# 29. *Théorème de Krein-Milman et le Balayage de Mesures dans la Théorie du Potentiel.* III

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1956)

§8. **Le cas d'un ensemble fermé général.** Il n'y a aucune difficulté pour étendre la définition de balayage aux ensembles compacts ou fermés générals (au lieu d'un domaine compact): en effet, on peut aller d'une manière toute analogue au cas qui a été étudié aux paragraphes précédents §§1–7.[1]

1°) *Le cas d'un compact K.* Les résultats que nous avons obtenu dans les numeros précédents restent tout entier vrais quand même nous remplacerions le domaine compact $\overline{D}$ par un compact $K$ en considérant *int* $(K)=D$ (il se pourrait que *int* $(K)=0$, mais encore le principe de la démonstration énoncée dans §§1–6 sont bien valide comme nous le verrons aisément).[2]

2°) *Le cas d'un fermé non borné.* Soit $F$ un ensemble fermé non borné quelconque; alors on n'aura maintenant qu'à remplacer $\mathfrak{M}_0^+(D)$ et $M^\wedge(D)$ par $\mathfrak{M}_1^+(F)$ et $M_1^\wedge(F)$ respectivement:

$\mathfrak{M}_1^+(F)=$ensemble convexe des mesures positives de norme $\leqq 1$ sur $F$,

$M_1^\wedge(F)=$ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies par (2.1) pour toute mesures $\mu\in\mathfrak{M}_1^+(F)$ sur l'espace vectoriel normé $H(F)$.[3]

Comme $\mathfrak{M}(E)$ est un espace de Montel, $\mathfrak{M}_1^+(F)$ est encore vaguement compact et d'après la continuité d'application $\mu\to\mu^\wedge$, $M_1^\wedge(F)$ est compact (et convexe) dans le dual topologique $H^\wedge(F)$ à l'espace vectoriel $H(F)$ muni de la topologie faible; ainsi, la Proposition 1 reste valide pour $M_1^\wedge(F)$.

En désignant l'ensemble des points extrémaux distincts de $0^\wedge$ de $M_1^\wedge(F)$ par *Ext.* $M_1^\wedge(F)$,[4] la Proposition 2 est vraie en remplaçant *Ext.* $M^\wedge(D)$ par *Ext.* $M_1^\wedge(F)$. Toutefois, dans la partie 1°) de sa démonstration, il est besoin de faire une petite modification, c'est-à-dire, comme il est évident qu'il existe un point $z\in E-F$ tel que

---

1) S. Matsushita: Théorème de Krein-Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel. I et II, Proc. Japan Acad., **31**, 643–647 (1955); **32**, 29–34 (1956).

2) Désignons par *int* $(A)$ l'intérieur d'un ensemble $A$.

3) $H(F)=$espace vectoriel normé des potentiels newtoniens continues des mesures de $\mathfrak{M}^*(E-F)$, cf. §1.

4) Comme $\mathfrak{M}_1^+(F)$ est compact et convexe, le théorème de Krein-Milman est aussi applicable pour $\mathfrak{M}_1^+(F)$; il est évident que $0^\wedge$(*fonctionnelle nulle*) est un point extrémal quand $F$ n'est pas compact.

$r(x_1, z) > r(x_2, z)$ pour deux points $x_1$ et $x_2$ dans le support d'une mesure $\mu$, qui n'est pas égale à une mesure ponctuelle, on peut prendre deux sphères $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ du rayon $\rho_0 < \frac{1}{2}[r(x_1, z) - r(x_2, z)]$ des centres $x_1$ et $x_2$ respectivement; appliquons alors à ces $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ le même raisonnement comme dans la démonstration de la Proposition 2, § 2, ce qui montre que $\mu^\wedge$ n'est pas extrémal. 2°) reste vrai sans aucune modification. De plus, on a:

3°) Si la mesure ponctuelle $\nu_x$ n'est pas de norme 1, $\nu_x^\wedge$ n'appartient pas à *Ext.* $M_1^\wedge(D)$; en effet, $\nu_x^\wedge = \alpha\varepsilon_x^\wedge + (1-\alpha)0^\wedge$ où $\alpha = \|\nu_x^\wedge\| < 1$ et $\varepsilon_x^\wedge = \nu_x^\wedge/\alpha$ (qui est $\in M_0^\wedge(F)$).

