68. Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Das System aller reellen stetigen Funktionen $\mathfrak{S}$ auf einem topologischen Raum R bildet einen sogenannten Verband durch die Ordnung: $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \in R$. Für endlich viele beliebige Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathfrak{S}$ gibt es daher eine derartige Funktion $\varphi(x)$, nämlich $\varphi(x) = \operatorname{Min}_i f_i(x)$, dass $\varphi(x) \leqq f_i(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$. Für unendlich viele Funktionen gibt es aber nicht immer solche Funktion. Nun betrachten wir zwei Bedingungen über $\mathfrak{S}$, sogenannt „completeness" und „σ-completeness":

A) Für beliebig unendlich viele, stetige Funktionen $f_\alpha(x) \geqq 0$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, bezeichnet mit $\bigcap_\alpha f_\alpha(x)$, für die $\varphi(x) \leqq f_\alpha(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_\alpha(x)$ (für alle α) gilt.

B) Für *abzählbar* unendlich viele stetige Funktionen $f_i(x) \geqq 0$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, bezeichnet mit $\bigcap_i f_i(x)$, für die $\varphi(x) \leqq f_i(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_i(x)$ $(i=1, 2, \dots)$ gilt.

Ziel dieser Abhandlung ist zu untersuchen, welche topologische Eigenschaft R haben soll, damit $\mathfrak{S}$ der Bedingung A) oder B) genügt.

Eine abgeschlossene Punktmenge heisst *regulär abgeschlossen*, falls sie die abgeschlossene Hülle einer offenen Punktmenge ist. Eine abgeschlossene Punktmenge heisst *σ-regulär abgeschlossen*, falls sie die abgeschlossene Hülle einer zu F_σ gehörigen offenen Punktmenge ist. Hierbei ist F_σ das System aller Punktmengen, welche Vereinigungen von höchstens abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Punktmengen sind.

Entsprechend A) oder B), betrachten wir als topologische Eigenschaften von R

A′) Alle regulär abgeschlossenen Punktmengen sind auch offen.

B′) Alle σ-regulär abgeschlossenen Punktmengen sind auch offen.

Wir wollen beweisen, *dass* A′) *oder* B′) *bzw. für* A) *oder* B) *hinreichend ist, dass* A′) *für* A) *notwendig ist, falls R vollständig regulär*[1] *ist, und dass* B′) *für* B) *notwendig ist, falls R normal*[2] *ist.*

Satz 1. Wenn ein topologischer Raum R von der Eigenschaft A′) *ist, so genügt das System $\mathfrak{S}$ aller stetigen Funktionen auf R der Bedingung* A).

Beweis. Es sei eine Menge von Funktionen $f_i(x) \geqq 0$ in $\mathfrak{S}$. Da $f_i(x)$ stetig in R ist, so ist die Punktmenge $E[x; f_i(x) < \alpha]$ offen für jede Zahl α. Setzt man

---

1) Vgl. A. Tychonoff: Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1930), 544–561.

2) Vgl. P. Alexandroff und H. Hoph: Topologie, Berlin, 1935.

$$E_a=\sum_i E[x\,;\,f_i(x)<a]\,,$$

so ist E_a auch offen. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\bar{E}_a$ nach Voraussetzung auch offen, und es gilt $\bar{E}_a\subset\bar{E}_\beta$ für $a<\beta$, und $\lim\limits_{a\to\infty}\bar{E}_a=R$.

Für jeden Punkt $x\in R$ gibt es eine derartige positive Zahl a, dass für jede positive Zahl ε stets $x\in\bar{E}_{a+\varepsilon}$ aber $x\bar{\in}\bar{E}_{a-\varepsilon}$ ist, oder x gehört sonst zu $E_0=\lim\limits_{a\to 0}\bar{E}_a$. Nun definieren wir die Funktion $\varphi(x)$ durch

$$\varphi(x)=\begin{cases} a & \text{im ersten Falle} \\ 0 & \text{im zweiten Falle.}\end{cases}$$

Dann ist deutlich $\varphi(x)\geqq 0$ und

$$E[x\,;\,\varphi(x)<a]=\sum_{\varepsilon>0}\bar{E}_{a-\varepsilon}$$

$$E[x\,;\,\varphi(x)\leqq a]=\prod_{\varepsilon>0}\bar{E}_{a+\varepsilon}\,.$$

Da $\bar{E}_a$ abgeschlossen und sogar offen ist, ist $\varphi(x)$ stetig.

Es gilt für jede positive Zahl ε

$$E[x\,;\,\varphi(x)<a]=\sum_{\varepsilon>0}\bar{E}_{a-\varepsilon}\supset E[x\,;\,f_i(x)<a-\varepsilon]\,,$$

und für $\varepsilon\to 0$ erhält man

$$E[x\,;\,\varphi(x)<a]\supset E[x\,;\,f_i(x)<a]\,.$$

Daher ist $\varphi(x)\leqq f_i(x)$ für alle i.

