150. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. III

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1960)

Résumé. Cette note contient des résultats concernant les propriétés générales des structures géométriques modulaires d'une configuration [1]. Elle fait suite à ma note [2] dont je présuppose la connaissance.

1. *Structures géométriques modulaires; définition.* 1.1. *Définition.* J'appellerai *modulaire au sens de M. Alexander Kurosch* ou simplement *K-modulaire*, toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b'\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b'\}$ et $b \geq b'$ entraînent l'égalité $b = b'$.

1.2. *Définition.* J'appellerai *modulaire au sens de M. Öystein Ore* ou *O-modulaire* tout court, toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, a_1, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d \geq a_1 \geq a$ et $b \geq b' \geq m$ entraîne l'équivalence logique des relations $a_1\Upsilon\{a, b'\}$ et $b'\Sigma\{a_1, b\}$.

1.3. *Définition.* J'appellerai *modulaire au sens de M. Morgan Ward* ou encore *W-modulaire*, toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$ entraînent l'isomorphisme au sens de l'ordre partiel $d/a \rightleftarrows b/m$.

1.4. *Définition.* J'appellerai *circulaire* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que pour tous les $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ satisfaisant à $d\Upsilon\{a, b\}$ et à $m\Sigma\{a, b\}$, les quotients ([2], 1.2.1) d/a et a/m soient des chaines (=ensembles totalement ordonnés).

2. *Propriétés.* 2.1. *Théorème. Toute (Υ, Σ)-structure géométrique analytique, fermée* ([2], 1.6.4, 1.6.7) *et K-modulaire* (1.1) *possède les propriétés suivantes:* 1. *Elle est à similitude* ([2], 1.6.9), 2. *Elle est saturée* ([2], 1.6.8), 3. *Elle est primitive au sens que voici: Pour chaque (Υ, Σ)-quadrilatère* ([2], 1.4) $(a, b; d, m)$ *de $\mathfrak{P}$, la condition $d \succ a$ équivaut à la condition $b \succ m$* (Ici $x \succ y$ veut dire $x > y$ et les relations $x \geq z \geq y$ entraînent ou bien $z = x$ ou bien $z = y$), 4. *Si elle est moins fine que la structure géométrique rieszienne de $\mathfrak{P}$* ([2], 1.5.2), *alors elle est déjà moins fine que la structure géométrique dédékindienne et, en outre, elle est O-modulaire* (1.2), 5. *Si elle est circulaire* (1.4) *elle est aussi O-modulaire.*

2.2. *Théorème. Toute structure géométrique conditionnellement raffinante* ([2], 1.6.2) *fermée et K-modulaire est également O-modulaire.*

2.3. *Théorème. Pour qu'une structure géométrique analytique* (ou bien *fermée*) *et O-modulaire soit K-modulaire, il faut et il suffit* *qu'elle soit à similitude.*

2.4. *Théorème. À supposer que la structure géométrique hausdorffienne d'une configuration est conditionnellement raffinante* ([2], 1.6.2), *les deux propriétés suivantes sont logiquement équivalentes* (en tant que propriétés de la dite structure géométrique): 1. *K-modularité,* 2. *O-modularité.*

2.5. *Théorème. Pour qu'une structure géométrique fermée et O-modulaire soit saturée* ([2], 1.6.8), *il faut et il suffit qu'elle soit à similitude.*

2.6. *Théorème. Toute structure géométrique analytique, fermée, à similitude et O-modulaire possède la propriété de primitivité de* 2.1, *troisième assertion. Si, en outre, elle est complémentée* ([2], 1.6.12), *alors elle est moins fire que la structure géométrique hausdorffienne.*

2.6.1. *Corollaire. Si la structure géométrique hausdorffienne est analytique et O-modulaire alors elle a la propriété de primitivité.* (Cette propriété subsiste également *sous les suppositions d'analyticite et de K-modularité,* comme cela résulte immédiatement du théorème 2.1, troisième assertion.)

2.7. *Théorème. Toute structure géométrique analytique, fermée et O-modulaire possède la propriété de modularité cartésienne que voici: Pour tous les* $a, a_1, a', b, b_1, b', d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d \geq a_1 \geq a \geq a' \geq m$ et $d \geq b_1 \geq b \geq b' \geq m$, *il existe des éléments* $x_1, x' \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d \geq x'\Upsilon\{a', b'\}$, $m \leq x_1 \ \Sigma\{a_1, b_1\}$ *et tels que*

$$a'\Sigma\{a, x'\}, \quad b'\Sigma\{b, x'\}$$
$$a_1\Upsilon\{a, x_1\}, \quad b_1\Upsilon\{b, x_1\}.$$

2.8. *Définition.* Je dirai qu'une (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ est *forte,* lorsque les deux conditions suivantes sont remplies:

FΥ. *Pour tous les* $a, a_1, a_2, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $b \geq b' \geq m$, $d \geq a_1\Upsilon\{a, b'\}$ *et* $d \geq a_2\Upsilon\{a, b'\}$, *on a* $a_1 = a_2$.