**Proposition 2$^{\text{bis}}$.** *L'ensemble des points extrémaux de $M_1^\wedge(F)$ se constitute de l'élément zéro $0^\wedge$ et des éléments de Ext. $M_1^\wedge(F)$; toute mesure de Ext. $M_1^\wedge(F)$ est ponctuelle de norme 1 et placée dans $\Gamma$ (la frontière de $F$).*

En considérant $\mathfrak{M}_1^+(\Gamma)$ au lieu de $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$, §3 reste encore valide. Par conséquent, il en est ainsi des égalités fondamentales (3.5), (5.1), et (5.2), de plus, de Théorèmes 1 et 1$^{\text{bis}}$. Toutefois, quant à l'égalité $\int d\mu = \int d\mu_\Gamma^0$ dans les Propositions 3 et 3$^{\text{bis}}$, il n'en est plus de même; en effet, si $E-F$ est relativement compact, on peut prendre une mesure sphérique $\lambda$ sur $\Sigma$ telle que $E-F \subset \Sigma$, alors on a $U^\lambda(x) = U^{\lambda_\Gamma^0}(x) = k$ *à p. p. p.* sur $\Gamma$ et $U^{\lambda_\Gamma^0}(x) < k$ pour $x \in$ *int* $(F)$, parce que $U^{\lambda_\Gamma^0}$ est harmonique dans *int* $(F)$ qui s'étend à l'infini. D'où il vient que $\int d\mu > k^{-1}\int U^{\lambda_\Gamma^0} d\mu = k^{-1}\int U^{\lambda_\Gamma^0} d\mu_\Gamma^0 = \int d\mu_\Gamma^0$ (d'après (3.5)), quelque soit la mesure $\mu$ ayant le support dans *int* $(F)$ et de l'énergie finie.

§9. **Le cas d'un ensemble ouvert général.** Soient $D$ un ensemble ouvert quelconque et $\Gamma$ la frontière de $D$; prenons alors une suite dénombrable des ensembles fermés $F_n$ tels qu'on ait

i) $$F_n \subset D,\ \overline{D - F_{n+1}} \subset \overline{D} - F_n,$$
ii) $$\Gamma = \frown_{n=1}^{\infty} (\overline{D - F_n}).^{5)}$$

Pour une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$,[6] désignons par $\mu_n$ les restrictions de $\mu$ à $F_n$ et par $\mu_n^0$ les mesures balayées de $\mu_n$ sur les frontières $\Gamma_n$ de $F_n$ pour tout $n (=1, 2, \cdots)$. On voit que $\mu_n$ convergent vaguement vers $\mu$ et qu'il existe parmi les $\mu_\mu^0$ une sous-suite $\{\mu_{n_i}^0\}$ qui converge vers une mesure $\mu_\Gamma^0$ définie sur $\Gamma$, comme $\mathfrak{M}_1^+(\overline{D})$ est vaguement compact.

**Proposition 8.** *Pour toute $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ de l'énergie finie, on a*

5) Par exemple, on peut prendre $F_n = \overline{D - \Sigma_{x\in\Gamma} B^n}$ où $B_x^n$ désigne une boule ouverte de centre $x \in \Gamma$ du rayon $1/2^n$ (cf. Démonstration de Théorème 3).

6) On aura soin de ne pas confondre $\mathfrak{M}^+(D)$ et $\mathfrak{M}_0^+(D)$; $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$ est répartiée dans $D$.

$$\int U^{\mu} d\nu = \int U^{\mu_\Gamma^0} d\nu. \tag{9.1}$$

Démonstration: Désignons par $\nu_j^0$ la mesure balayée de $\nu \in \mathfrak{M}^+(E-F_j)$ sur $\Gamma_j$ au sens du §8 (ou §5); en vertu du Lemme dans §3, on peut choisir parmi les $\nu_j^0$ une suite $\{\nu_{j'}^0\}$ qui converge vaguement vers la mesure $\nu_\Gamma^0$.[7] Étant donné un nombre $\varepsilon>0$ quelconque, il existe un entier $j'$ tel qu'on ait $U^{\nu_\Gamma^0} < U^{\nu_{j'}^0} + \varepsilon/2$.

