118. *La produit kroneckerienne infinie des espaces linéaires.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

M. J. v. Neumann[1] a introduit les notions de la produit kroneckerienne infinie des espaces hilbertiens et de celle des anneaux des opérateurs sur ceux. Or, ces notions sont aussi importantes pour la recherche des espaces linéaires et il est très désireable de les introduire sur ceux. Le but de cette note est de discuter ces notions pour les espaces linéaires.

M. J. v. Neumann a défini la produit kroneckerienne infinie des espaces hilbertiens constructivement en se servant la produit des fonctionnelles linéaires, mais dans cette note, nous avons défini descriptivement d'abord la produit kroneckerienne d'un nombre fini des espaces linéaires et puis celle infinie de ces espaces comme la limite de ces produits finies. La définition descriptive de la produit kroneckericnne d'un nombre fini des espaces linéaires nous parait forṁ alle mais nous ne pouvons la définir constructivement sans perdre la généralité. En effet, nous savons les diverses définitions de la produit kroneckerienne d'un nombre fini des espaces linéaires et il n'y a aucune relation entre elles.

1. Soient $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$ les espaces linéaires normés et complets. Alors, nous entendrons par la produit des éléments f_λ de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$ la formule $\prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_\lambda = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ qui remplit les conditions suivantes:

1) quelques soient les éléments f_λ de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$, il existe toujours la produit de ces éléments,

2) $\prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_\lambda$ est déterminée univoquement par f_λ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$,

3) quand $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est une permutation de $(1, 2, \dots, n)$, nous avons $\prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_{k_\lambda} = \prod_{n-1}^{n} \otimes f_\lambda$,

4) $(\prod_{\lambda-1}^{k} \otimes f_\lambda) \otimes (\prod_{\lambda-k+1}^{n} \otimes f_\lambda) = \prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_\lambda$,

5) pour un nombre α et une produit $p=\prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_\lambda$, αp désigne une produit $(\alpha f_1) \otimes \prod_{\lambda-2}^{n} \otimes f_\lambda$, et nous l'appelons la produit de α et p; (i) αp est définie pour tout nombre α et toute produit p, (ii) αp est déterminée univoquement pour α et p, (iii) $(\alpha\beta)p=\alpha(\beta p)$, (iv) $\prod_{\lambda-1}^{n} \otimes (\alpha_\lambda f_\lambda) = \prod_{\lambda-1}^{n} \alpha_\lambda \prod_{\lambda-1}^{n} \otimes f_\lambda$,

6) un nombre que nous appelons la norme de p et la désignons

---

1) J. v. Neumann, On infinite direct product, Comp. Math., **6** (1939).

par $|p|$ correspond à chaque produit $p=\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes f_\lambda$ et elle jouit des propriétés; (i) $|p|\geqq 0$, (ii) $|\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes f_\lambda|=\prod_{\lambda=1}^{n}|f_\lambda|$, (iii) $|ap|=|a|\,|p|$.

Puis, nous envisageons les sommes formelles $\sum_{k=1}^{m} p_k=p_1+p_2+\cdots+p_m$ des produits p_k $(k=1, 2, \dots, m)$. Quand elles satisfont aux conditions suivantes:

7) quelleques soient les prosuits p_k $(k=1, 2, \dots, m)$, il existe la somme de ces produits,

8) $\sum_{k=1}^{m} p_k$ est déterminée univoquement pour les produits p_k $(k=1, 2, \dots, m)$,

9) $p+p'=p'+p$,

10) $(p+p')+p''=p+(p'+p'')$,

11) pour un nombre α et une somme $s=\sum_{k=1}^{m} p_k$, αs désigne la somme $\sum_{k=1}^{m} \alpha p_k$, et nous l'appelons la produit de α et s; (i) pour tout nombre α et toute somme s, il existe toujours la produit αs, (ii) αs est déterminée univoquement pour α et s, (iii) $\alpha(\beta s)=(\alpha\beta)s$, (iv) $(\alpha+\beta)s=\alpha s+\beta s$, (v) $\alpha(s+s')=\alpha s+\alpha s'$,

12) pour deux sommes s et s', il existe toujours la somme s'' telle qu'on ait $s=s'+s''$, et nous la désignons par $s-s'$ et en particulier par 0 la somme $s-s$ et par $-s$ la somme $0-s$,

