66. *Sur la Structure des Fonctions d'Ensemble dans les Groupes Topologiques Localement Compacts.* I

Par Shizu ENOMOTO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1955)

Nous utiliserons la notion de profondeur introduite par Prof. Kinjirô Kunugi[1] tout récemment. Pour le groupe topologique localement compact et non discret, qui sera étudié dans ces Notes, la profondeur est ω_0, c.-à-d. il y a une suite monotone décroisante de voisinages de l'unité $V_n\,(n=1,2,\dots)$ telle qu'il n'y a ancun voisinage de l'unité qui est contenu dans tous les V_n de la suite. Dans cette Note, nous définirons de plus une branche[2] de voisinages de l'unité comme une suite particulière de celle mentionnée plus haut, et nous prêtons attention à un système[3] des branches qui précise la topologie de groupe. On a pour chaque branche un groupe topologique qui est localement compact, séparable et de plus isomorphe à un espace métrique. On verra que, pour les études des fonctions d'ensemble définies dans le groupe topologique localement compact et non discret, il suffit d'examiner les fonctions d'ensemble définies dans le groupe topologique qui est de plus *isomorphe à un espace métrique.*

Dans ces Notes, $\mathfrak{G}$ sera un groupe topologique[4] localement compact, non discret et σ-compact,[5] c.-à-d. tel qu'il y a une suite des ensembles compacts $A_i\,(i=1,2,\dots)$ satisfaisant à $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\mathfrak{G}$.

Définition 1. On appelle *branche de voisinages de l'unité dans* $\mathfrak{G}$ ou simplement branche (de voisinages), une suite de voisinages $\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ jouissant des propriétés suivantes:

1) $\bar{\theta}_n$ est compact pour tout n.

2) $\theta_n \supseteq \theta_{n+1}(\theta_{n+1})^{-1}$ [6] pour tout n.

3) Pour tout point $x\in\mathfrak{G}$, il y a un indice $n_0(x)$ tel qu'on a $x\theta_n \supseteq \theta_{n+1}x$ pour tout $n\geq n_0(x)$.

---

1) Kinjirô Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, Proc. Japan Acad., **30**, 553 (1954).

2) Voir la Définition 1.

3) Il s'agit du système S^* qui sera donné dans la Définition 2.

4) Un groupe topologique qui est un espace de Hausdorff.

5) Selon de l'étude de "P. R. Halmos: Measure Theory, § 57", nous examinerons le seul cas σ-compact.

6) Si A, B sont deux sous-ensembles d'un groupe $\mathfrak{G}$, AB désigne l'ensemble $\{ab;\ a\in A,\ b\in B\}$ et AB^{-1} désigne l'ensemble $\{ab^{-1};\ a\in A,\ b\in B\}$. En particulier, si A, resp. B, se réduit à un seul élément x, on l'écrit par xB, resp. Ax.

4) $(\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n)^\circ=0.$[7]

On la désigne par $b:\theta_n\,(n=1,2,\dots)$.

De la propriété 2) dans cette définition, on peut tirer aussitôt la propriété suivante 2*), en posant $m_0(x)=max\,(n_0(x), n_0(-x))$.

2*) Pour tout point $x\in\mathfrak{G}$, il y a un indice $m_0(x)$ tel qu'on a $x\theta_n\supseteq\theta_{n+1}x$ et $\theta_n x\supseteq x\theta_{n+1}$ pour tout $n\geq m_0(x)$.

Pour montrer l'existence d'une branche de voisinages, donnerons d'abord, sans démonstration, le

Lemme 1. Soit A un ensemble compact dans $\mathfrak{G}$. Alors, il y a pour tout voisinage de l'unité θ un voisinage de l'unité $\theta'=\theta'(A)$ tel qu'on a $\theta x\supseteq x\theta'$ et $x\theta\supseteq\theta' x$ pour tout point $x\in A$.

Théorème 1. *Il y a dans* $\mathfrak{G}$ *au moins une branche de voisinages de l'unité.*

Démonstration. Puisque $\mathfrak{G}$ est σ-compact, il y a une suite des ensembles compacts $A_i\,(i=1,2,\dots)$ telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\mathfrak{G}$. Puisque la profondeur de $\mathfrak{G}$ est ω_0,[8] il y a une suite monotone décroisante des voisinages $V_n\,(n=1,2,\dots)$ telle que $(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n)^\circ=0$ et $\overline{V_n}$[7] est compact. Posons d'abord $\theta_1=V_1$. Ensuite, supposé que θ_n soit défini, donnons θ_{n+1} de la manière suivante:

Soit θ'_{n+1} un voisinage de l'unité tel qu'on a $x\theta_n\supseteq\theta'_{n+1}x$ et $\theta_n\supseteq\theta'_{n+1}(\theta'_{n+1})^{-1}$ pour tout point $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ — celui-là existe en vertu du Lemme 1. Posons $\theta_{n+1}=V_{n+1}\cap\theta'_{n+1}$.

