197. Des Groupes Linéaires Irréductibles et la Géométrie Différentielle

Par Shôshichi KOBAYASHI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Dec. 13, 1954)

1. *Notations.* Soit G un groupe de Lie connexe opérant transitivement et effectivement sur une variété V, H le groupe d'isotropie en un point p de V et H^0 sa composante connexe de l'identité. Soit $\tilde{H}$ le groupe d'isotropie linéaire en p. ($\tilde{H}$ peut être considéré comme une representation linéaire de H. Cette représentation est biunivoque, s'il existe sur V une connexion affine invariante par G.) Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et de H respectivement.

Théorème 1. *Si $\tilde{H}$ est irréductible et si $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ dans le sens de Koszul* [2], *alors le normalisateur connexe $N(H^0)$ de H^0 dans G coïncide avec $H^0: N(H^0)=H^0$.*

Démonstration. Le sous-ensemble $N(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ défini par

$$N(\mathfrak{h})=\{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}]\subset \mathfrak{h}\}$$

est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui engendre $N(H^0)$. Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{h}\frown\mathfrak{m}=0, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]\subset \mathfrak{m}.$$

Si l'on définit un sous-espace $\mathfrak{n}$ par

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\frown N(\mathfrak{h}),$$

on a

$$N(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}, \qquad \mathfrak{h}\frown\mathfrak{n}=0, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]\subset \mathfrak{n}\cap\mathfrak{h}=0.$$

Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{m}$ tel que:

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{t}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{t}]\subset\mathfrak{t}.$$

D'autre part, à cause de l'irréductibilité de $\tilde{H}$, on a

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]=\mathfrak{m}.$$

Donc $\mathfrak{n}=0$, c.q.f.d.

Théorème 2. *Si $\tilde{H}$ est irréductible et si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont réductives dans $\mathfrak{g}$, alors G est semi-simple.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ se décomposent de la manière suivante:

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]+\mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\frown\mathfrak{c}=0$$

$$\mathfrak{h}=[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]+\mathfrak{d}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\frown\mathfrak{d}=0.$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ sont semi-simples et $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$ sont les centres de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{h}$ respectivement. Nous allons d'abord démontrer que $\mathfrak{d}\subset[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Soit d un élément de $\mathfrak{d}$ différent de zéro. (S'il n'y en a pas, on n'a rien à démontrer.) On décompose $d: d=x'+c$, où $x' \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $c \in \mathfrak{c}$. Evidemment, $[\mathfrak{h}, x']=[\mathfrak{h}, d]=0$. Donc $x' \in N(\mathfrak{h})$, puis $x' \in \mathfrak{h}$ par le théorème 1. Enfin on a $c=d-x' \in \mathfrak{h}$. Puisque G est effective sur V, $c=0$, et $d=x' \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Considérons la décomposition suivante:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{h} \frown \mathfrak{m}=0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

Immédiatement on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \frown [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'autre part l'irréductibilité de $\tilde{H}$ entraîne que a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]=\mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{m} \frown [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]=\mathfrak{m}$. On a déjà vu que $\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ Enfin $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Corollaire 1. *Si G est compact et si $\tilde{H}$ est irréductible, alors G est semi-simple.*

2. Par la méthode que l'on a utilisée pour démontrer le théorème 1, on peut établir le lemme suivant.

Lemme. *Soit H un sous-groupe connexe, fermé et irréductible du groupe orthogonal $o(n)$. Si n est impair, le normalisateur connexe $N(H)$ de H dans $o(n)$ est égal à H. Si n est pair, posons $n=2m$, alors deux cas sont possibles: ou bien (1) H peut être considéré comme un sous-groupe du groupe unitaire de déterminant 1: $SU(m)$, ou bien (2) $N(H)$ est égal à H.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $N(\mathfrak{h})$ les algèbres de Lie de $o(n)$, de H et de $N(H)$ respectivement. Par la même méthode, que dans le théorème 1, on obtient un sous-espace vectoriel $\mathfrak{n}$ de $N(\mathfrak{h})$ tel que:

$$N(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{h} \frown \mathfrak{n}=0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]=0.$$

Tout élément de $o(n)$ engendré par $\mathfrak{n}$ est donc permutable avec tout élément de H. D'où notre lemme [1].

Théorème 3. *Soit V une variété riemannienne irréductible à n dimensions et σ_p le groupe d'holonomie homogène restreint (le point de référence étant $p \in V$). Soit G le groupe des transformations isométriques (on ne suppose pas que G soit transitive sur V) et H_p le groupe d'isotropie de G en un point p de V. Alors*

(1) *Si n est impair, la composante connexe de l'identité de H_p est contenu dans σ_p.*

(2) *Si $n=2m$, ou bien V est pseudo-kählerienne à courbure de Ricci nulle* [3], *ou bien la composante connexe de l'identité de H_p est contenu dans σ_p.*

Démonstration. Cela résulte du fait que H_p est contenu dans le normalisateur du groupe d'holonomie.

Corollaire. *Soit V une variété riemannienne irréductible à n dimensions. Soient r et d les dimensions du groupe des transformations isométriques et du groupe d'holonomie respectivement. Alors*

(a) $r \leqq n+d$, *si* n *est impair.*

(b) $r \leqq n+d$, *si* n *est pair et si* V *n'est pas pseudo-kählerienne à courbure de Ricci nulle.*

(c) $r \leqq n+d+1$, *si* V *est pseudo-kählerienne à courbure de Ricci nulle.*

Références

[1] E. Cartan: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. France, **54**, 214-264 (1926).

[2] J. L. Koszul: Homologie et cohomologie de l'algèbre de Lie, Ibid., **78**, 86 (1950).

[3] A. Lichnerowicz: Espaces homogènes kähleriens, Colloque de la géométrie différentielle à Strasbourg, 171 (1953).