13) pour deux sommes $s=\sum_{k=1}^{m} p_k$ et $s'=\sum_{k=1}^{m'} q_k$, où p_k sont les produits des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, l)$ et q_k sont celles de ceux de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=l+1, l+2 \dots, n)$, nous entendrons par la produit $s\otimes s'$ la somme $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m'} p_j\otimes q_k$; (i) quelle ques soient les sommes s et s', où s et s' sont les sommes produits des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, l)$ et $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=l+1, l+2, \dots, n)$ respectivement, il existe la produit $s\otimes s'$, (ii) $s\otimes s'$ est déterminée univoquement pour s et s', (iii) $s\otimes s'=s'\otimes s$, (iv) $s\otimes(s'\otimes s'')=(s\otimes s')\otimes s''$, (v) $(s+s')\otimes s''=(s\otimes s'')+(s'\otimes s'')$, (vi) $(\alpha s)\otimes(\beta s')=(\alpha\beta)s\otimes s'$,

14) quand nous avons $f_\mu=f'_\mu+f''_\mu$, nous avons $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes f_\lambda=f'_\mu\otimes\prod_{\lambda\neq\mu}\otimes f_\lambda+f''_\mu\otimes\prod_{\lambda\neq\mu}\otimes f_\lambda$,

15) un nombre que nous appelons la norme de s et la désignons par $|s|$ correspond à chaque somme s et elle jouit des propriétés; (i) $|s|\geqq 0$ et $|s|=0$ entraine $s=0$, (ii) $|s+s'|\leqq|s|+|s'|$, (iii) $|s\otimes s'|=|s|\,|s'|$, (iv) $|\alpha s|=|\alpha|\,|s|$,

l'ensemble de toutes les sommes est un espace linéaire et normé. Nous désignons par $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$ celui obtenu en completant cet espace linéaire et l'appelons la produit kroneckerienne de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$.

2. Voici quelques exemples de la produit kroneckerienne des espaces linéaires.

(2.1) Etant donné un espace métrique compact R, nous désignons par $C(R)$ l'espace de toutes fonctions continues sur R dont la norme $|f|$ d'un élément $f=f(x)$ est donnée par la borne supérieure de $|f(x)|$ sur R. Alors, si nous définissons la produit $f_1 \otimes f_2$ des éléments $f_k = f_k(x_k)$ de $C(R_k)$ $(k=1,2)$, où R_k $(k=1,2)$ sont les espaces métriques compacts, par la fonction $f_1(x_1)f_2(x_2)$ définie sur $R_1 \times R_2$, nous avons $C(R_1) \times C(R_2) = C(R_1 \times R_2)$.

(2.2) Etant donné un ensemble Λ non-vide et une mesure $m(\Gamma)$ de M. C. Caratheodory définie sur quelques sous-ensembles de Λ telle qu'on ait $m(\Lambda)=1$, nous désignons par $L_p(\Lambda)$ l'espace de toutes fonctions sommables sur Λ dont la norme $|f|$ d'un élément $f=f(x)$ est donnée par $\left\{\int_\Lambda |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$, où $p \geqq 1$. Alors, si nous définissons la produit des éléments de $L_p(\Lambda_k)$ $(k=1,2)$ de même que le cas (2.1), nous avons $L_p(\Lambda_1) \otimes L_p(\Lambda_2) = L_p(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$.

(2.3) Etant donné un espace métrique compact R sur lequel une mesure $m(E)$ de M. C. Caratheodory est définie de manière que $m(R)=1$, nous considérons les espaces $C(R)$ et $L_p(R)$, où $p \geqq 1$. Alors, si nous définissons la prodnit $f \otimes g$ des éléments $f=f(x)$ de $C(R)$ et $g=g(y)$ de $L(R)$ par la fonction $f(x)g(y)$ définie sur $R \times R$ de manière que $|f \otimes g| = |f|\,|g|$, la produit kroneckerienne $C(R) \otimes L_p(R)$ est l'espace de toutes les fonctions sommables $f(x,y)$ définies sur $R \times R$ telle qu'on ait

$$(*) \qquad \underset{x \in R}{\text{borne sup.}} \left\{\int_R |f(x,y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

et que la norme de $f(x,y)$ soit définie par le nombre donné par (*).

(2.4) Etant donné l'espace l_p $(p \geqq 1)$, nous définissons la produit de deux l'éléments $f=(f_1, f_2, \ldots)$ et $g=(g_1, g_2, \ldots)$ de cet espace par l'élément $(f_1g_1, f_1g_2, f_2g_1, \ldots)$ du même espace, nous avons $l_p \otimes l_p = l_p$.

