31. Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. III

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1966)

Introduction. Le même sujet que dans les Notes antérieures [2], [3] est poursuivi encore. Nous donnons à nouveau trois autres définitions de pseudoconvexité par rapport à une direction complexe, et montrons que deux de ces définitions sont équivalentes à l'ancienne ([2], [3]); la démonstration est faite par la méthode de M. K. Oka [1]. En outre nous éclaircissons quelques propriétés d'un domaine pseudoconvexe au sens de la troisième définition.

1. Des autres définitions. Soit D un domaine univalent dans l'espace de deux variables complexes w, z; donnons trois définitions de pseudoconvexité comme suit.

Définition 1. *Soit $w=f(z, t)$ une fonction continue sur l'ensemble $\{|z-z_0|\leqq r,\ 0\leqq t\leqq 1\}$ et holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$ pour tout t fixe, où z_0 et $r(>0)$ sont fixes. Supposons d'ailleurs que l'on ait $(w_0, z_0)\notin D$, $w_0=f(z_0, 0)$ et que $(f(z, 0), z)\in D$ pour $0<|z-z_0|\leqq r$. Dans ces circonstances nous disons que le domaine D est pseudoconvexe* (I) *par rapport à w, s'il existe un nombre positif δ tel que pour tout t dans $0\leqq t<\delta$ il existe dans $|z-z_0|<\varepsilon$ un point z satisfaisant à $(f(z, t), z)\notin D$, où ε est un nombre positif arbitrairement donné auparavant.*

Définition 2. *Considérons les trois domaines suivants:*

$$C\colon |z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r,$$
$$C_1\colon \rho'<|z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r,$$
$$C_2\colon |z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r'(<r),$$

où z_0, ρ, ρ', r, r' sont des nombres fixes quelconques et que $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage quelconque du cercle $|z-z_0|\leqq\rho$. Nous disons que le domaine D est pseudoconvexe (II) *par rapport à w, si nous avons $C\subset D$ pour tous tels domaines C, C_1, C_2 satisfaisant à $C_1+C_2\subset D$.*

Remarque 1. On peut supposer, sans perdre la généralité, que la fonction $f(z)$ dans la définition 2. est un polynôme ($\not\equiv cte.$). En effet, les domaines C, C_1, C_2 sont les limites des trois suites croissantes de domaines $C^{(n)}, C_1^{(n)}, C_2^{(n)}$, $n=1, 2, \cdots$, respectivement, où $C^{(n)}, C_1^{(n)}, C_2^{(n)}$ sont des formes suivantes:

$$C^{(n)}\colon |z-z_0|<\rho_n,\ |w-p_n(z)|<r_n,$$
$$C_1^{(n)}\colon \rho'_n<|z-z_0|<\rho_n,\ |w-p_n(z)|<r_n,$$

$$C_2^{(n)}: |z-z_0|<\rho_n,\ |w-p_n(z)|<r_n',$$

où ρ_n, ρ_n', r_n, r_n' sont des nombres positifs tels que $\rho_n\uparrow\rho$, $\rho_n'\downarrow\rho'$, $r_n\uparrow r$, $r_n'\uparrow r'$ pour $n\to\infty$, et que $p_n(z)$ sont des polynômes ($\not\equiv cte.$).

Définition 3. *Nous disons que le domaine D est pseudoconvexe* (III) *par rapport à w, lorsque, sous les hypothèses de la définition* 1, *si nous supposons de plus que $f'(z_0, 0)\neq 0$, nous avons la même conclusion que dans la définition* 1.

Remarque 2. On peut définir de même la pseudoconvexité par rapport à z, correspondant aux définitions 1, 2, 3. Il est de même pour la pseudoconvexité à une direction complexe.

2. Coïncidence de définitions. Pour distinguer plusieurs sortes de pseudoconvexité, la pseudoconvexité par rapport à w, définie dans [2], [3] sera appelée la pseudoconvexité (O) par rapport à w. Examinons d'abord les équivalences entre les pseudoconvexités (O), (I), (II).

Théorème. *Les trois sortes de pseudoconvexité* (O), (I), (II) *par rapport à w sont équivalentes.*

Preuve. Soit D un domaine. Démontrons le théorème en suivant le programme: (O)$\Rightarrow$(I)$\Rightarrow$(II)$\Rightarrow$(O).

