105. *Tauber-Konstanten für die Verfahren C_α, A_λ und L. I*

Von Hubert TIETZ
Mathematisches Institut, Universität Stuttgart, Deutschland

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 10, 1969)

1. Einleitung. Wir betrachten die Cesàro-Verfahren $C_\alpha(\alpha>0)$, die verallgemeinerten Abel-Verfahren $A_\lambda(\lambda>-1)$ und das Logarithmische Verfahren L zur Limitierung komplexer Folgen

(1.1) $\{s_n\}$ mit $s_n=a_0+\cdots+a_n$ für $n=0,1,\cdots$.

Die Folge (1.1) heißt C_α-limitierbar zum Wert s, wenn, mit

$$C_\alpha(m)=\binom{m+\alpha}{m}^{-1}\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m-\nu+\alpha-1}{m-\nu}s_\nu \qquad (\alpha>0), \tag{1.2}$$

$\lim\limits_{m\to\infty} C_\alpha(m)=s$ ist; sie heißt A_λ-limitierbar zum Wert s, wenn

$$A_\lambda(x)=(1+x)^{-\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+\lambda}{\nu}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu}s_\nu \qquad (\lambda>-1) \tag{1.3}$$

für alle $x>0$ existiert und $\lim\limits_{x\to\infty} A_\lambda(x)=s$ ist; und sie heißt L-limitierbar zum Wert s, wenn

$$L(x)=\frac{1}{\log(1+x)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu+1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu+1}s_\nu \tag{1.4}$$

für alle $x>0$ existiert und $\lim\limits_{x\to\infty} L(x)=s$ ist. Borwein [2, 3] vergleicht die Wirkfelder dieser Verfahren. Er findet, daß - in der Reihenfolge der obigen Aufzählung - jedes nachfolgende Verfahren echt stärker ist als jedes voranstehende, und daß die Wirkfelder der A_λ-Verfahren mit fallendem λ wachsen. Nehmen wir das klassische Resultat über die Größe der C_α-Wirkfelder noch dazu und bezeichnen wir die Wirkfelder mit den gleichen Buchstaben wie die Verfahren selbst, so gilt insgesamt

$$C_{\alpha'}\subset C_{\alpha''}\subset A_{\lambda'}\subset A_{\lambda''}\subset L \quad \text{für} \quad 0<\alpha'<\alpha'' \quad \text{und} \quad -1<\lambda''<\lambda'.$$

Ist V ein Verfahren zur Limitierung von Folgen (1.1), so nennen wir eine Tauber-Bedingung der Gestalt

$$\lambda_n a_n=O(1) \qquad (n\to\infty) \tag{1.5}$$

nicht-optimal für V, wenn es eine gegen Unendlich strebende Folge $\{\varphi_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ so gibt, daß auch

$$\lambda_n a_n=O(\varphi_n) \qquad (n\to\infty) \tag{1.6}$$

eine Tauber-Bedingung für V ist. Bekanntlich ist (1.5) mit $\lambda_n=n\psi_n$ für C_α und A_λ sowie mit $\lambda_n=n\psi_n\log n$ für L in diesem Sinne nichtoptimal, wenn $\{\psi_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ irgendeine gegen Unendlich strebende Zahlenfolge ist; denn dann ist (1.6) mit $\varphi_n=\psi_n$ $(n=0,1,\cdots)$ ebenfalls eine Tauber-Bedingung für diese Verfahren. Für A_λ und L folgt das aus zwei Sätzen von Rangachari und Sitaraman ([8] S. 261).

Bezeichnet $V(t)$ die V-Transformierte einer Folge (1.1), für die (1.5) gilt, so ist es häufig möglich Ungleichungen der Art

$$\overline{\lim_{\beta\to\infty}}\,|s_n - V(t)| \leq T\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\lambda_n a_n| \tag{1.7}$$

aufzustellen, wobei $n=n(\beta)\to\infty$ und $t=t(\beta)\to\infty$ für $\beta\to\infty$ gelten soll. Die kleinste Konstante T, mit der (1.7)-unabhängig von der speziellen Folge $\{s_n\}$-richtig ist, heißt Tauber-Konstante für V. Die Literatur über Tauber-Konstanten für die Verfahren C_α und A_λ ist sehr umfangreich. Sie beginnt mit Hadwiger [5], der A_0, das klassische Abel-Verfahren, untersucht. Tauber-Konstanten für C_α $(\alpha=1, 2, \cdots)$ wurden zuerst von Garten [4] angegeben. Neuerdings stellten Jakimovski und Leviatan [7] Sätze auf, in denen viele der früheren Resultate als Spezialfälle enthalten sind. Die Entwicklung der Theorie läßt sich an Hand der dortigen Literaturangaben zurückverfolgen. Soweit dabei Folgen (1.1) zugrunde gelegt waren, die einer Bedingung (1.5) genügen, wurde ausschließlich der Fall $\lambda_n=n$ untersucht. Für L und Folgen (1.1), die (1.5) mit $\lambda_n=n\log n$ erfüllen, behandelt Sitaraman [9] die Frage nach Tauber-Konstanten.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich für die Verfahren C_α und A_λ und Folgen (1.1) mit $n\psi_n a_n=O(1)$ $(n\to\infty)$ sowie für das Verfahren L und Folgen (1.1) mit $n\psi_n \log na_n=O(1)$ $(n\to\infty)$ ebenfalls–von 0 und ∞ verschiedene–Tauber-Konstanten finden lassen, wenn $\{\psi_n\}$ $(n=0, 1, \cdots)$ eine gegen Unendlich strebende Zahlenfolge ist, die nicht zu schnell wächst. Weiter ergibt sich, daß für jede Folge der genannten Art die Menge ihrer Häufungspunkte gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer C_α-, A_λ- bzw. L-Transformierten ist. Ein ähnliches Resultat fand Jakimovski ([6], S. 573, Theorem (4.1)) für das Borel-Verfahren.

