49. Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. V

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., March 12, 1966)

Introduction. Nous avons examiné quelques propriétés des quatre sortes de pseudoconvexité, [1]~[4]. Le but principal de cette Note est d'améliorer ou de fortifier des résultats obtenus dans [1], [2], c'est-à-dire d'établir le théorème que tout domaine pseudoconvexe à une seule direction complexe est pseudoconvexe au sens ordinaire. En tant qu'une application de ce théorème, nous simplifions la condition suffisante classique, expliquée par le rayon de Hartogs, pour qu'un domaine soit pseudoconvexe. Pareillement aux Notes antérieures nous considérons toujours des domaines D univalents dans l'espace de deux variables complexes w, z.

1. Résultat principal. Avant d'étudier notre théorème nous démontrons d'abord le

Lemme 1. *Si un domaine D est pseudoconvexe par rapport à w, D est pseudoconvexe par rapport à z.*

Preuve. En vertu du théorème, [4], il suffit de montrer qu'un domaine D pseudoconvexe par rapport à w est pseudoconvexe (III) par rapport à z. Soit $z=g(w, t)$ une fonction continue sur $\{|w-w_0|\leqq R, 0\leqq t\leqq 1\}$, holomorphe en w dans un voisinage du cercle $|w-w_0|\leqq R$ pour tout t fixe. Supposons que l'on ait $(w_0, z_0)\notin D$, $z_0=g(w_0, 0)$ et que $(w, g(w, 0))\in D$ pour $0<|w-w_0|\leqq R$ et enfin que $g'(w_0, 0)\neq 0$. Alors, l'équation $z=g(w, t)$ peut être résolue dans un voisinage de $w=w_0, z=z_0$ pour t suffisamment petit, et la solution $w=f(z, t)$ est définie et continue sur l'ensemble $\{|z-z_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq \tau\}$, holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$ pour tout t fixe, où r, τ sont des nombres positifs suffisamment petits.

En effet, pour r_0 positif assez petit, on a $g(w, 0)-z_0\neq 0$ pour $0<|w-w_0|\leqq r_0$. Soient r_1, τ des nombres positifs suffisamment petits; on a $|(g(w, t)-z)-(g(w, 0)-z_0)|<m$ pour $|w-w_0|=r_0$, $|z-z_0|<r_1$ et $0\leqq t\leqq \tau$, où $m=\min.\{|g(w, 0)-z_0|\,|\,|w-w_0|=r_0\}$. Si $|z-z_0|<r_1$ et $0\leqq t\leqq \tau$, il existe un unique point $w=f(z, t)$ dans $|w-w_0|<r_0$, tel que $z=g(w, t)$. La formule

$$f(z, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-w_0|=r_0}\frac{wg'(w, t)}{g(w, t)-z}dw$$

montre ce que nous voulons prouver. (Pour le voir, il suffit de prendre un r positif et plus petit que r_1.)

D'ailleurs, si $0<|z-z_0|\leqq r$, on a $0<|w-w_0|<R$, $w=f(z, 0)$, de sorte que $(f(z, 0), z)\in D$. Par conséquent, pour ε_1 positif, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0\leqq t<\delta$ $(<\tau)$, il existe un point z dans $|z-z_0|<\varepsilon_1$, satisfaisant à $(f(z, t), z)\notin D$. Ensuite, pour tout ε positif, il existe des nombres positifs ε_1 et δ tels que l'on ait $|f(z, t)-w_0|<\varepsilon$ pour $|z-z_0|<\varepsilon_1$, $0\leqq t<\delta$. Donc, pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0\leqq t<\delta$, il existe un point w dans $|w-w_0|<\varepsilon$, satisfaisant à $(w, g(w, t))\notin D$; c'est-à-dire que D est pseudoconvexe (III) par rapport à z. C.Q.F.D.

Le lemme étant établi, le théorème suivant est facile à démontrer.

Théorème. *Si un domaine D est pseudoconvexe par rapport à w, D est pseudoconvexe.*

En effet, d'après le lemme 1, D est pseudoconvexe par rapport à z. En vertu du corollaire 2, [2], D est pseudoconvexe.

