127. *Sur la pseudoconvexité par rapport à une direction. II*

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 13, 1966)

3. Résultat principal. Avant poursuivre nos considérations, expliquons brièvement la notion du rayon de Hartogs d'une région.

Soit D une région dans l'espace de $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Soit $z^0=(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_n^0)$ un point de D; désignons par $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$ la section $\{z_n \mid (z_1^0, \cdots, z_{n-1}^0, z_n) \in D\}$ de D par le plan $z_i=z_i^0$, $i=1,2,\cdots,n-1$, et par $R_{z_n^0}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$ la distance du point z_n^0 à la frontière de $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{n-1}^0)$. La fonction $R_{z_n}(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$ est définie et semi-continue inférieurement dans D, et dite le rayon de Hartogs de D par rapport à z_n.

Dans les lemmes et les théorèmes suivants, pour des raisons de convenance, nous désignerons les variables de l'espace considéré par $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ou bien $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$ suivant les circonstances.

Nous avons le

Lemme 3. *Si une région D de l'espace $z_1, z_2, \cdots, z_n$ est pseudo-convexe par rapport aux variables $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$, alors la fonction*

$$G(z_1, z_2, \cdots, z_n) = -\log R_{z_n}(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$$

est plurisousharmonique dans D.

Preuve. $G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ est semi-continu supérieurement dans D. Donc il suffit de démontrer la sousharmonicité de la restriction de $G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ à une droite complexe L. On peut supposer que l'origine O se place sur L et que le point considéré est O.

1°. Soit L de la forme: $z_i=a_i z_1$, $(i=2, 3, \cdots, n)$. Considérons la transformation

$$Z_1=z_1,\ Z_i=z_i-a_i z_1,\ (i=2, 3, \cdots, n).$$

Si l'on désigne par D', L' les images de D, L, respectivement, L' est représenté par $Z_i=0$, $(i=2, 3, \cdots, n)$ et D' est pseudoconvexe par rapport à Z_1. Et pour $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ fixes, la transformation n'est d'autre qu'une translation du plan z_n. Donc, si l'on désigne par $R'_{Z_n}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n-1})$ le rayon de Hartogs de D' par rapport à Z_n, on a

$$R'_{Z_n}(Z_1, \cdots, Z_{n-1}) = R_{z_n}(z_1, \cdots, z_{n-1}).$$

En conséquence, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que L est de la forme: $z_i=0$, $(i=2, 3, \cdots, n)$.

$G(z_1, 0, \cdots, 0)$ *n'atteint aucun maximum local dans un voisinage* *de l'origine* $z_1=0$.

En effet, sinon, il y a un voisinage fermé $|z_1-z_1^0|\leqq\rho$ d'un point z_1^0, qui se place dans le voisinage considéré, tel que

$$G(z_1, 0, \cdots, 0) < G(z_1^0, 0, \cdots, 0) \quad \text{sur} \quad |z_1-z_1^0|=\rho.$$

Or, il existe un m positif et satisfaisant à

$$R_0(z_1, 0, \cdots, 0)>m>R_0(z_1^0, 0, \cdots, 0) \quad \text{sur} \quad |z_1-z_1^0|=\rho.$$

Par conséquent, les ensembles

$$\{|z_1-z_1^0|\leqq\rho,\ z_i=0,\ i=2, 3, \cdots, n\}$$

et

$$\{|z_1-z_1^0|=\rho,\ z_i=0,\ |z_n|\leqq m,\ i=2, 3, \cdots, n-1\}$$

sont situés dans D. D'après la pseudoconvexité (II) par rapport à z_1, il faut que l'ensemble

$$\{|z_1-z_1^0|\leqq\rho,\ z_i=0,\ |z_n|\leqq m,\ i=2, 3, \cdots, n-1\}$$

soit contenu dans D. Mais cela est absurde, puisque $R_0(z_1^0, 0, \cdots, 0)<m$.