3. Maintenant, nous donnons un procédé général qui définit la produit kroneckerienne des espaces linéaires $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1,2,\ldots,n)$ normés et complets. Nous posons d'abord pour la produit $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes f_\lambda$ des éléments f_λ de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1,2,\ldots n)$ $|\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes f_\lambda| = \prod_{\lambda=1}^{n} |f_\lambda|$. Puis, etant donné un nombre positif $p \geqq 1$, nous définissons la norme d'une somme $s=\sum_{k=1}^{m} p_k$ des produits p_k $(k=1,2,\ldots,m)$ par la borne inférieure de $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{l} |q_k|^p}$ pour toute suite $(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ des produits telle qu'on ait $s=\sum_{k=1}^{l} q_k$. Alors, l'ensemble de ces sommes est un espace linéaire et normé, et nous obtenons la produit kroneckerienne $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ en completant celui-ci. Nous l'appelons la produit kroneckerienne (L_p) des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda=1,2,\ldots,n)$.

4. Puis, nous considérons la produit kroneckerienne infinie des espaces linéaires. Soient $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ les espaces linéaires, normés et complets. Nous définissons d'abord une famille[1]—nous l'appelons une famille projective des produits kroneckeriennes finies des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$—des produits kroneckeriennes du nombre fini de ces espaces qui jouit des propriétés :

1) quelque soit le sous-ensemble N fini et non vide de Λ, il existe précisément une produit $\prod_{\lambda \in N} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ parmi cette famille et nous la désignons par $\mathfrak{P}_N$,

2) pour une suite finie $\{N_k\}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ des sous-ensembles finis, non vides et disjoints de Λ, $s_k \in \prod_{\lambda \in N_k} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ $(k=1, 2, \dots, n)$ entrainent

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \otimes s_k \right| = \prod_{k=1}^{n} |s_k| .$$

D'ailleurs, nous entendrons par une suite convergente (N) des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ un ensemble $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, qui satisfait à la condition : nous pouvons choisir un nombre positif ρ de facon que, quelque soit le nombre positif ε, il existe un sous-ensemble fini N_0 de Λ tel qu'on ait $|\rho - \prod_{\lambda \in N} |f_\lambda|| < \varepsilon$ pour tout sous-ensemble fini N de Λ qui contient N_0. De plus, nous appelons le nombre ρ la norme de celle-ci.

(4.1) Quand un ensemble $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, est une suite convergente (N), tout ensemble obtenu en remplaçant le nombre fini des éléments de $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ par ceux contenus dans les mêmes espaces est aussi convergente (N).

(4.2) Quand un ensemble $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, contient au moins un élément 0 de quelque espace $\mathfrak{B}_\mu$, il est convergente (N).

(4.3) Quand un ensemble $\{f_\lambda\}$ $(f_\lambda \in \Lambda)$, où $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, est convergente (N) et une produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ est convergente[2], l'ensemble $\{a_\lambda f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ est aussi convergente (N).

5. Or, pour une suite convergente (N) $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, nous entendrons par la produit convergente (N) des éléments f_λ de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ la formule $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ qui remplit les conditions :

1) pour tout suite convergente (N), il existe toujours la produit de ces éléments,

2) $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ est déterminée univoquement par f_λ $(\lambda \in \Lambda)$,

3) quand $\{k_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ est une permutation de $\{\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, nous avons $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_{k_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$,

4) quand Λ est une somme des ensembles non vides et disjoints Λ_k $(k=1, 2, \dots, n)$, nous avons $\prod_{k=1}^{n} \otimes \{ \prod_{\lambda \in \Lambda_k} \otimes f_\lambda \} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$,

5) pour un nombre a et une produit $p = \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$, ap désigne une

---

1) Nous devons cette notion à MM. P. Alexandroff et H. Freudenthal. Voir P. Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, Ann. Math., **30** (1929) et H. Freudenthal, Entwicklungen von Raümen und ihren Gruppen, Comp. Math., **4** (1937).

2) Pour la convergence d'une produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$, voir J. v. Neumann, loc. cit., p. 15.

produit $(af_\mu)\otimes \prod_{\lambda\neq\mu}\otimes f_\lambda$ et nous l'appelons la produit de a et p; (i) pour tout a et toute produit p, il existe toujours la produit ap, (ii) ap est déterminée univoquement par a et p, (iii) $a(\beta p)=(a\beta)p$, (iv) quand une produit $\prod_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ est convergente[1], nous avons $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes(a_\lambda f_\lambda)=(\prod_{\lambda\in\Lambda} a)p$,

6) nous appelons la norme d'une suite convergente (N) $\{f_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ celle de la produit $\prod_{\lambda-\Lambda}\otimes f_\lambda$ et la désignons par $|\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f_\lambda|$; (i) $|p|\geqq 0$, (ii) $|\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f_\lambda|=\prod_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda|$, (iii) $|ap|=|a||p|$.