FΣ. *Pour tous les* $a, a_1, b, b', b'', d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d \geq a_1 \geq a$, $m \leq b'\Sigma\{a_1, b\}$ *et* $m \leq b''\Sigma\{a_2, b\}$, *on a* $b' = b''$.

Cf. mon travail [3], 3.3 et [1], 2.12.

2.8.1. On peut remarquer que *toute structure géométrique forte est saturée.*

2.9. *Définition.* Soient $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$. Je dirai que l'élément $x \in \mathfrak{P}$ tel que $d \geq x \geq m$ est *cartésien* (par rapport au (Υ, Σ)-quadrilatère $(a, b; d, m)$), lorsqu'il existe des éléments $a_1, b_1, a', b' \in \mathfrak{P}$ tels que $d \geq a_1 \geq a \geq a' \geq m$, $d \geq b_1 \geq b \geq b' \geq m$, tels que

$$a_1\Upsilon\{a, b\}, \quad a'\Sigma\{a, b_1\}$$
$$b_1\Upsilon\{a', b\}, \quad b'\Sigma\{a_1, b\}$$

et tels enfin que $x \in (a_1/b') \cap (b_1/a')$.

2.10. *Théorème. Toute structure géométrique analytique, fermée,* *forte* (2.8) *et O-modulaire est W-modulaire* (1.3).

2.11. *Théorème. Toute* (Υ, Σ)*-structure géométrique, analytique, fermée forte, O-modulaire et à interpolation cartésienne* ([2], 1.6.5) *jouit de la propriété suivante: Pour tous les* $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$ *et* $m\Sigma\{a, b\}$, *on a les isomorphismes au seus de l'ordre partiel:*

$$(d/a)X(d/b) \leftrightarrows \mathcal{E}(a, b; d, m) \leftrightarrows (a/m)\times(b/m)$$

où X *est comme à l'ordinaire le produit produit cartésien* ([2], 1.1 et 1.2.1) *alors que* $\mathcal{E}(a, b; d, m)$ *dénote l'ensemble de tous les éléments cartésiens* (2.9) *par rapport au* (Υ, Σ)*-quadrilatère* $(a, b; d, m)$. Cf. [4], Chap. V, Theorem 7.

2.12. *Théorème. La configuration* $\mathfrak{P}$ *étant munie d'une* (Υ, Σ)*-structure géométrique analytique, fermée, saturée, à interpolation cartésienne et O-modulaire (mais non G-distributive), il existe toujours des éléments* $d, e, f, a, v \in \mathfrak{P}$ *tels que*

$$d \not\geq e \not\geq f \not\geq d \not\geq f \not\geq e \not\geq d$$
$$u\Upsilon\{d, e\},\quad u\Upsilon\{e, f\},\quad u\Upsilon\{f, d\}$$
$$v\Sigma\{d, e\},\quad v\Sigma\{e, f\},\quad v\Sigma\{f, d\}$$
$$u\Upsilon\{u, x\},\quad x\Upsilon\{x, v\}$$
$$v\Sigma\{v, x\},\quad x\Sigma\{x, u\}$$

pour chaque $x \in \{d, e, f\}$. (Par structure géométrique *G-distributive*, j'entends une (Υ, Σ)-structure géométrique telle que les relations $a, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b'\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b'\}$ entraînent l'égalité $b=b'$.) Cf. [4], Chap. V, Theorem 4.

2.13. *Théorème* (de raffinement de Schreier). *La configuration* $\mathfrak{P}$ *étant munie d'une* (Υ, Σ)*-structure géométrique raffinante et W-modulaire, deux chaines finies d'éléments de* $\mathfrak{P}$ *aux extrémités communes, possèdent des raffinements isomorphes.* Cf. [5], § 3 et ibid., 2.5.

Références

[1] Mihail Benado: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés II, Manuscrit, Juillet (1960).

[2] ——: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés. I-II, Proc. Japan Acad., **36**, 590-597 (1960).

[3] ——: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II (Théorie des multistructures), Czechoslovak Math. Journal, **5** (80), 308-344 (1955).

[4] Garrett Birkhoff: Lattice Theory, revised edition, New-York (1948).

[5] Mihail Benado: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I, Czechoslovak Math. Journal, **4** (79), 105-129 (1954).