Soit ensuite $u(z_1)$ une fonction harmonique dans $|z_1|<\infty$, et $f(z_1)$ une fonction entière, dont la partie réelle est égale à $-u(z_1)$. Considérons la transformation

$$Z_i=z_i,\ Z_n=z_n e^{f(z_1)},\ (i=1, 2, \cdots, n-1);$$

alors l'image D' de D est pseudoconvexe par rapport à Z_1, et l'image L' de L est de la forme: $Z_i=0$, $(i=2, 3, \cdots, n)$. Sur L' on a

$$R_0'(Z_1, 0, \cdots, 0)=e^{-u(z_1)}R_0(z_1, 0, \cdots, 0),$$

où $R'_{Z_n}(Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ désigne le rayon de Hartogs de D' par rapport à Z_n. Par conséquent, la fonction $G(z_1, 0, \cdots, 0)+u(z_1)$ n'atteint aucun maximum local dans un voisinage de l'origine, ainsi que $G(z_1, 0, \cdots, 0)$; donc $G(z_1, 0, \cdots, 0)$ est sousharmonique.

2°. Soit L de la forme: $z_i=0$, $(i=1, 2, \cdots, n-1)$. Alors la valeur $R_{z_n}(0, \cdots, 0)$ est égale à la distance du point z_n à la frontière de la région $D(0, \cdots, 0)$, et donc la fonction $G(0, \cdots, 0, z_n)=-\log R_{z_n}(0, \cdots, 0)$ est sousharmonique. C.Q.F.D.

Les preuves des deux lemmes suivants 4 et 5 sont tout à fait analogues à celles du lemme 2, [2]*) et du théorème 1, [2], respectivement, et nous ne les exposons pas.

Lemme 4. *Soit D une région dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$, pseudoconvexe par rapport à x, et soit m un nombre positif assez petit; alors la région $D^{(m)}=\{(x, y)\,|\,\text{dist.}\,[(x, y), Fr.\,D]>m\}$ est aussi pseudoconvexe par rapport à x.*

Lemme 5. *Dans l'espace des mêmes variables que dans le lemme 4, soit $\{D_\nu\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, une suite croissante de régions pseudoconvexes par rapport à x (ou pseudoconvexes au sens usuel); alors sa limit D est pseudoconvexe par rapport à x (ou pseudoconvexe au sens usuel).*

*) Les chiffres arabiens renvoient à la bibliographie placée à la fin de la Note précédente.

Lemme 6. *Soit D une région dans l'espace $z_1, z_2, \cdots, z_n$, et soit m un nombre positif assez petit; alors la fonction*

$$F(z) = \min. \{R_i(z),\ i=1, 2, \cdots, n\}^{**)}$$

tend vers 0, lorsque z tend vers la frontière de $D^{(m)}$, où $D^{(m)}$ est la région expliquée dans le lemme 4 et où $R_i(z)$ sont les rayons de Hartogs de $D^{(m)}$ par rapport à z_i, $i=1, 2, \cdots, n$, respectivement.

Preuve. Pour démontrer le lemme, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $\{z^{(\nu)}\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, de points de $D^{(m)}$, qui converge vers un point frontière z^0 de $D^{(m)}$, et que $R_i(z^{(\nu)}) \geqq 2k_0$, $\nu=1, 2, \cdots$, $i=1, 2, \cdots, n$, où k_0 est un nombre positif. Alors, il existe un point z^1 de Fr. D tel que $\sum_{i=1}^{n} |z_i^1 - z_i^0|^2 = m^2$. Désignons par $B_i(z)$ l'ensemble

$$\{(z_1, \cdots, z_{i-1}, z_i+u, z_{i+1}, \cdots, z_n) \mid |u| \leqq k_0\}$$

et par $C_i(z)$ l'ensemble $\{z' \mid \text{dist.}\ [z', B_i(z)] < m\}$. Il est clair que $C_i(z^{(\nu)}) \subset D$. Donc on a $C_i(z^0) \subset D$, puisque $C_i(z^{(\nu)})$ converge vers $C_i(z^0)$ pour $\nu \to \infty$. En outre, z^1 est situé sur Fr. $C_i(z^0)$ et en même temps sur l'hypersphère $S: \sum_{i=1}^{n} |z_i - z_i^0|^2 = m^2$. Or, on a