D'ailleurs, comme $U^{\nu_{j'}^0}$ est continue sur $\overline{D} - int\,(F_{j'+1})$, il existe un entier $n_0$ tel que $\int U^{\nu_{j'}^0} d\mu_{n_i}^0 < \int U^{\nu_{j'}^0} d\mu_\Gamma^0 + \varepsilon/2$ pour tout $i$ tel que $n \geqq n_0$. Il suit de là que $\int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu_{n_i} = \int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu_{n_i}^0 < \int U^{\nu_{j'}^0} d\mu_{n_i}^0 + \varepsilon/2 < \int U^{\nu_{j'}^0} d\mu|_\Gamma^0 + \varepsilon < \int U^{\nu} d\mu_\Gamma^0 + \varepsilon$, par suite,

$$\int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu \leqq \varliminf_{i\to\infty} \int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu_{n_i} < \int U^{\nu} d\mu_\Gamma^0 + \varepsilon;$$

$\varepsilon$ étant arbitraire, on en conclute $\int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu \leqq \int U^{\nu} d\mu_\Gamma^0$.

D'autre part, on a $\nu = \nu_\Gamma^0$ (en considérant $\nu \in \mathfrak{M}^+(\Gamma)$ elle-même comme une balayée de $\nu$ au sens général) parce que $\nu$ est de l'énergie finie, et il est clair que $U^{\mu_\Gamma^0} \leqq \varliminf_{i\to\infty} U^{\mu_{n_i}^0} \leqq \lim_{i\to\infty} U^{\mu_{n_i}} = U^{\mu}$; par conséquent, $\int U^{\nu} d\mu_\Gamma^0 = \int U^{\mu_\Gamma^0} d\nu \leqq \int U^{\mu} d\nu$, d'où résulte (9.1).[8] Nous avons ainsi établi le

**Théorème 4.** *Soit $D$ un ensemble ouvert quelconque ayant la frontière $\Gamma$; pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$ il existe une et une seule mesure $\mu_\Gamma^0 (=\mu_F^0$ où $F=E-D)$, appelée la mesure balayée de $\mu$ sur $\Gamma$ (ou sur $F$), telle qu'on ait*

$\alpha$) $\qquad U^{\mu} \geqq U^{\mu_\Gamma^0}$ *partout sur $E$,*

$\beta$) $\qquad U^{\mu} = U^{\mu_\Gamma^0}$ *sur $E-\overline{D}$ et à p.p.p. sur $\Gamma$.*

*Remarque 1.* On voit aisément que dans un sous-domaine du complément de $F$ qui ne contient aucune partie du support de $\mu$ on a $\gamma$) $U^{\mu} > U^{\mu_\Gamma^0}$.

*Remarque 2.* On peut aussi, comme l'a fait M. H. Cartan (*Loc. cit.*), établir la notion du balayage intérieur ou extérieur pour un ensemble général; mais nous nous contentons ici d'exposer le Théorème 4 ci-dessus.

---

7) Si $\Gamma$ n'est pas compact, c.à-d., elle s'étend à l'infini, chaque $\Gamma_j$ n'est pas compact et il est besoin de remplacer $\mathfrak{M}_0^+$ par $\mathfrak{M}_1^+$, mais le Lemme reste encore valide.

8) On ne peut employer ici les égalités (5.1), (5.2), etc., parce que le sens du balayage pour $\mu_\Gamma^0$ est différent de celui pour $\nu_\Gamma^0$ dans la démonstration ci-dessus; c'est-à-dire, $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$ mais $\nu \in \mathfrak{M}^+(\Gamma)$.

**10. Les problèmes de Dirichlet et de Robin.** Conformément à la définition dans §6, on appelle encore *point-frontière régulier* tout $x \in \Gamma$ vérifiant $U^{\mu}(x)=U^{\mu_{\Gamma}^{0}}(x)$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^{+}(D)$, où $D$ est un ensemble ouvert quelconque, et *point-frontière irrégulier* tout point de $\Gamma$ qui n'est pas régulier.

