146. Sur la Famille Monotone d'Ensembles Développables

Par Tosiyuki TUGUÉ
Université Métropolitaine, Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Dans la note[1] publiée récemment par M. Z. Okuyama et moi, nous avons donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille monotone[2] $\mathfrak{F}$ d'ensembles sommes de m ensembles F_ρ présente un type linéaire.[3] Le but de cette note est de donner celle-là pour le cas où $\mathfrak{F}$ est, plus généralement, une famille monotone d'ensembles développables.

1. Nous commençons par quelques définitions. Soit E un ensemble conténu dans l'espace euclidien U_r à r dimensions. Nous définissons les ensembles $R_\alpha(E)$ pour tout nombre ordinal α $(\alpha<\Omega)$ comme il suit:

$$R_0(E)=E, \tag{1.1}$$

$$R_\alpha(E)=\overline{R_{\alpha-1}(E)}-R_{\alpha-1}(E) \qquad \text{pour } \alpha \text{ isolé,} \tag{1.2}$$

$$=\bigcap_{\xi\in\Lambda(\alpha)} R_\xi(E) \qquad \text{pour } \alpha \text{ limite,}$$

où $\Lambda(\alpha)$ est l'ensemble de tous nombres qui sont pairs et $<\alpha$.

Comme on sait bien, *si E est développable, il existe un nombre β tel qu'on ait $R_\beta(E)=0$ et $R_\alpha(E)\neq 0$ pour $\alpha<\beta$,* et alors, *E peut être développé univoquement en une série d'ensembles fermés décroissants:*

$$E=\overline{E}-\overline{\overline{E}-E}+\overline{\overline{\overline{E}-E}-(\overline{E}-E)}-\cdots+\overline{R_\alpha(E)}-\overline{R_{\alpha+1}(E)}+\cdots .^{4)}$$

Nous désignerons par $i(E)$ tel nombre β pour un ensemble E développable.

2. Soit $\mathfrak{F}$ une famille monotone d'ensembles développables. Maintenant, nous formons $[\mathfrak{F}]=\text{Ens.}\{\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\,|\,E\in\mathfrak{F},\ \alpha\leqq i(E)\}$ de sous-familles de $\mathfrak{F}$ de la façon suivante: quelque soit un ensemble E de $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F}_E^{(1)}=\text{Ens.}\{X\,|\,X\in\mathfrak{F},\ \overline{X}=\overline{E}\}, \tag{2.1}$$

---

1) T. Tugué et Z. Okuyama: *Sur le type d'ordination de famille monotone d'ensembles*, Proc. Japan Acad., **30** (1954).

2) Nous disons que $\mathfrak{F}$ est *monotone* si $\mathfrak{F}$ est une famille d'ensembles tels que, de deux quelconques d'entre eux, l'un contient l'autre et est ordonnée de façon que l'ordination $E_1<E_2$ soit simultanée à la relation d'inclusion $E_1\supset E_2$. Voir T. Tugué et Z. Okuyama, loc. cit.

3) Voir A. Denjoy: *L'énumération transfinie*, Livre I (1946); T. Tugué et Z. Okuyama, loc. cit.

4) Cf. C. Kuratowski: Topologie, **1**, 64.

$$(2.2)\qquad \mathfrak{F}_E^{(\alpha)}=\text{Ens.}\{X\,|\,X\in\mathfrak{F}_E^{(\alpha-1)},\ \overline{R_{\alpha-1}(X)}=\overline{R_{\alpha-1}(E)}\ \text{pour } \alpha \text{ isolé},$$
$$=\bigcap_{\xi<\alpha}\mathfrak{F}_E^{(\xi)}\qquad \text{pour } \alpha \text{ limite}.$$

Nous avons alors le

Lemme 1. *Pour deux éléments* $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}$ *et* $\mathfrak{F}_{E'}^{(\alpha')}$ *quelconques de* $[\mathfrak{F}]$,

1) *si* $\alpha=\alpha'$, *on a* $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\cap\mathfrak{F}_{E'}^{(\alpha')}=0$ *ou bien* $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}=\mathfrak{F}_{E'}^{(\alpha')}$,

2) *si* $\alpha<\alpha'$, *on a* $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\cap\mathfrak{F}_{E'}^{(\alpha')}=0$ *ou bien* $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\supseteqq\mathfrak{F}_{E'}^{(\alpha')}$.

Puis, désignons par $\mathfrak{G}$ la famille de $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}$ tels qu'on ait $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\in[\mathfrak{F}]$ et $|\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}|>1$.[5] Nous appelons une sous-famille de $\mathfrak{G}$ telle que, de ses deux éléments quelconques, l'un contient l'autre, une *suite* de $\mathfrak{G}$.