$$S \cap \text{Fr.}\ C_i(z^0) \subset \{z_i = z_i^0\},$$

car, pour tout point z sur S tel que $z_i \neq z_i^0$, il existe une valeur complexe u arbitrairement petite et telle que l'on ait

$$\sum_{j \neq i} |z_j - z_j^0|^2 + |z_i - z_i^0 - u|^2 < m^2,$$

c'est-à-dire que l'on a $z \in C_i(z^0)$. Par conséquent, on a

$$z_i^1 = z_i^0,\ i=1, 2, \cdots, n;$$

cela est en contradiction. C.Q.F.D.

Corollaire 1. *Dans l'espace de $z_1, z_2, \cdots, z_n$, soit D une région pseudoconvexe par rapport à toutes les variables $z_1, z_2, \cdots, z_n$; alors D est pseudoconvexe au sens usuel.*

Preuve. Soit m un nombre positif assez petit; $D^{(m)}$ est pseudoconvexe par rapport à toutes les variables $z_1, z_2, \cdots, z_n$, d'après le lemme 4. (Pour $D^{(m)}$, voir le même lemme.) Donc, d'après le lemme 3, les fonctions $-\log R_i(z)$, $i=1, 2, \cdots, n$, sont plurisousharmoniques dans $D^{(m)}$. (Pour $R_i(z)$, voir le lemme 6.) En vertu du lemme précédent, la fonction plurisousharmonique

$$G(z) = \max. \{-\log R_i(z),\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

tend vers l'infini, lorsque z tend vers Fr. $D^{(m)}$. Donc $D^{(m)}$ est pseudoconvexe au sens usuel. Comme la région D est la limite de $D^{(m)}$ pour $m \to 0$, d'après le lemme 5, D est pseudoconvexe. C.Q.F.D.

Lemme 7. *Si une région D de l'espace $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$, est pseudoconvexe par rapport à x, alors D est pseudoconvexe par rapport à $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$.*

**) z désigne le point $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

Preuve. En vertu du lemme 2, il suffit de montrer que la pseudoconvexité par rapport à x entraîne la pseudoconvexité (III, x) par rapport à y_1.

Supposons que D soit pseudoconvexe par rapport à x. Et prenons $n-1$ fonctions

$$x=f(y_1, t),\ y_i=f_i(y_1, t),\ i=2, 3, \cdots, n-1,$$

qui sont continues sur un ensemble $\{|y_1-y_1^0|\leqq r_0, 0\leqq t\leqq 1\}$ et holomorphes en y_1 sur $|y_1-y_1^0|\leqq r_0$ pour tout t fixe. Supposons que l'on ait

$$(x_0, y^0)\notin D,\ x_0=f(y_1^0, 0),\ y_i^0=f_i(y_1^0, 0),\ i=2, 3, \cdots, n-1,$$

et pour $0<|y_1-y_1^0|\leqq r_0$, on ait

$$(x, y)\in D,\ x=f(y_1, 0),\ y_i=f_i(y_1, 0),\ i=2, 3, \cdots, n-1,$$

et enfin que l'on ait $f'(y_1^0, 0)\neq 0$.

Soit $y_1=g_1(x, t)$ la solution de l'équation $x=f(y_1, t)$; alors la fonction $y_1=g_1(x, t)$ est définie, continue sur un ensemble $\{|x-x_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq t_0\}$, et holomorphe en x sur $|x-x_0|\leqq r$ pour tout t fixe, où r et t_0 sont des nombres assez petits. (Voir le lemme 1, [5].) Posons