Alors, on peut voir que la suite $\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ est une branche de voisinages. Car,

1) $\overline{\theta}_n$ est compact, puisque $V_n\supseteq\theta_n$ et V_n est compact.

2) $\theta_n\supseteq\theta'_{n+1}(\theta'_{n+1})^{-1}\supseteq\theta_{n+1}(\theta_{n+1})^{-1}$.

3) Pour tout point $x\in\mathfrak{G}$, il y a un indice $n_0(x)$ tel que $x\in A_{n_0(x)}$.

Par suite, on a $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ pour tout $n\geq n_0(x)$, de sorte que $x\theta_n\supseteq\theta'_{n+1}x\supseteq\theta_{n+1}x$.

4) On voit évidemment que $(\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n)^\circ=0$, puisque $\theta_n\subseteq V_n$ et $(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n)^\circ=0$.

Corollaire 1. Soit $V_n\,(n=1,2,\dots)$ une suite quelconque des voisinages de l'unité dans $\mathfrak{G}$, alors il y a une branche $b:\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ telle que $\theta_n\subseteq V_n$ pour tout n.

---

7) Si A est un sous-ensemble d'un espace topologique, $\overline{A}$ désigne son adhérence et A° désigne son intérieur.

8) Puisque la profondeur de $\mathfrak{G}$ est ω_0, on a une suite monotone décroisante des voisinages de l'unité $V_n\,(n=1,2,\dots)$ tel qu'il n'y a aucun voisinage de l'unité qui est contenu dans tous les V_n de la suite. Pour la suite, on peut tirer aussitôt $(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n)^\circ=0$.

Théorème 2. *Soient* $\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ *une branche de voisinages dans* $\mathfrak{G}$ *et* $G_b=\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n$. *Alors,* G_b *est un sous-groupe, compact et invariant.*

Démonstration. D'après ce qu'on a $\theta_n\supseteq\theta_{n+1}\theta_{n+1}^{-1}\supseteq\overline{\theta}_{n+1}\supseteq\theta_{n+1}$, il résulte $G_b=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}_n$, de sorte que G_b est fermé. De plus, G_b est compact, puisque $\overline{\theta}_n$ est compact. Soit $a, b\in G_b$, alors $a, b\in\theta_{n+1}$ pour tout n, par suite $ab^{-1}\in\theta_{n+1}\theta_{n+1}^{-1}$. Par conséquent, $G_b=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\theta_{n+1}\theta_{n+1}^{-1})\ni ab^{-1}$. Donc, G_b est un sous-groupe. Pour tout point $x\in\mathfrak{G}$, il y a, en vertu de la définition, un $n_0(x)$ tel que $x\theta_n\supseteq\theta_{n+1}x$ pour tout $n\geq n_0(x)$. On a donc $xG_b=x(\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(x\theta_n)=\bigcap_{n=n_0(x)}^{\infty}(x\theta_n)\supseteq\bigcap_{n=n_0(x)}^{\infty}(\theta_{n+1}x)=(\bigcap_{n=n_0(x)}^{\infty}\theta_{n+1})x=(\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n)x=G_bx$. G_b est donc invariant.

Théorème 3. *Soient* $b:\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ *une branche de voisinages dans* $\mathfrak{G}$ *et* $G_b=\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n$. *Alors, le groupe quotient* $\hat{\mathfrak{G}}_b=\mathfrak{G}/G_b$[9] *est un espace métrique, séparable et localement compact.*