En vertu de (9.1), on voit immédiatement que l'ensemble des points-frontières irréguliers d'un ouvert $D$ est *de capacité nulle*. De plus, on a

**Proposition 5^bis.** *Pour que $x$ soit un point-frontière régulier d'un ouvert $D$, il faut et il suffit que, pour toute suite des points $\{y\}$ de $D$ telle que $y \to x$, $\{(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}\}$ soit convergente vaguement vers la mesure $\varepsilon_x$.*

Démonstration: 1°) Soient $\lambda$ et $\lambda'$ mesures sphériques de masse totale $+1$ de centre commun; alors $U^{\lambda-\lambda'}$ est une fonction continue à support compact et $\tau=\lambda-\lambda'$ est de l'énergie finie. Désignant par $\tau^{D}$ et $\tau^{*}$ les restrictions de $\tau$ sur $D$ et $E-D$ respectivement, on a $U^{\tau}(y)\geqq\int U^{\tau}d(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}=\int U^{(\tau^{D})_{\Gamma}^{0}}d\varepsilon_y+\int U^{\tau^{*}}d\varepsilon_y$, d'où $U^{\tau}(x)=\lim_{y\to x}U^{\tau}(y)\geqq \underline{\lim}_{y\to x}\int U^{(\tau^{D})_{\Gamma}^{0}}d\varepsilon_y+\underline{\lim}_{y\to x}\int U^{\tau^{*}}d\varepsilon_y\geqq U^{(\tau^{D})_{\Gamma}^{0}}(x)+U^{\tau^{*}}(x)$; si $x$ est un point-frontière régulier, on a $U^{(\tau^{D})_{\Gamma}^{0}}(x)=U^{\tau^{D}}(x)$ et donc $U^{\tau}(x)=\lim_{y\to x}\int U^{\tau}d(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}$, ce qui prouve que $(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}\to\varepsilon_x$ vaguement.

2°) Réciproquement, soit $x$ un point-frontière irrégulier et supposons que $(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}\to\varepsilon_x$ pour toute suite $\{y\}$ telle que $y\in D\to x$; alors $U^{\mu_{\Gamma}^{0}}(y)\geqq\int U^{\mu_{\Gamma}^{0}}d(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}$ et $\underline{\lim}_{y\to x}U^{\mu_{\Gamma}^{0}}(y)\geqq\underline{\lim}_{y\to x}\int U^{\mu_{\Gamma}^{0}}d(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}=\underline{\lim}_{y\to x}\int U^{\mu}d(\varepsilon_y)_{\Gamma}^{0}$ (d'après (9.1))$\geqq U^{\mu}(x)$, donc par le même raisonnement que dans la démonstration de Prop. 6 on obtiendrait une contradiction.

Or, nous considérerons ensuite le problème de Dirichlet pour un domaine quelconque $D$ ayant la frontière $\Gamma$. Il n'offrira maintenant aucune difficulté de reconnaître la solution; pour une $f\in C(\Gamma)$ quelconque, la solution $\tilde{f}(x)$ est représentée par

$$\tilde{f}(x)=\int_{\Gamma}f(y)d(\varepsilon_x)_{\Gamma}^{0},\quad \text{où } x\in D. \tag{10.1}$$

En effet, prenons les domaines compacts $F_n$ vérifiant les conditions i) et ii) au début de §9 (c'est toujous possible) et prolongeons $f$ en une fonction $f_0$ continue à support compact sur $E$; en désignant les restrictions de $f_0$ dans $C(\Gamma_n)$ par $f_n$, on voit que $\tilde{f}_n(x)=\int_{\Gamma_n}f_n(y)d(\varepsilon_x)_{\Gamma_n}^{0}$ sont harmoniques et uniformément bornées dans *int* $(F_{n_0})$ pour tout $n\geqq n_0$, alors il existe parmi les $\tilde{f}_n(x)$ une sous-suite qui converge vers une fonction harmonique $\hat{f}(x)$ dans *int* $(F_{n_0})$, mais d'autre part on a $\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}(x)$, c.-à-d., $\hat{f}(x)=\tilde{f}(x)$ dans $int(F_{n_0})$, donc $\tilde{f}(x)$ est harmonique dans $int\,(F_{n_0})$, par suite dans $D$, $n_0$ étant arbitraire. En vertu de Prop. $5^{\text{bis}}$, on a $\lim_{y\to x}\tilde{f}(y)=f(x)$, $y\in D$, pour tout point-frontière régulier $x\in\Gamma$: L'unicité de la solution $\tilde{f}(x)$ sera bien déduite par la même argumentation comme dans la dernière partie du §7.