6. Puis, nous introduissons la notion de l'équivalence sur les produits. Quand deux produits $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f$ et $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes g_\lambda$ satisfont à la condition: quelque soit le nombre positif ε, il existe un sous-ensemble fini N_0 de Λ tel que $N\subseteqq\Lambda-N_0$ entraine $|\prod_{\lambda\in N}\otimes f_\lambda-\prod_{\lambda\in N}\otimes g_\lambda|<\varepsilon$ dans la produit kroneckerienne $\mathfrak{P}_N$ appartenue à la famille projective donnée, nous dirons quelles sont équivalentes l'une l'autre et nous désignons par $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f_\lambda\sim\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes g_\lambda$ cette relation.

(6.1) La relation de l'équivalence sur les produits est symétrique, reflexive et transitive.

D'où, nous pouvons classifier toutes les produits en les classes de manière que deux produits contenues dans une même classe sont équivalentes l'une l'autre et celles contenues dans les classes différentes ne sont pas équivalentes l'une l'autre. Nous appelons les classes ainsi obtenues celles de l'équivalence et nous désignons par Γ l'ensemble de celles.

Remarque. La définition de l'équivalence donnée ici est une généralisation de celle de M. J. v. Neumann[2].

7. Etant donnée une classe $\mathfrak{C}$ de l'équivalence, nous considérons les sommes formelles $s=\sum_{k=1}^{n}p_k$ d'un nombre fini des produits p_k $(k=1,2,\dots,n)$ appartenues à $\mathfrak{C}$. Alors, elles satisfont aux conditions:

7) quelleque soient les produits p_k $(k=1,2,\dots,n)$ de $\mathfrak{C}$, il existe toujours la somme $\sum_{k=1}^{n}p_k$,

8) la somme $\sum_{k=1}^{n}p_k$ est determinée univoquement par les produits p_k $(k=1,2,\dots,n)$,

9)—12) données dans **1**,

13) quand Λ est une somme des ensembles Λ_k $(k=1,2,\dots,n)$ non-vides et disjoints, nous prenons les sommes $s_k=\sum_{j=1}^{l_k}p_{kj}$ $(k=1,2,\dots,n)$ des produits $p_{kj}=\prod_{\lambda\in\Lambda_k}\otimes f_{kj\lambda}$ $(j=1,2,\dots,l_k$ et $k=1,2.\dots,n)$, où $\prod_{\lambda\in\Lambda_k}\otimes f_{kj\lambda}$ est la produit des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda_k)$ appartenus à quelqu'une des produits de $\mathfrak{C}$, et nous désignons par $\prod_{k=1}^{n}\otimes s_k=s_1\otimes s_2\otimes\cdots\otimes s_n$ la

1) Pour la convergence d'une produit $\prod_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, voir J. v. Neumann, loc. cit., p. 15.

2) J. v. Neumann, loc. cit., p. 22.

sommes $\sum_{j_1=1}^{l_1}\sum_{j_2=1}^{l_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{l_n} p_{1j_1}\otimes p_{2j_2}\otimes\cdots\otimes p_{nj_n}$; (i) quand les sommes s_k $(k=1,2,\dots,n)$ satiafont aux conditions données ici, il existe toujours la produit $\prod_{k=1}^{n}\otimes\cdot s_k$, (ii) $\prod_{k=1}^{n}\otimes s_k$ est déterminée univoquement par s_k $(k=1,2,\dots,n)$, (iii) $\prod_{j=1}^{n}\otimes s_{k_j}=\prod_{k=1}^{n}\otimes s_k$, où $(k_1,k_2,\dots k_n)$ désigne une permutation de $(1,2,\dots,n)$, (iv) quand s_k $(k=1,2,\dots,n)$ sont en soi les produits $\prod_{j=1}^{l_k}\otimes s_{kj}$ $(k=1,2,\dots,n)$, nous avons $\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{l_k}\otimes s_{kj}=\prod_{k=1}^{n}\otimes s_k$,

14) quand nous avons $f_\mu=f'_\mu+f''_\mu$ pour un indice μ de Λ, nous avons $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f=f'_\mu\otimes\prod_{\lambda\neq\mu}\otimes f_\lambda+f''_\mu\otimes\prod_{\lambda\neq\mu}\otimes f_\lambda$.