Corollaire 1. *Si un domaine D est pseudoconvexe à une direction complexe (a, b), D est pseudoconvexe.*

Corollaire 2. *Si un domaine D remplit une des conditions suivantes, D est pseudoconvexe.*

(0) *D est pseudoconvexe* (O) *par rapport à w.*

(1) *D est pseudoconvexe* (I) *par rapport à w.*

(2) *D est pseudoconvexe* (II) *par rapport à w.*

(3) *D est pseudoconvexe* (III) *par rapport à w.*

2. Une application. Pour examiner la relation entre la pseudoconvexité et le rayon de Hartogs, nous démontrons un lemme.

Lemme 2. *Soit D un domaine et soit $R_w(z)$ le rayon de Hartogs de D par rapport à w; alors D est pseudoconvexe par rapport à w, si et seulement si la fonction*

$$F(w, z)=-\log R_w(z)$$

est plurisousharmonique dans D.

Preuve. Nous avons déjà vu dans [1], que la fonction $F(w, z)$ est plurisousharmonique dans D, si D est pseudoconvexe par rapport à w; donc il ne nous reste qu'à démontrer la réciproque. Supposons que $F(w, z)$ soit plurisousharmonique dans D. Soit $f(z)$ un polynôme fixe mais quelconque. Considérons des trois domaines:

$$C\colon |z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r,$$
$$C_1\colon \rho'<|z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r,$$
$$C_2\colon |z-z_0|<\rho,\ |w-f(z)|<r'(<r),$$

tels que $C_1+C_2\subset D$, et prouvons $C\subset D$.

Transformons D en D' par

$$W=w-f(z),\ Z=z-z_0;$$

alors la fonction $F'(W, Z)=-\log R'_W(Z)$ est plurisousharmonique dans D', où $R'_W(Z)$ est le rayon de Hartogs de D' par rapport à W. En effet, puisque, si l'on fixe z, la transformation considérée réduit à une translation du plan w, on a

$$R'_W(Z)=R_w(z),$$

où $w=W+f(Z+z_0)$, $z=Z+z_0$. Par conséquent, en utilisant D' au lieu de D, on peut supposer, sans perdre la généralité, que $f(z)\equiv 0$ et $z_0=0$, c'est-à-dire que les trois domaines ont les expressions

$$C\colon |z|<\rho,\ |w|<r,$$
$$C_1\colon \rho'<|z|<\rho,\ |w|<r,$$
$$C_2\colon |z|<\rho,\ |w|<r'.$$

Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il y ait un point de $C-D$. Désignons par μ la borne inférieure de l'ensemble

$$\{|w|\ |\ (w, z)\in C-D\},$$

et par (w_0, z_0) un point de $C-D$ tel que $\mu=|w_0|$. Il est clair qu'un tel point (w_0, z_0) existe, et on a $\mu>0$. Posons $w'_0=w_0(1-\varepsilon)$, où ε est un nombre positif assez petit; alors on a

$$R_{w'_0}(z)>\varepsilon\mu \qquad \text{pour } \rho'<|z|<\rho$$

et

$$R_{w'_0}(z_0)=\varepsilon\mu.$$

Ceci est absurde, car, pour la fonction $F(w'_0, z)$ sousharmonique dans $|z|<\rho$, on a $F(w'_0, z)<-\log\varepsilon\mu$ pour $\rho'<|z|<\rho$, et $F(w'_0, z_0)=-\log\varepsilon\mu$.

Par conséquent D est pseudoconvexe (II) par rapport à w.

Corollaire 3. *Soit D un domaine et soit $R_w(z)$ le rayon de Hartogs de D par rapport à w. Alors D est pseudoconvexe, si et seulement si la fonction*

$$F(w, z)=-\log R_w(z)$$

est plurisousharmonique dans D.

Plus généralement, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine D soit pseudoconvexe, est que la fonction $F(w,z;a,b)=-\log R(w, z; a, b)$ est plurisousharmonique dans D, où (a, b) est une direction complexe et où $R(w, z; a, b)$ est le rayon de Hartogs de D à la direction (a, b).

Références

[1] I. Kimura: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. Proc. Japan Acad., **41** (7), 535-540 (1965).
[2] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. II. Proc. Japan Acad., **41** (9), 791-794 (1965).
[3] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. III. Proc. Japan Acad., **42** (2), 125-130 (1966).
[4] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. IV. Proc. Japan Acad., **42** (2), 131-135 (1966).