Il est bien su que *chaque famille monotone et bien ordonnée d'ensembles développables est au plus dénombrable.* Or, ce fait implique le

Lemme 2. *Chaque suite de* $\mathfrak{G}$ *est au plus dénombrable.*

3. Maintenant, nous faisons correspondre à chaque ensemble E de $\mathfrak{F}$ un nombre ordinal $\gamma(E)$ comme il suit:

(3.1) $\gamma(E)=0$ lorsque $\mathfrak{F}_E^{(1)}\bar{\in}\mathfrak{G}$,

(3.2) $\gamma(E)=$la borne supérieure de nombres ordinaux α tels qu'on ait $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\in\mathfrak{G}$, lorsque $\mathfrak{F}_E^{(1)}\in\mathfrak{G}$.

D'après les lemmes 1 et 2, nous avons le

Lemme 3. *Si la famille* $\mathfrak{F}$ *présente un type linéaire, il existe un nombre ordinal* $\lambda(<\Omega)$ *tel qu'on ait* $\gamma(E)\leqq\lambda$ *que'que soit* E *de* $\mathfrak{F}$.

D'ailleurs, d'après le lemme 1, nous avons le

Lemme 4. *Si la famille* $\mathfrak{F}$ *présente un type linéaire, pour chaque nombre* ξ, Ens.$\{\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\,|\,\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\in\mathfrak{G},\ \alpha=\xi\}$ *est au plus dénombrable.*

Par conséquent, en unissant les lemmes 3 et 4, nous avons le suivant:

Si une famille monotone $\mathfrak{F}$ *d'ensembles développables présente un type linéaire, la famille* $\mathfrak{G}$ *est au plus dénombrable.*

4. Ensuite, nous supposons que $\mathfrak{G}$ soit au plus dénombrable. Maintenant, nous les énumérons et soient:

$$(4.1)\qquad \mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2,\dots,\mathfrak{F}_n,\dots\ .$$

Ici, nous posons $\xi(n)=\alpha$ lorsque $\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}=\mathfrak{F}_n$.

Pour un ensemble E de $\mathfrak{F}$ et une famille $\mathfrak{F}_n$ de (4.1), si E n'appartient pas à $\mathfrak{F}_n$, on a: ou bien $F\supset E$ pour tout F de $\mathfrak{F}_n$, ou bien $E\supset F$ pour tout F de F_n. Donc, pour tout E de F, définissons deux ensembles $\sigma(E)$, $\tau(E)$ de nombres naturels comme il suit:

$$(4.2)\qquad \sigma(E)=\text{Ens.}\{n\,|\,(\forall F)(F\in\mathfrak{F}_n\rightarrow F\supset E)\},$$
$$(4.3)\qquad \tau(E)=\text{Ens.}\{n\,|\,E\in\mathfrak{F}_n\}.$$

Prenons deux ensembles E_1, E_2 quelconques de $\mathfrak{F}$ et admettons que $E_1\supset E_2$. Nous voyons sans peine:

5) Désignons par $|X|$ la puissance de X.

(4.5) $$\sigma(E_1) \subseteqq \sigma(E_2),$$

(4.6) $$\tau(E_1) - \tau(E_2) \subseteqq \sigma(E_2),$$

et

(4.7) *si l'on a* $\tau(E_1) \neq 0$ *et* $\tau(E_1) \subseteqq \tau(E_2)$, *il existe le plus grand nombre ordinal parmi* $\xi(n)$ *tels que* $n \in \tau(E_1)$.

Puis, soit $f(X)$ une fonction définie pour tout ensemble fermé X conténu dans U_r, dont la valeur est un nombre réel d'intervalle $[0, 1]$ et telle que $X_1 \supset X_2$ implique $f(X_1) < f(X_2)$.[6] Nous posons

$$f^*_\alpha(E) = f(\overline{R_\alpha(E)}) \qquad \text{lorsque } \alpha \text{ est pair,}$$
$$= 1 - f(\overline{R_\alpha(E)}) \qquad \text{lorsque } \alpha \text{ est impair.}$$

Pour tout E de $\mathfrak{F}$, nous définissons une fonction $\varphi(E)$ comme il suit:

(4.8) $$\varphi(E) = \frac{1}{2} f(\overline{E}) + \sum_{n \in \sigma(E)} \frac{1}{3^n} + \sum_{n \in \tau(E)} \frac{1}{3^n} \cdot f^*_{\xi(n)}(E).$$

D'après les définitions et (4.5)$\sim$(4.7), on peut voir sans peine que $\varphi(E)$ est biunivoque, et puis, que $E_1 \supset E_2$ implique $\varphi(E_1) < \varphi(E_2)$. Alors, $\varphi(E)$ réalise une application conforme entre $\mathfrak{F}$ et un ensemble linéaire.

Ainsi, nous avons le

Théorème. *Etant donnée une famille monotone* $\mathfrak{F}$ *d'ensembles dévéloppables, pour que* $\mathfrak{F}$ *présente un type linéaire, il faut et il suffit que* $\mathfrak{S}$ *soit au plus dénombrable.*

6) Pour une telle fonction, voir T. Tugué et Z. Okuyama, loc. cit.