(O) *entraîne* (I). En effet, pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre positif ε tel qu'il y ait un nombre t arbitrairement petit et satisfaisant à $(f(z, t), z)\in D$ pour tout z dans $|z-z_0|\leqq\varepsilon$. On peut trouver un nombre t_0 $(0<t_0<1)$ tel que $(f(z, t_0), z)\in D$ pour $|z-z_0|\leqq\varepsilon$ et que $(f(z, t), z)\in D$ pour $|z-z_0|=\varepsilon$ et $t<t_0$. En conséquence on a la famille des surfaces analytiques $\{F_t\}_{t_0\geqq t\geqq\tau}$, où F_t est représentée par l'équation $w=f(z, t)$, $|z-z_0|\leqq\varepsilon$ et que τ est le maximum de $t(<t_0)$ satisfaisant à $F_t\not\subset D$. C'est impossible, si le domaine D est pseudoconvexe (O) par rapport à w.

(I) *entraîne* (II). Soit D pseudoconvexe (I) par rapport à w, et soient C, C_1, C_2 des domaines expliqués dans la définition 2 et tels que $C_1+C_2\subset D$. En supposant que $f(z)$ est un polynôme, considérons la transformation analytique binuivoque $(w, z)\to(W, Z)$ définie par $Z=z-z_0$, $W=w-f(z)$. L'image de D par cette transformation est pseudoconvexe (I) par rapport à W, ce qui est aisément vérifié. Donc on peut supposer que les domaines C, C_1, C_2 sont des formes suivantes:

$$C: |z|<\rho,\ |w|<r,$$
$$C_1: \rho'<|z|<\rho,\ |w|<r,$$
$$C_2: |z|<\rho,\ |w|<r'.$$

S'il existait un point (a, b) de $C-D$, on aurait une contradiction. En effet, considérons l'expression

$$d(w, z)=(|1/w|^2+\lambda|z|^2)^{\frac{1}{2}},\ (\lambda \text{ est un nombre positif}).$$

Soit r_1 un nombre tel que $|a|<r_1<r$; on a pour λ assez petit,

$$d(a, b) > [(1/r_1)^2 + \lambda(\rho')^2]^{\frac{1}{2}} = d_1.$$

Il existe un point (ω, ζ) intérieur à C tel que $d(\omega, \zeta) = d_0 \equiv \sup\{d(w, z) \mid (w, z) \in C - D\}$, puisque l'on a $d(w, z) < d_1$ pour $(w, z) \notin D$ et $|w| > r_1$. Soit maintenant $\{E_t\}_{t \geq 1}$ la famille des surfaces analytiques définies par

$$E_t \colon 1/(\bar{\omega} w) + \lambda \bar{\zeta} z = d_0^2 t,\ t \geqq 1.$$

Pour (w, z) sur E_t, on a

$$d(w, z)^2 = d_0^2(t^2 + \lambda\,|\,\omega\,|^2\,|\,z - t\zeta\,|^2) \geqq d_0^2 t^2.$$

En conséquence, on a $E_1 \cap (C-D) = \{(\omega, \zeta)\}$. Et pour $t > 1$, on a $E_t \cap (C-D) = \emptyset$. Ceci est absurde. Donc D est pseudoconvexe (II) par rapport à w.

(II) *entraîne* (O). Soit D pseudoconvexe (II) par rapport à w. Soit $f(z, t)$ une fonction continue sur $\{|z - z_0| \leqq r_0,\ 0 \leqq t \leqq 1\}$, holomorphe dans un voisinage du cercle $|z - z_0| \leqq r_0$ pour tout t fixe. Soit $\{F_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ la famille des surfaces analytiques définies par $w = f(z, t)$, $|z - z_0| \leqq r_0$, $0 \leqq t \leqq 1$. Supposons que Fr. $F_0 \subset D$ et $F_t \subset D$ pour $0 < t \leqq 1$. Pour ρ et ρ' $(\rho' < r_0 < \rho)$ suffisamment voisins de r_0 et pour r suffisamment petit, tous les points (w, z) satisfaisant à

$$\rho' < |z - z_0| < \rho,\ |w - f(z, 0)| < 2r,$$

appartiennent au domaine D. Soit t_0 $(0 < t_0 \leqq 1)$ une valeur telle que $|f(z, 0) - f(z, t_0)| < r$ pour $|z - z_0| \leqq \rho$. Posons $f(z) = f(z, t_0)$ et désignons par C_1 le domaine

$$\rho' < |z - z_0| < \rho,\ |w - f(z)| < r.$$

C_1 est contenu dans D, puisque $|w - f(z, 0)| \leqq |w - f(z, t)| + |f(z, t_0) - f(z, 0)| < 2r$ pour (w, z) dans C_1.