8. Or, nous pouvons donner la notion de la norme sur ces sommes. D'abord, en prenant une produit $p=\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes f_\lambda$ de $\mathfrak{C}$, nous considérons une somme $s=\sum_{k=1}^{n}p_k$ telle que toute produit p_k soit obtenue en remplacant le nombre fini des éléments de $\{f_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ par ceux contenus dans les mêmes espaces. Il existe alors un sous-ensemble fini N de Λ tel que toute produit p_k $(k=1,2,\dots,n)$ peut être écrit sous la forme

$$p_k=h_k\otimes\prod_{\lambda\bar{\in}N}\otimes f_\lambda\,,$$

où h_k $(k=1,2,\dots,n)$ sont les éléments de $\mathfrak{P}_N$ de donc, nous avons $s=(\sum_{k=1}^{n}h_k)\otimes\prod_{\lambda\bar{\in}N}\otimes f_\lambda$. Or, comme la somme $\sum_{k=1}^{n}h_k$ appartient encore à $\mathfrak{P}_N$, nous posons en se servant la norme de cette somme dans $\mathfrak{P}_N$

$$|s|=|\sum_{k=1}^{n}h_k|\prod_{\lambda\bar{\in}N}|f_\lambda|\,.$$

Alors, l'ensemble de toutes les telles sommes est un espace linéaire et normé et d'où nous obtenons un espace linéaire $\mathfrak{P}$ normé et complet en completant celui-ci. Or, étant donnée une somme $p'=\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes g_\lambda$ de $\mathfrak{C}$, quand nous posons $h_N=\prod_{\lambda\in N}\otimes g_\lambda\otimes\prod_{\lambda\bar{\in}N}\otimes f_\lambda$, où N désigne un sous-ensemble fini de Λ, les produits h_N $(N\subseteqq\Lambda)$ appartiennent à $\mathfrak{C}$ et

$$\begin{aligned}|h_N-h_{N'}|&\leqq|h_N-h_{N\cup N'}|+|h_{N\cup N'}-h_{N'}|\\&=\prod_{\lambda\in N}|g_\lambda|\prod_{\lambda\bar{\in}N\cup N'}|f_\lambda|\,|\prod_{\lambda\in M}\otimes f_\lambda-\prod_{\lambda\in M}\otimes g_\lambda|\\&\quad+\prod_{\lambda\in N'}|g_\lambda|\prod_{\lambda\bar{\in}N\cup N'}|f_\lambda|\,|\prod_{\lambda\in M'}\otimes f_\lambda-\prod_{\lambda\in M'}\otimes g_\lambda|\,,\end{aligned}$$

où $M=N\cup N'-N$ et $M'=N\cup N'-N'$. Par consequent, étant donné un nombre positif ε, si nous prenons un sous-ensemble fini N_0 de Λ de manière que $N\subseteqq\Lambda-N_0$ entraine $|\prod_{\lambda\in N}\otimes g_\lambda-\prod_{\lambda\in N}\otimes f_\lambda|<\varepsilon$, nous avons pour le nombre positif $C=\text{borné sup.}_N\{\prod_{\lambda\in N}|f_\lambda|,\ \prod_{\lambda\in N}|g_\lambda|\}$ et $N_0\subseteqq N,N'$

$$|h_N-h_{N'}|<2C^2\varepsilon\,,$$

et donc la suite directe $\{h_N\}$ $(N\subseteqq\Lambda)$ converge vers un élément de $\mathfrak{P}$.

D'où, nous identifions cette limite à la produit $p' = \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes g_\lambda$, et en général une somme $s = \sum_{k=1}^{n} p_k$ des produits de $\mathfrak{C}$ à la somme des éléments identifiés à p_k. Nous avons défini l'espace $\mathfrak{P}$ en se servant la produit $p = \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$, mais il est independent du choix de la produit p dans $\mathfrak{C}$, d'où nous l'appelons la produit kroneckerienne $\mathfrak{C}$-adique et le désignons par $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{\mathfrak{C}} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$.

(8.1) L'ensemble de toutes les sommes des produits obetenues en remplaçant le nombre fini des éléments d'une produit donnée de $\mathfrak{C}$ est partout dense dans la produit kroneckerienne $\mathfrak{C}$-adique $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{\mathfrak{C}} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$.

9. Maintenant, nous introduissons la mesure $m(\Delta)$ pour les sous-ensembles de Γ telle qu'on ait $m\big((\mathfrak{C})\big) = 1$ pour chaque élément $\mathfrak{C}$ de Γ et nous définissons la somme directe (L_p) des espaces $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{\mathfrak{C}} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ $(\mathfrak{C} \in \Gamma)$, où p est un nombre $\geqq 1$, c'est ce que nous appelons la produit kroneckerienne infinie de l'ordre p de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ et nous le désignons par $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$. Il est evident que nous avons les diverses produite kroneckerienne infinie de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ suivant le choix de l'order p et la famille projective.

