* eben das zu $\mathfrak{T}$ gehörige Mass wird. $\mathfrak{T}$ ist dabei durch m^* eindeutig bestimmt. — Wir nennen dieses $\mathfrak{T}$ die zu m^* gehörige Topologie. m^* ist dann umgekehrt durch die zugehörige Topologie bis auf multiplikative Konstant eindeutig bestimmt.*

Die Zuordnung der Topologie zum Weilschen Mass ist also umkehrbar eindeutig.[5] Im folgenden nehmen wir also immer G ($\bar{G}$ u. s. w.), als eine topologische Gruppe mit dem zugehörigen Weilschen Mass an. Es gilt dann der

Satz 11 (A. Weil). *Das Umgebungssystem von G ist durch*

$$\left(V_A(x)\,;\quad V_A(x)=xAA^{-1}\,,\quad A\in(m)\,,\quad m(A)>0\right)$$

gegeben. $m(G)$ ist dann und nur dann endlich, wenn G total beschränkt ist.[6]

Satz 12. *Eine homomorphe Abbildung G auf $\bar{G}$ ist dann und nur dann messbar, wenn sie stetig ist.*

Beweis. Es ist nach Satz 11 klar, dass die Stetigkeit aus der Messbarkeit folgt. $h: x\rightarrow\bar{x}=h(x)$ sei nun eine stetige homomorphe Abbildung. Man fasse G als eine Abbildungsgruppe von $\bar{G}$, indem man $\bar{x}\cdot a=h(a^{-1})\bar{x}$ $(a\in G)$ setzt. Dann wird G stetig über $\bar{G}$. G ist also nach Satz 7 messbar über $\bar{G}$, daraus folgt die Messbarkeit von h.

---

1) Dies ersieht man leicht, indem man Ω und G komplettiert. Vgl. B. M. T., Kap. I. Nr. 6.

2) Vgl. B. M. T. Kap. IV. Satz 16.

3) Für den Beweis vgl. man B. M. T. Kap. IV. Beweis von Satz 19.

4) Vgl. A. Weil, C. R. t. **202** (1936), S. 1147–1149.

5) Eine topologische Gruppe besitzt aber im allgemeinen nicht notwendig ein zugehöriges Weilsches Mass. Vgl. B. M. T., Fussnote 29).

6) Einen ausführlichen Beweis dieser Sätze findet man in B. M. T. Kap. V.

Aus diesem Satz folgt z. B., dass jede messbare Darstellung durch Matrizen von G stetig ist.[1] Es gilt nun noch allgemeiner der

Satz 13. *Für jedes $x \in G$ sei ein unitärer Operator U_x von einem separablen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ homomorph zugeordnet, so dass $(f, U_x g)$ sich für jede $f, g \in \mathfrak{H}$ messbar verhält. Dann ist die Abbildung $x \rightarrow U_x$ stark-stetig.*[2]

Beweis. Man setze $\theta_\varepsilon = (x; \| U_x f - f \| < \varepsilon)$ für ein festes f. θ_ε ist dann messbar, und man kann zeigen, wie im Beweis des Satzes 4, dass $m(\theta_\varepsilon) > 0$ ist. $x\theta_\varepsilon \theta_\varepsilon^{-1}$ ist also nach Satz 11 eine Umgebung von x. Für jedes $y \in x\theta_\varepsilon \theta_\varepsilon^{-1}$ gilt dabei $\| U_x f - U_y f \| < 2\varepsilon$. $x \rightarrow U_x$ ist daher stetig im Sinne der starken Topologie.

Es seien nun $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$ und U_x der durch $U_x f(P) = f(P \cdot x)$ definierte unitäre Operator. $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}^{(\mu)}$ kann zwar nicht separabel sein, aber, wenn G messbar über Ω ist, kann der obige Satz auch auf diesen Fall angewandt werden, wie man aus Satz 4 ersehen kann. Es gilt also der

Satz 14. *G sei messbar, dann ist die Abbildung $x \rightarrow U_x$ stark-stetig.*

---

1) Vgl. A. Weil, C. R. t. **202** (1936), S. 1147–1149.

2) Dies bildet eine Erweiterung von einem bekannten Satz, der die Stetigkeit jeder messbaren Strömung behauptet. Vgl. z. B. E. Hopf: Ergodentheorie, S. 10.