En prenant ρ suffisamment voisin de r_0, et $r'(>0)$ suffisamment petit, on peut conclure que le domaine

$$C_2 \colon |z - z_0| < \rho,\ |w - f(z)| < r'$$

est contenu dans D. Par conséquent, le domaine

$$C \colon |z - z_0| < \rho,\ |w - f(z)| < r$$

est aussi contenu dans D.

Soit (w, z) un point quelconque de F_0, on a

$$|w - f(z)| = |f(z, 0) - f(z, t_0)| < r,$$

c'est-à-dire que $(w, z) \in C \subset D$. C.Q.F.D.

Le théorème étant établi, on peut dire simplement que D est pseudoconvexe par rapport à w, si D est pseudoconvexe (O) ou (I) ou (II) par rapport à w.

3. La troisième pseudoconvexité. Concernant la pseudoconvexité (III) nous avons d'abord le

Lemme 1. *Si la pseudoconvexité* (III) *par rapport à w n'entraîne pas nécessairement la pseudoconvexité* (II) *par rapport à w, il existe un domaine D et trois domaines cylindriques $C \colon |z| < \rho,\ |w| < r$, $C_1 \colon \rho' < |z| < \rho,\ |w| < r$, $C_2 \colon |z| < \rho,\ |w| < r'(< r)$, et enfin une fonction*

$p(z)$ ($\not\equiv cte.$), tels que les trois conditions suivantes soient remplies:

1°. $C_1+C_2\subset D$ *et* $C-D=A\neq\emptyset$.

2°. $p(z)$ *est holomorphe dans un voisinage du cercle* $|z|\leqq\rho$.

3°. *Soit* $w=f(z,t)$ *une fonction continue sur* $\{|z-z_1|\leqq r_1, 0\leqq t\leqq 1\}$, *holomorphe en* z *dans un voisinage du cercle* $|z-z_1|\leqq r_1$ *pour tout* t *fixe, où* z_1 *est un point dans* $|z|<\rho$ *et que* r_1 *est un nombre positif assez petit pour que le cercle* $|z-z_1|\leqq r_1$ *soit contenu dans* $|z|<\rho$. *Supposons que* $(f(z_1,0),z_1)\notin D$ *et* $f'(z_1,0)+p'(z_1)\neq 0$ *et que* $(f(z,0),z)\in D$ *pour* $0<|z-z_1|\leqq r_1$; *alors pour tout* ε *positif, il existe un* δ *positif tel que pour tout* t *dans* $0\leqq t<\delta$ *la relation* $(f(z,t),z)\notin D$ *soit remplie par un certain point* z *dans* $|z-z_1|<\varepsilon$.

Preuve. Par l'hypothèse, il existe un domaine D et trois domaines C: $|z-z_0|<\rho$, $|w-f(z)|<r$, C_1: $\rho'<|z-z_0|<\rho$, $|w-f(z)|<r$, C_2: $|z-z_0|<\rho$, $|w-f(z)|<r'(<r)$ tels que l'on ait $C_1+C_2\subset D$ et $C\not\subset D$, où $f(z)$ est un polynôme. Transformons l'espace (w,z) par $z\to z-z_0$, $w\to w-f(z)$; alors l'image de D satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° concernant les images C, C_1, C_2, et le polynôme $p(z)=f(z+z_0)$.

Lemme 2. *Supposons qu'un domaine* D, *trois domaines cylindriques* C: $|z|<\rho$, $|w|<r$, C_1: $\rho'<|z|<\rho$, $|w|<r$, C_2: $|z|<\rho$, $|w|<r'$ *et une fonction* $p(z)$ ($\not\equiv cte.$) *satisfassent aux conditions* 1°, 2°, 3° *du lemme* 1. *Désignons par* A_1 *l'ensemble* $\{(|\varphi(z)|^2, |1/w|^2)\mid (w,z)\in A\}$, *où* $\varphi(z)$ *est une fonction holomorphe et univalente dans un voisinage du cercle* $|z|\leqq\rho$. *Soit* (a,b) *un point quelconque de* A *tel que l'on ait* $|a|=\min.\{|w|\mid (w,z)\in A\}$ *et* $|\varphi(b)|=\max.\{|\varphi(z)|\mid (w,z)\in A, |w|=|a|\}$. *Alors la fonction* $y=H(x)$ *représentant la frontière supérieure du plus petit ensemble convexe contenant* A_1 *est concave, décroissante et continûment dérivable dans un intervalle* $[|\varphi(b)|^2, |\varphi(c)|^2]$ (*où* $|\varphi(c)|$ *est assez voisin de* $|\varphi(b)|$).