Encore, quand la famille de toutes produits kroneckeriennes (L_p) du nombre fini des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ est projective, nous pouvons définir par cette famille la produit kroneckerienne infinie de l'ordre p de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. Nous l'appelons la produit kroneckerienne infinie (L_p) des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$.

10. Puis, nous considérons les fonctionnelles linéaires définies sur la produit kroneckerienne des espaces linéaires. Nous définissons d'abord la produit des fonctionnelles des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$. Etant données les fonctionnelles linéaries et bornées φ_λ des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, nous entendrons par leur produit $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda$ celle numérique de φ_λ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$ et nous posons pour une somme $s = \sum_{\mu=1}^{m} \prod_{\lambda=1}^{n} \otimes f_{\lambda\mu}$ de $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$

$$(s, \prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda) = \sum_{\mu=1}^{m} \prod_{\lambda=1}^{n} (f_{\lambda\mu}, \varphi_\lambda)$$

et enfin, nous prolongeons continuellement la produit $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda$ sur tous les éléments de $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$, c'est la fonctionnelle linéaire définie par la produit $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda$ et nous la désignons par $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda$ en soi. Or, pour que la norme de la produit $\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda$ est $\prod_{\lambda=1}^{n} |\varphi_\lambda|$, il faut qu'elle satisfait à la condition

1) M. Kondô, Sur les sommes directes des espaces linéaires, Proc. **20** (1944).

2) $\mathfrak{B}^*$ désigne l'espace conjugué de $\mathfrak{B}$.

$$(*) \qquad |(s, \prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \varphi_\lambda)| \leqq |s| \prod_{\lambda=1}^{n} |\varphi_\lambda|$$

pour toute somme s. Nous avons alors

(10.1) Quand la produit kroneckerienne $\prod\limits_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ satisfait à la condition (*), nous avons

$$(\prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda)^* = \prod_{\lambda=1}^{n} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^* .$$

11. Etant donné un ensemble $\{\mathfrak{R}_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ des espaces linéaires, normés et complets, nous supposons qu'il existe la produit kroneckerienne infinie et que chaque espaces de sa famille projective $\{\mathfrak{P}_N\}$ $(N \leqq \Lambda)$ satisfait à la condition (*). Alors, la famille des espaces conjugués $\mathfrak{B}_\lambda^*$ $(\lambda \in \Lambda)$ est aussi projective et donc nous pouvons définir la produit kroneckerienne infinie de l'ordre p des espaces conjugués $\mathfrak{B}_\lambda^*$ $(\lambda \in \Lambda)$. Or, pour voir les propriétés fonctionnelles des éléments de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$, nous introduissons ici la notion de l'accordabilité. Pour une produit $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et celle $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$, si la produit $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (f_\lambda, \varphi_\lambda)$ est convergent, nous dirons que $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ et $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$ sont accordées l'une l'autre et désignons ce fait par $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda \wedge \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$

(11.1) Pour deux produits $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ et $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes g_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et celles $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$ et $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \psi_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$, les relations $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda \sim \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes g_\lambda$, $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda \sim \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \psi_\lambda$ et $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda \wedge \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$ entrainent encore $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes g_\lambda \wedge \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \psi_\lambda$.

D'où, pour une classe $\mathfrak{C}$ de Γ et celle $\mathfrak{C}^*$ de Γ^*, quand une produit de $\mathfrak{C}$ et celle de $\mathfrak{C}^*$ sont accordées d'une l'autre, chaque produit de $\mathfrak{C}$ et chaque produit de $\mathfrak{C}^*$ sont aussi accordées et donc nous désignons ce fait par $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}^*$.

Or, pour une produit $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et celle $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda$ de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$, nous posons

$$\begin{aligned}(\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda, \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda) &= \prod_{\lambda \in \Lambda} (f_\lambda, \varphi_\lambda) \quad \text{si on a } \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda \wedge \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda , \\ &= 0 \qquad\qquad \text{si on n'a pas } \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda \wedge \prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \varphi_\lambda ,\end{aligned}$$

et en général pour une some $s = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda\mu}$ et $\varphi = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \prod\limits_{\lambda \ni \Lambda} \varphi_{\lambda\nu}$, nous posons

$$(s, \varphi) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{\lambda \in \Lambda} (f_{\lambda\mu}, \varphi_{\lambda\nu}) .$$