Remarquons maintenant que si $D$ s'étend à l'infini, il est besoin que nous nous assujettissions d'admettre la condition supplémentaire que $\tilde{f}(x)$ s'annule à l'infini, puisque $\varepsilon_x\to 0$ vaguement quand $x$ tend vers l'infini.

Finalement, étant donné un compact $K$, prenons une mesure sphérique $\lambda\in\mathfrak{M}^+(E-K)$ sur $\Sigma\supset K$ telle que $U^\lambda=1$ sur $int\,(\Sigma)$; alors on a

(10.2) $$U^{\lambda_K^0}=1 \text{ à } p.p.p. \text{ sur } K$$

et $c(K)=\int d\lambda_K^0$. C'est la solution du *problème d'équilibre de Robin* pour $K(\lambda_K^0$ est la *mesure capacitaire* de $K)$.

§11. **Application pour le potentiel d'ordre $\alpha$.** Soit $D$ un domaine relativement compact avec la frontière $\Gamma$ dans $E=E^3$; considérons maintenant le potentiel $V^\mu$ d'ordre $\alpha\,(1\leqq\alpha<3)$ de M. Riesz. Soit $z$ un point quelconque de $E-\overline{D}$, alors $V^{\varepsilon_z}$ est sous harmonique dans un domaine $D_0$ tel que $\overline{D}\subset D_0\subset E-z$,[9] par suite, il se décompose en la somme (c.-à-d., *la décomposition de F. Riesz*);[10]

(11.1) $$V^{\varepsilon_z}=H-U^\nu \quad sur\ \overline{D},$$

où $\nu\in\mathfrak{M}^+(\overline{D})$ et $H$ est harmonique dans $D$.

Pour tout point $x\in D$, on a $H(x)=\int_\Gamma Hd(\varepsilon_x)_\Gamma^0$ (la solution du problème de Dirichlet, §10) et d'autre part $U^\nu(x)=\int U^{\varepsilon_x}d\nu\geqq \int U^{(\varepsilon_x)_\Gamma^0}d\nu=\int U^\nu d(\varepsilon_x)_\Gamma^0$; alors on a $1/r^\alpha(x,z)=V^{\varepsilon_z}(x)=H(x)-U^\nu(x)\leqq \int_\Gamma H-U^\nu d(\varepsilon_x)_\Gamma^0=\int_\Gamma V^{\varepsilon_z}d(\varepsilon_x)_\Gamma^0$ d'où il résulte que:

**Théorème 5.** *Soit $x$ un point quelconque d'un domaine relativement compact $D$; alors pour la mesure balayée $(\varepsilon_x)_\Gamma^0$ au sens usuel de*

---

9) O. Frostman: *Thèse Lund*, 20 (1930); en effet, $\Delta\frac{1}{r^\alpha}\geqq 0$ pour $\alpha\geqq 1$.

10) S. Matsushita: *Sur la décomposition de F. Riesz*, I, C. R. Acad. Sci., Paris, **241**, 1252–1254 (1955). S. Hitotumatu: Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, **3**, 69–94 (1955). Dans ma Note ibid., il y a quelques errata typographiques; page 1253, 15e ligne, au lieu de "$0\geqq$", lire "$0\leqq$", et posons $\int_E f(-\Delta g)\,dx=\langle\Phi_D(f)\rangle(g)$. 17e, 18e, et 19e lignes, aulieu de "$\varphi_D(f)$", lire "$\Phi_D(f)$".