Es sei eine stetige Funktion $h(x)\leqq f_i(x)$ für alle i. Dann gilt für jede Zahl a und positive Zahl ε

$$E[x\,;\,h(x)<a-\varepsilon]\supset E[x\,;\,f_i(x)<a-\varepsilon]\,.$$

Hieraus folgt $E[x\,;\,h(x)\leqq a-\varepsilon]\supset E_{a-\varepsilon}$. Da $E[x\,;\,h(x)\leqq a-\varepsilon]$ abgeschlossen ist, gilt auch

$$E[x\,;\,h(x)\leqq a-\varepsilon]\supset\bar{E}_{a-\varepsilon}\,,$$

und folglich, wegen $E[x\,;\,h(x)<a]\supset E[x\,;\,h(x)\leqq a-\varepsilon]$,

$$E[x\,;\,h(x)<a]\supset\sum_{\varepsilon>0}\bar{E}_{a-\varepsilon}=E[x\,;\,\varphi(x)<a]\,.$$

Daher gilt $h(x)\leqq\varphi(x)$ in R, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 2. Wenn ein topologischer Raum R von der Eigenschaft B′) *ist, so genügt das System $\mathfrak{S}$ aller stetigen Funktionen auf R der Bedingung* B).

Beweis. Im obigen Beweis gehört $E[x\,;\,f_i(x)<a]$ zu F_σ, da

$$E[x\,;\,f_i(x)<a]=\sum_{\nu=1}^{\infty}E\left[x\,;\,f_i(x)\leqq a-\frac{1}{\nu}\right]$$

ist. Wenn $f_i(x)$ abzählbar unendlich viel ist, so gehört die offene Punktmenge E_a auch zu F_σ. Daher ist nach B′) die abgeschlossene Hülle

$\bar{E}_a$ auch offen. Dann kann man den Beweis des Satzes 1 ohne weiters auf Satz 2 anwenden.

Satz 3. Wenn das System $\mathfrak{S}$ *aller stetigen Funktionen auf einem vollständig regulären Raum* R *der Bedingung* A) *genügt, so muss* R *von der Eigenschaft* A′) *sein.*

Beweis. G sei eine beliebige offene Punktmenge in R. Da R vollständig regulär ist, gibt es für jeden Punkt $y \in G$ eine derartige stetige Funktion $f_y(x)$, dass $f_y(y)=0$, $f_y(x)=1$ in $R-G$, und $0 \leqq f_y(x) \leqq 1$ in R ist. Da $\mathfrak{S}$ der Bedingung A) genügt, gibt es dann die stetige Funktion $\varphi(x)=\bigcap_{y \in G} f_y(x)$. Dann muss offenbar $\varphi(x)=0$ in G. Nach Stetigkeit gilt auch $\varphi(x)=0$ in der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$.

Da für jede stetige Funktion $h_z(x)$, die $h_z(z)=1$ für einen bestimmten Punkt $z \in R-\bar{G}$, $h_z(x)=0$ in $\bar{G}$, und $0 \leqq h_z(x) \leqq 1$ in R genügt, wegen $h_z(x) \leqq f_y(x)$ für alle $y \in G$, $\varphi(x) \geqq h_z(x)$ sein soll, so muss $\varphi(z) \geqq 1$ sein. Da z beliebig in $R-\bar{G}$ sein mag, erhält man $\varphi(x)=1$ in $R-\bar{G}$. Daher ist die stetige Funktion $\varphi(x)$ nicht anders als die charakteristische Funktion der Punktmenge $R-\bar{G}$. Folglich ist $\bar{G}$ abgeschlossen und offen, w. z. b. w.

Satz 4. Wenn das System $\mathfrak{S}$ *aller stetigen Funktionen auf einem normalen Raum* R *der Bedingung* B) *genügt, so muss* R *von der Eigenschaft* B′) *sein.*

Beweis. Es sei eine offene Punktmenge G, welche zu F_σ gehört, d. h. $G=\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ für höchstens abzählbar unendlich viele abgeschlossene Punktmengen F_i. Da R normal ist, gibt es eine derartige stetige Funktion $f_i(x)$, dass $f_i(x)=0$ in F_i, $f_i(x)=1$ in $R-G$, und $0 \leqq f_i(x) \leqq 1$ in R[3]. Wenn $\mathfrak{S}$ der Bedingung B) genügt, so gibt es $\varphi(x)=\bigcap_i f_i(x)$. Dann kann man aus dem Beweis des Satzes 3 sofort schliessen, dass die abgeschlossene Hülle $\bar{G}$ offen ist. Daher ist R von der Eigenschaft B′).

Zuletzt wollen wir einen normalen Raum R angeben, der von der Eigenschaft B′) aber nicht A′) ist.

Es sei eine Menge R, deren Mächtigkeit grösser als $\aleph_0$ ist. Elemente in R seien isolierte Punkte bis auf ein einziges Element, das man mit ∞ bezeichnet. Teilmengen, die bis auf höchstens abzählbar unendlich viele, von ∞ verschiedene, Elemente mit der ganzen Menge R übereinstimmen, seien Umgebungen von ∞. Dann ist R ein normaler Raum. Dieser Raum ist offenbar von der Eigenschaft B′) aber nicht A′): wenn man R in zwei Teilmengen $R_1(\ni \infty)$, R_2 zerlegt, deren Mächtigkeiten beide grösser als $\aleph_0$ sind, so ist R_1 regulär abgeschlossen aber nicht offen.

3) Vgl. 2).