Démonstration. Montrons d'abord que la famille de voisinages de l'unité dans $\hat{\mathfrak{G}}_b$ est équivalente à la famille $\{\hat{\theta}_n\,(n=1,2,\dots)\}$.[10] Pour cela, il suffit de prouver qu'il y a pour tout voisinage V_0 de l'unité dans $\mathfrak{G}$ un θ_n tel que $V_0G_b\supseteq\theta_nG_b$. Supposons qu'on ait un voisinage V_0 de l'unité dans $\mathfrak{G}$ tel que $\theta_nG_b-V_0G_b\neq 0$ pour tout n. Posons maintenant $F_n=\overline{\theta_nG_b}-V_0G_b$. On a alors $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq 0$, puisque $F_n\,(n=1,2,\dots)$ est la suite des ensembles fermés monotone décroisante telle que $\theta_1\supseteq F_3$, et puisque $\overline{\theta}_1$ est compact. De plus, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{(\theta_nG_b)}\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(\overline{\theta}_n\overline{\theta}_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n=G_b$, par suite $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\frown V_0G_b\neq 0$, contrairement à $F_n\frown V_0G_b=0$. Conséquemment, $\hat{\mathfrak{G}}_b$ est isomorphe à un espace métrique.[11] On voit aussitôt que $\hat{\mathfrak{G}}_b$ est séparable, puisque $\mathfrak{G}$ est σ-compact. $\mathfrak{G}$ est localement compact, par suite il en est de même de $\hat{\mathfrak{G}}_b$.

Définition 2. $b:\theta_n\,(n=1,2,\dots)$ étant une branche de voisinages de l'unité dans $\mathfrak{G}$, le groupe quotient $\hat{\mathfrak{G}}_b=\mathfrak{G}/G_b$ s'appelle *groupe quotient déterminé par la branche de voisinages b*. Désignons par **S** l'ensemble des branches de l'unité dans $\mathfrak{G}$. Etant données deux branches $b_1:\theta_{1n}\,(n=1,2,\dots)$ et $b_2:\theta_{2n}\,(n=1,2,\dots)$, on dit que b_2 est

9) Étant donné un sous-groupe fermé et invariant G, nous entendons par $\hat{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/G$ le groupe quotient défini par la répartition en ensembles $x\cdot G$, $x\in\mathfrak{G}$.

10) Nous désignons par $\hat{\theta}_n$ la projection de θ_n sur $\mathfrak{G}/G_b$.

11) Voir, Bourbaki: Topologie générale, Chap. IX, p. 7.

plus fine que b_1 s'il y a pour tout θ_{1n} un indice $m(n)$ tel que $\theta_{1n} \supseteq \theta_{2m(n)}$, et on le désigne par $b_1 \succ b_2$. Étant $b_1 \succ b_2$ et $b_2 \succ b_1$, on l'écrit par $b_1 \sim b_2$. Alors, " $\sim$ " satisfait à la relation d'équivalence. Nous désignons par $\mathbf{S}^*$ l'ensemble des classes d'équivalence suivant la relation " $\sim$ " et par b^* la classe d'équivalence de b, et nous écrirons $b_1^* \succ b_2^*$ lorsqu'il existe $b_1 \in b_1^*$, $b_2 \in b_2^*$ tels que $b_1 \succ b_2$.

Théorème 4. *1) $\mathbf{S}^*$ est ordonné par la relation " $\succ$ ".*[12] *2) Pour qu'on a $b_1 \sim b_2$, où $b_1, b_2 \in \mathbf{S}$, il faut et il suffit qu'on a $\mathrm{G}_{b_1} = \mathrm{G}_{b_2}$. Conséquemment, on peut poser $\mathrm{G}_{b^*} = \mathrm{G}_b$, où $b \in b^*$. 3) Pour une suite b_n^* $(n=1, 2, \ldots)$, $b_n^* \in \mathbf{S}^*$, il y a une branche $b_0 \in b_0^*$ telle que $b_n^* \succ b_0^*$ pour tout n. 4) La famille des voisinages de l'unité dans $\mathfrak{G}$ est équivalente à la famille $\{V\mathrm{G}_{b^*}\}$, $b^* \in \mathbf{S}^*$, V étant tous les voisinages de l'unité dans $\mathfrak{G}$.*

Démonstration. On voit évidemment 1) et 2). Pour 3): Posons $b_n : \theta_{nm}$ $(m=1, 2, \ldots)$, où $b_n \in b_n^*$, et prenons une suite des voisinages $V_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \theta_{n-i, i+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. En vertu du corollaire 1, il y a une branche $b_0 : \theta_n$ $(n=1, 2, \ldots) \in \mathbf{S}$ tel que $V_n \supseteq \theta_n$ pour tout n. La branche b_0 jouit de la propriété voulue. Pour 4): Selon Corollaire 1, il y a pour tout voisinage W une branche $b_0 = b_0(W) : \theta_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ telle que $W \supseteq \theta_n$ pour tout n. On a alors $W \supseteq \theta_1 \supseteq \theta_2\theta_2^{-1} \supseteq \theta_2\mathrm{G}_{b_0}$.

12) Pour la définition de "relation d'ordre" voir Bourbaki: Théorie des ensembles, § 6.