Alors, (Δ, φ) est une fonctionnelle linéaire définie sur les sommes de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et par suite nous pouvons la prolonger continuellement sur $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ tout entier. D'alleurs, pour chaque élément u de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$, (u, φ), où φ est une somme de $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$, est une fonctionnelle définie sur les sommes de $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*$, et donc nous pouvons la prolonger continuellement sur $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*$ tout entier. D'où, quand nous désignons par $(u.\varphi)$ la valeur de cette fonctionnelle à l'élément φ de $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*$, nous avons les suivants :

(i) $|(u,\varphi)|\leqq|u||\varphi|$,

(ii) $(\alpha u+\beta v,\varphi)=\alpha(u,\varphi)+\beta(v,\varphi)$,

(iii) $(u,\alpha\varphi+\beta\varphi)=\alpha(u,\varphi)+\beta(u,\psi)$,

c'est-à-dire, (u,φ) est une fonctionnelle linéaire et bornée sur $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*$ et en même temps celle sur $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$. Nous entendrons par φ la fonctionnelle (u,φ) définie sur $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$.

(11.2) Quand $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$ est une produit kroneckerienne infinie de l'ordre 1 des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ par rapport à la famille projective $\{\mathfrak{P}_N\}$ $(N\subseteqq\Lambda)$, la produit kroneckerienne infinie de l'ordre 1 des espaces conjugués $\mathfrak{B}_\lambda^*$ $(\lambda\in\Lambda)$ par rapport à la famille projective $\{\mathfrak{P}_N^*\}$ $(N\subseteqq\Lambda)$ est l'espace conjugué de $\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$, c'est-à-dire,

$$(\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda)^*=\prod_{\lambda\in\Lambda}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*.$$

(11.3) Etant donné une classe $\mathfrak{C}$ de l'équivalence de Γ, quand nous désignons par Δ l'ensemble de toutes les classes $\mathfrak{C}^*$ de Γ^* telles qu'on ait $\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{C}^*$, nous avons

$$(\prod_{\lambda\in\Lambda}^{\mathfrak{C}}\otimes\mathfrak{B}_\lambda)^*=\sum_{\mathfrak{C}^*\in\Delta}{}_{L_1}\otimes\prod_{\lambda\in\Lambda}^{\mathfrak{C}^*}\otimes\mathfrak{B}_\lambda^*.$$

Remarque. Dans (11.2) et (11.3), nous ne pouvons remplacer l'ordre de la produit kroneckerienne infinie par le nombre p tel qu'on ait $p>1$ en général.

12. Puis, nous considérons la produit kroneckerienne des opérateurs linéaires. Etant donnés les espaces linéaires $\mathfrak{R}_\lambda$ $(\lambda=1,2,\dots,n)$ normés et complets, et les opérateurs A_λ $(\lambda=1,2,\dots,n)$ de R $(\mathfrak{B}_\lambda)$, nous entendrons par la produit $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes A_\lambda$ de ces opérateurs celui défini sur les somme $s=\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes f_{\lambda\mu}$ de $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$ par

$$(\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes A_\lambda)s=\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{n}(A_\lambda f_{\lambda\mu}),$$

et puis prolonge continuellement sur $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes\mathfrak{B}_\lambda$ tout entier. Or, pour que la norme de $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes A_\lambda$ est $\prod_{\lambda=1}^{n}|A_\lambda|$, il faut qu'elle satisfait à la condition :

(**) $$|(\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes A_\lambda)s|\leqq\prod_{\lambda=1}^{n}|A_\lambda||s|$$

---

1) M. Kondô, Les anneaux des opérateurs et les dimensions, Proc. **20** (1944).

pour toute somme s. Alors, une somme $s=\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes A_{\lambda\mu}$ est aussi un opérateur linéaire et borné sur $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et donc nous pouvons considérer chaque élément de la produit kroneckerienne $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ de $R(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(\lambda=1, 2, \dots, n)$ comme l'opératur linéaire et borné sur $\prod_{\lambda=1}^{n}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$.