Preuve. D'abord on vérifie qu'il existe des points (w,z) de A tels que $|\varphi(z)|>|\varphi(b)|$. En effet, sinon, on a $|\varphi(z)|\leqq|\varphi(b)|$ pour $(w,z)\in A$. Considérons l'expression

$$\Phi(w,z)=|1/w|^2+\lambda|\varphi(z)|^2,\ (\lambda \text{ est un nombre positif}),$$

et posons $\Phi_0=\Phi(a,b)$. On a $\Phi(w,z)\leqq\Phi_0$ pour $(w,z)\in A$, dont l'égalité a lieu seulement si $|w|=|a|$, $|\varphi(z)|=|\varphi(b)|$. Maintenant soit $\{E_t\}_{t\geqq 1}$ la famille des surfaces analytiques définies par

$$E_t:\ 1/(\bar{a}w)+\lambda\overline{\varphi(b)}\varphi(z)=\Phi_0 t,\ t\geqq 1.$$

Pour (w,z) sur E_t, on a

$$\Phi(w,z)=\Phi_0[t^2+\lambda|a|^2|\varphi(z)-t\varphi(b)|^2]\geqq\Phi_0 t^2.$$

En conséquence, on a $E_1\cap A=\{(a,b)\}$. Et pour $t>1$, on a $E_t\cap A=\emptyset$. En outre, si l'on désigne par $w=f(z,t)$ la fonction représentant E_t, on a $f'(b,1)=\lambda\bar{a}a^2\overline{\varphi(b)}\varphi'(b)$; donc, si $\varphi(b)\neq 0$, il y a un nombre positif λ tel que l'on ait $f'(b,1)+p'(b)\neq 0$. Cela est en contradiction avec l'hypothèse 3°. Dans le cas $\varphi(b)=0$, considérons l'expression $\psi(w,z)=|1/w|+\lambda|\varphi(z)|$. On a $\psi(w,z)\leqq|1/a|$ pour $(w,z)\in A$, dont l'égalité a lieu seulement si $|w|=|a|$, $z=b$. Soit $\{F_t\}_{t\geqq 1}$ la famille des surfaces analytiques définies par

$$F_t\colon 1/w+\lambda\varphi(z)=t/a, \qquad t\geqq 1.$$

Pour $(w,z)\in F_t$, on a $\psi(w,z)\geqq|t/a|$. Donc on a $F_1\cap A=\{(a,b)\}$. Et on a $F_t\cap A=\varnothing$ pour $t>1$. En outre, si l'on désigne par $w=g(z,t)$ l'équation de F_t, on a $g'(b,1)=\lambda a^2\varphi'(b)$; donc il y a un nombre positif λ tel que l'on ait $g'(b,1)+p'(b)\neq 0$. C'est aussi absurde. Par conséquent, il existe des points (w,z) de A, satisfaisant à $|\varphi(z)|>|\varphi(b)|$, et la fonction concave et décroissante $y=H(x)$ est définie dans un intervalle $[|\varphi(b)|^2, |\varphi(c)|^2]$.

Soit α un nombre quelconque satisfaisant à $|\varphi(b)|^2<\alpha<|\varphi(c)|^2$. Supposons que l'on ait $H'_-(\alpha)>H'_+(\alpha)$. Alors on peut trouver un domaine angulaire Δ ayant le sommet (α,β) et contenant A_1, où $\beta=H(\alpha)$. Le point (α,β) est situé sur $\bar{A}_1$, et donc il existe une suite (w_n,z_n), $n=1,2,\cdots$, de points de A, qui converge vers un point (w_0,z_0) de $\bar{A}$, et telle que la suite $(\alpha_n,\beta_n)(\alpha_n=|\varphi(z_n)|^2, \beta_n=|1/w_n|^2)$, $n=1,2,\cdots$, converge vers (α,β). On a $|z_n|\leqq\rho'$, $|w_n|^2=\beta_n^{-1}<[H(|\varphi(c)|^2)]^{-1}<r^2$; donc on a $|z_0|\leqq\rho'$ et $|w_0|^2=\beta^{-1}<r^2$. Par conséquent, on a $(w_0,z_0)\in A$ et $\alpha=|\varphi(z_0)|^2$, $\beta=|1/w_0|^2$, c'est-à-dire que $(\alpha,\beta)\in A_1$.