$$y_i=g_i(x, t)=f_i(g_1(x, t), t),\ i=2, 3, \cdots, n-1;$$

alors les $n-1$ fonctions $y_i=g_i(x, t), i=1, 2, \cdots, n-1$, sont définies, continues sur $\{|x-x_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq t_0\}$ et holomorphes en x sur $|x-x_0|\leqq r$ pour tout t fixe. D'ailleurs, si $0<|x-x_0|\leqq r$, on a $0<|y_1-y_1^0|\leqq r_0$, $y_1=g_1(x, 0)$, de sorte que $(x, y)\in D$, $y_i=g_i(x, 0)$, $i=2, 3, \cdots, n-1$. Par conséquent, d'après la pseudoconvexité par rapport à x, pour tout ε_1 positif, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0\leqq t<\delta(<t_0)$, il y a un point x dans $|x-x_0|<\varepsilon_1$, satisfaisant à $(x, y)\notin D$, $y_i=g_i(x, t)$, $i=1, 2, \cdots, n-1$. Ensuite, pour tout ε positif, il existe des nombres positifs ε_1 et δ tels que l'on ait $|g_1(x, t)-y_1^0|<\varepsilon$ pour $|x-x_0|<\varepsilon_1$, $0\leqq t<\delta$. Donc, pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que, pour tout t dans $0\leqq t<\delta$, il existe un point y_1 dans $|y_1-y_1^0|<\varepsilon$, satisfaisant à $(x, y)\notin D$, $x=f(y_1, t)$, $y_i=f_i(y_1, t)$, $i=2, 3, \cdots, n-1$; c'est-à-dire que D est pseudoconvexe (III, x) par rapport à y_1. C.Q.F.D.

En vertu du lemme 7 et du corollaire 1, nous avons le

Théorème 2. *Si une région D est pseudoconvexe par rapport à une des variables de l'espace, D est pseudoconvexe au sens ordinaire.*

Corollaire 2. *Dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$, une région D est pseudoconvexe, si et seulement si D est pseudoconvexe au sens d'une des définitions 1, 2, 3, 4, par rapport à x.*

Corollaire 3. *Dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$, une région D est pseudoconvexe, si et seulement si la région D_{Π} déterminée par D et par la variété*

$$\prod : y_i=a_i u+b_i(x),\ (i=1, 2, \cdots, n-1),$$

est toujours pseudoconvexe, où a_i sont des constantes satisfaisant à $\sum|a_i|\neq 0$, et que $b_i(x)$ sont des polynômes, mais $a_i, b_i(x)$ sont *d'ailleurs arbitraires.* (Pour les notations, voir le lemme 1.)

Dans le cas $n=3$, en désignant les variables de l'espace par x, y, z, nous avons le

Corollaire 4. *Soit* $\prod$ *la variété définie par*

$$A(x)+By+Cz=0,$$

où $A(x)$ *est un polynôme,* B *et* C *sont des constantes telles que* $|B|+|C|\neq 0$, *mais* $A(x)$, B, C *sont d'ailleurs arbitraires. Une région* D *est pseudoconvexe, si et seulement si la région* D_{Π} *définie ci-dessous est toujours pseudoconvexe:* D_{Π} *désigne la région* $\{(x,y)\,|\,(x,y,z)\in D\cap\prod\}$, *si* $B=0$, *et la région* $\{(x,z)\,|\,(x,y,z)\in D\cap\prod\}$, *si* $B\neq 0$.

Preuve. Soit $\prod$ une variété représentée par

$$y=a_1u+b_1(x),\ z=a_2u+b_2(x),$$

où $|a_1|+|a_2|\neq 0$ et où $b_1(x)$, $b_2(x)$ sont des polynômes. $\prod$ est aussi représenté par

$$a_2y-a_1z=a_2b_1(x)-a_1b_2(x);$$

donc, d'après le lemme 1 et le théorème 2, la suffisance est démontrée.

Réciproquement, soit $\prod$ une variété de la forme

$$A(x)+By+Cz=0,$$

où $A(x)$ est un polynôme et où $|B|+|C|\neq 0$. Supposons, par exemple, que $B\neq 0$; alors $\prod$ est représenté paramétriquement par

$$\prod : y=-\frac{C}{B}u-\frac{A(x)}{B},\ z=u.$$

Par conséquent, si D est pseudoconvexe, D_{Π} est pseudoconvexe.

C.Q.F.D.