13. Etant donné un ensemble $\{\mathfrak{B}_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ des espaces linéaires, normés et complets, nous supposons qu'il existe la produit kroneckerienne infinie de l'ordre p de ces espaces et que chaque espaces de sa famille projective $\{\mathfrak{P}_N\}$ $(N \leqq \Lambda)$ satisfait à la condition (**). Alors, la famille des produits kroneckerienne $\prod_{\lambda \in N}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(N \leqq \Lambda)$ est aussi projective et donc nous pouvons définir la produit kroneckerienne infinie de l'ordre p de $R(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Or, pour une produit $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes f_\lambda$ de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et celle $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_\lambda$ de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$, nous posons

$$\Big(\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_\lambda\Big)\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes f_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes (A_\lambda f_\lambda)\,.$$

Alors, $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes (A_\lambda f_\lambda)$ est aussi convergente (N) et d'où quand nous posons pour une somme $s=\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes f_{\lambda\mu}$ de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$

$$\Big(\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_\lambda\Big)\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes f_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes (A_\lambda f_{\lambda\mu})\,,$$

la produit $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_\lambda$ est d'après la condition (**) un opérateur linéaire et borné sur l'ensemble des sommes de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$. Donc, nous pouvons le prolonger continuellement sur $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ tout entier. L'opérateur ainsi obtenu est linéaire et de la norme $\prod_{\lambda \in \Lambda}|A_\lambda|$ et c'est celui donné par la produit $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_\lambda$. Puis, pour un élément u de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et une somme $S=\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_{\lambda\mu}$ de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$, nous posons

$$Su=\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes A_{\lambda\mu}\Big)u\,.$$

Nous avons alors $|Su| \leqq |S|\,|u|$ pour tout élément u de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et donc nous pouvons envisager tout élément u de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ comme un opérateur défini sur l'ensemble de toutes sommes de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ dont le contre-domaine est contenu dans $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$. Par suite, nous pouvons prolonger chaque élément u de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$ comme un opérateur sur $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ tout entier de maniere que nous avons $|Uu| \leqq |U|\,|u|$ pour tout élément U de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$. D'où, nous pouvons considérer chaque élément U de $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ comme un opérateur linéaire et borné sur $\prod_{\lambda \in \Lambda}\otimes \mathfrak{B}_\lambda$.

(13.1) Quand les produits $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ et $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ sont en même temps de l'ordre 1, la norme d'un élément de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ est aussi celle de celui comme un opérateur de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$.

Remarque. De même que le cas des fonctionnelles, nous ne pouvons remplacer en général l'ordre 1 par celui p $(p > 1)$ dans (13.1).

(13.2) Chaque produit kroneckerienne $\mathfrak{C}$-adique $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{\mathfrak{C}} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ est transformée par une produit U de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ en quelque produit kroneckerienne $\mathfrak{C}^*$-adique et la classe $\mathfrak{C}^*$ est déterminée complètement par $\mathfrak{C}$ et la classe de l'équivalence qui contient U.

(13.3) Pour un opérateur A_μ d'un anneau des opérateurs $R(\mathfrak{B}_\mu)$ donné, nous désignons par $\bar{A}_\mu$ l'opérateur linéaire et borné sur $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$ tel qu'on ait $\bar{A}_\mu(\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda) = (A_\mu f_\mu) \otimes \prod_{\lambda \neq \mu} \otimes f_\lambda$ pour toute produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes f_\lambda$ de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$. Il est déterminé univoquement pour A_μ et l'anneau $\overline{R(\mathfrak{B}_\mu)}$ déterminé par tous les opérateurs $\bar{A}_\mu$ $\big(A_\mu \in R(\mathfrak{B}_\mu)\big)$ est isomorphique topologiquement à $R(\mathfrak{B}_\mu)$. De plus, les deux anneaux $\overline{R(\mathfrak{B}_\lambda)}$ et $\overline{R(\mathfrak{B}_\mu)}$ $(\lambda \neq \mu)$ sont commutatifs l'un l'autre, et l'anneau déterminé par tous les anneaux $\overline{R(\mathfrak{B}_\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda)$ est la produit kroneckerienne $\mathfrak{C}_0$-adique de $R(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $\mathfrak{C}_0$ désigne la classe de l'équivalence qui contient l'opérateur identique de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes \mathfrak{B}_\lambda$, c'est-à-dire, $\overline{\{\overline{R(\mathfrak{B}_\lambda)}\}}$ $(\lambda \in \Lambda)$ est la factorisation de $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{\mathfrak{C}_0} \otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$[1].

Remarque. Nous pouvons donner la propriété caractéristique de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \otimes R(\mathfrak{B}_\lambda)$ de même que M. J. v. Neumann l'a donné dans son mémoire[2].

14. Nous avons les divers exemples des produits kroneckeriennes infinies des espaces linéaires, p. e., celles des espaces (C), ceux (L_p), ceux (l_p), etc., et les conditions (*) et (**) sont remplies dans ces produits.

1) J. v. Neumann et F. J. Murray, On rings of operators, Ann. Math., **37** (1936).
2) J. v. Neumann, loc. cit. (1).