$\varepsilon_x$ *sur la frontière* $\Gamma$ *de* $D$, *on a*

$$(11.2)\qquad 1/r^\alpha(x,\cdot)\leqq\int 1/r^\alpha d(\varepsilon_x)^0_\Gamma \quad \textit{sur } E-\bar{D}.$$

Ce théorème de balayage pour le potentiel d'ordre $\alpha$ est apparemment d'un type différent que celui exposé par M. O. Frostman.[11]

**12. Compléments.** 1°) Dans le cas d'un domaine compact $\bar{D}$, le procédé du balayage exposé aux §§2–3 est de même que l'extrémisation de M. M. Brelot;[12] en effet, dans le Lemme au §3, on peut remplacer la suite des domaines $\{D_j\}$ par celle des domaines réguliers (c.-à-d., $\Gamma_j=\Gamma_j^0$ pour tout $j$) qui est équivalente à cella-là.

Par exemple, comme $\bar{D}_{j+1}\subset D_j$, il y a un recouvrement de $\Gamma_j$ (compact) formé d'un nombre fini de boules ouverts $(B_k)$, dont chacun ne rencontre pas $\bar{D}_{j+1}$. Désignons par $D_j^*$ le complément d'ensemble $(\Sigma B_k)\frown(E-D_j)$; alors $\bar{D}_{j+1}\subset D_j^*\subset D_j$ et la frontière $\Gamma_j^*$ de $D_j^*$ est régulier, c.-à-d., $(\Gamma_j^*)^0=\Gamma_j^*$ (voir Prop. 7, §6). Considérons ensuite la suite des mesures balayées $\{\nu_j^*\}$ de $\nu\in\mathfrak{M}_0^+(D)\subset\mathfrak{M}_0^+(D_j^*)$ sur $\Gamma_j^*$ pour $j=1, 2,\cdots$ . Alors, il existe une sous-suite de $\{\nu_j^*\}$ qui converge vaguement vers une mesure $\nu_\Gamma^*\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$. Cette mesure $\nu_\Gamma^*$ jouit les propriétés (3.4), (3.5), et (5.1) au lieu de $\nu_\Gamma^0$; d'après l'unicité de $\nu_\Gamma^0$, on a nécessairement $\nu_\Gamma^*=\nu_\Gamma^0$, qui est alors la mesure extrémisée de $\nu$. Ceci étant, on peut remplacer ici la notion de point-frontière régulier par celle de *point-frontière stable* au sens de MM. Keldych et Lavrentieff.

2°) Soit $D$ un domaine quelconque; désignant par $\mathfrak{H}(D)$ l'espace vectoriel des potentiels newtoniens qui sont uniformément bornés ét harmoniques dans $D$, espace muni de la pseudo-norme $\|f\|_D=\sup_{x\in D}|f(x)|$, et par $\mathfrak{N}(D)$ le sous-espace de $\mathfrak{H}(D)$ constituté de telles $f$ que $\|f\|_D=0$, on peut définir sur l'espace normé $\mathfrak{H}_0(D)$ obtenu en munissant le quotient $\mathfrak{H}(D)/\mathfrak{N}(D)$ de la norme déduite de la pseudo-norme de $\mathfrak{H}(D)$ une fonctionnelle linéaire continue de telle manière que pour une $\mu\in\mathfrak{M}_0^+(D)$,

$$(12.1)\qquad \mu^\sim(f_0)=\int f d\mu \qquad \text{pour toute } f\in\mathfrak{H}(D);\ f_0\in\mathfrak{H}_0(D).$$

Il serait sans doute intéressant de chercher à rendre ce qui précède à l'ensemble convexe $M^\sim(D)$ de cettes $\mu^\sim$ dans le dual topologique $\mathfrak{H}_0^\sim(D)$ de $\mathfrak{H}_0(D)$, au lieu de $M^\wedge(D)$ (au §2), et à appliquer aussi le théorème de Krein-Milman sur cet ensemble. Pour cela, on aurait besoin qu'on considère sur $M^\sim(D)$ une topologie qui sera mieux adaptée — plus fine que la topologie vague, mais plus faible que la *topologie fine* de H. Cartan.

11) O. Frostman: *Loc. cit.*, n° 37, p. 65–66.

12) M. Brelot: Bull. Sci. Math., **68** (1944), et Jour. Math. pures et appl., **24** (1945).