Choisissons $\lambda(>0)$ de manière que la ligne droite $y+\lambda x=\Phi_0(=\beta+\lambda\alpha)$ se place en dehors de Δ, excepté le point (α,β). On voit qu'une infinité de telles valeurs existent. Considérons la famille des surfaces analytiques

$$E_t\colon 1/(\overline{w}_0 w)+\lambda\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)=\Phi_0 t,\ t\geqq 1.$$

Soit $w=f(z,t)$ l'équation de E_t; on a $f'(z_0,1)=\lambda\overline{w}_0 w_0^2\overline{\varphi(z_0)}\varphi'(z_0)$. Donc on peut trouver un λ tel que $f'(z_0,1)+p'(z_0)\neq 0$. D'autre part, il est facile de voir que $E_1\cap A=\{(w_0,z_0)\}$ et $E_t\cap A=\varnothing$ pour $t>1$. C'est en contradiction avec 3°.

Donc on a $H'_-(\alpha)=H'_+(\alpha)$. Cette égalité pour tout α entraîne que la fonction $y'=H'(x)$ est continue, car elle est décroissante.

Lemme 3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 2, posons* $|b|=\max.\{|z|\,|\,(w,z)\in A,\ |w|=|a|\}$. *Alors sur le cercle* $|z|=|b|$, *il n'y a qu'un nombre fini de points z tels qu'il existe de points* (w,z) *de A satisfaisant à* $|w|=|a|$. (Pour A, a, voir les lemmes 1, 2.)

Preuve. En effet, il suffit de prouver que, si $(\omega,\zeta)\in A$ et $|\omega|=|a|$, $|\zeta|=|b|$, on a $p'(\zeta)=0$. Posons

$$\Phi_\lambda(w,z)=|1/w|^2+\lambda|z|^2,\ (\lambda \text{ est un nombre positif}),$$

et désignons par $\Phi_\lambda=\Phi_\lambda(w_\lambda,z_\lambda)((w_\lambda,z_\lambda)\in A)$ le maximum de $\{\Phi_\lambda(w,z)\,|\,(w,z)\in A\}$. On a $\lim_{\lambda\to 0}|w_\lambda|=|a|$, $\lim_{\lambda\to 0}|z_\lambda|=|b|$. En effet, Φ_λ converge vers une valeur $\Phi_0(\geqq |1/a|^2)$, quand $\lambda \to 0$, puisqu'on a $\Phi_\lambda \geqq \Phi_{\lambda'}$ pour $\lambda \geqq \lambda'$. Soit (ω', ζ') un point limite de (w_λ, z_λ) pour $\lambda \to 0$; on a $|\omega'| = |a|$, $|\zeta'| = |b|$, puisque $|z_\lambda| \geqq |b|$.

Considérons la surface analytique $E(\lambda)$: $1/(\bar{w}_\lambda w) + \lambda \bar{z}_\lambda z = \Phi_\lambda$, ou $w = f(z) = w_\lambda^{-1}(\Phi_\lambda - \lambda \bar{z}_\lambda z)^{-1}$. On a $f'(z_\lambda) = \lambda \bar{w}_\lambda w_\lambda^2 \bar{z}_\lambda$. Si l'on a $p'(z) \neq 0$ pour $(w, z) \in A$ et $|w| = |a|$, $|z| = |b|$, il y a un λ tel que $f'(z_\lambda) + p'(z_\lambda) \neq 0$; on peut conduire une contradiction par le même raisonnement que dans le lemme 2. Il faut donc qu'il existe un point $(\omega'', \zeta'') \in A$ sur $|w| = |a|$, $|z| = |b|$, tel que $p'(\zeta'') = 0$.

Transformons D en D' par $Z = z + \mu\zeta$ (où μ est un nombre positif assez petit). D' jouit des propriétés 1°, 2°, 3° du lemme 1, par rapport à $w, Z, p(Z - \mu\zeta)$, etc. Soit A' l'image de A; on a $|w| \geqq |a|$ pour $(w, Z) \in A'$, et $|Z| \leqq |b|(1+\mu)$ pour tout $(w, Z) \in A'$ satisfaisant à $|w| = |a|$. Il est évident qu'il n'y a pas de points (w, Z) de A' satisfaisant à $|w| = |a|$ et $|Z| = |b|(1+\mu)$ excepté des points (w, Z) satisfaisant à $Z = \zeta(1+\mu)$. Comme ce raisonnement pour D est aussi vrai pour D', on voit qu'il existe un point (ω'', ζ'') de A' tel que $|\omega''| = |a|$, $|\zeta''| = |b|(1+\mu)$, et $p'(\zeta'' - \mu\zeta) = 0$. Mais il faut que $\zeta'' = \zeta(1+\mu)$; par conséquent, on a $p'(\zeta) = 0$.

Références

[1] K. Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Japanese Jour. Math., **27**, 97-155 (1953).

[2] I. Kimura: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. Proc. Japan Acad., **41** (7), 535-540 (1965).

[3] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. II. Proc. Japan Acad., **41** (9), 791-794 (1965).