2. Tauber-Konstanten für C_α. Wir setzen

$$P_{m\nu}(\alpha)=\binom{m+\alpha}{m}^{-1}\binom{m-\nu+\alpha}{m-\nu} \quad \text{für } m=0, 1, \cdots, 0\leq\nu\leq m,\ \alpha>0 \tag{2.1}$$

und beweisen zunächst

Hilfssatz 1. *Für jedes $\alpha>0$ ist*

$$1-P_{m\nu}(\alpha)\leq([\alpha]+1)\frac{\nu}{m+1}. \tag{2.2}$$

Beweis. Bei festem m und festem ν ist

$$\frac{d}{d\alpha}P_{m\nu}(\alpha)$$
$$=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\nu+1)}\frac{\Gamma(m-\nu+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}[\psi(m-\nu+\alpha+1)-\psi(m+\alpha+1)]\leq 0,$$

und infolgedessen für jedes $\alpha>0$

$$P_{m\nu}(\alpha)\geq P_{m\nu}([\alpha]+1)=\frac{(m-\nu+[\alpha]+1)\,!}{(m-\nu)\,!}\,\frac{m\,!}{(m+[\alpha]+1)\,!}$$
$$=\frac{(m-\nu+[\alpha]+1)\cdots(m-\nu+1)}{(m+[\alpha]+1)\cdots(m+1)}=\left(1-\frac{\nu}{m+[\alpha]+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu}{m+1}\right)$$
$$\geq\left(1-\frac{\nu}{m+1}\right)^{[\alpha]+1}\geq 1-([\alpha]+1)\frac{\nu}{m+1}.$$

Satz C_α. *Ist* $\{\psi_\nu\}$ $(\nu=0,1,\cdots)$ *eine gegen* ∞ *strebende Zahlenfolge mit* $\psi_\nu>0$ *für* $\nu\geq\nu_0>1$ *und*

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_\nu}=\infty, \tag{2.3}$$

gilt ferner–mit einer festen Funktion $m=m(n)>n$–

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu\psi_\nu}=q \qquad \text{für ein endliches } q\geq 0, \tag{2.4}$$

so ist für jede Folge (1.1) *mit*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,\nu\psi_\nu|a_\nu|=K \tag{2.5}$$

(K *eine endliche Konstante*) *die Ungleichung*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|s_n-C_\alpha(m)|\leq qK \tag{2.6}$$

erfüllt. Außerdem gibt es eine reelle Folge mit (2.5), *für die in* (2.6) *das Gleichheitszeichen gilt.*

Beweis. Mit (1.2) und (2.1) erhalten wir (vgl. Zeller [11] S. 104, (1))

$$s_n-C_\alpha(m)=s_n-\sum_{\nu=0}^{m}P_{m\nu}(\alpha)a_\nu$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}[1-P_{m\nu}(\alpha)]a_\nu-\sum_{\nu=n+1}^{m}P_{m\nu}(\alpha)a_\nu,$$

also für $n\geq\nu_0$

$$s_n-C_\alpha(m)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1}[1-P_{m\nu}(\alpha)]a_\nu+\sum_{\nu=\nu_0}^{n}\frac{1}{\nu\psi_\nu}[1-P_{m\nu}(\alpha)]\nu\psi_\nu a_\nu$$
$$-\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu\psi_\nu}P_{m\nu}(\alpha)\nu\psi_\nu a_\nu,$$

wegen

$$\lim_{n\to\infty}P_{m\nu}(\alpha)=1 \qquad \text{für jedes feste } \nu=1,2,\cdots \tag{2.7}$$

also

$$s_n-C_\alpha(m)=\underset{n\to\infty}{o(1)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_{m\nu}\nu\psi_\nu a_\nu$$

mit

$$c_{m\nu}=\begin{cases}0 \text{ für } 1\leq\nu<\nu_0 \text{ und für } \nu>m\\ \dfrac{1}{\nu\psi_\nu}[1-P_{m\nu}(\alpha)] \text{ für } \nu_0\leq\nu\leq n\\ -\dfrac{1}{\nu\psi_\nu}P_{m\nu}(\alpha) \text{ für } n<\nu\leq m.\end{cases}$$

Wegen (2.5) und (2.7) haben wir nach einer einfachen Variante eines bekannten Satzes von Agnew ([1], Lemma 3.1) nur noch zu zeigen:

(2.8)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{m} |c_{m\nu}| = q.$$

Da $0 \leq P_{m\nu}(\alpha) \leq 1$ ist, erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{m} |c_{m\nu}| = \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\nu\psi_\nu}[1-P_{m\nu}(\alpha)] + \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu\psi_\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu\psi_\nu}[1-P_{m\nu}(\alpha)]$$
$$= S_1 + S_2 - S_3,$$

mit $S_r \geq 0$ für $r=1, 2, 3$. Nach (2.2) ist

$$S_1 + S_3 \leq \frac{[\alpha]+1}{m+1} \sum_{\nu=\nu_0}^{m} \frac{1}{\psi_\nu} = o(1) \qquad \text{für } n\to\infty,$$

und wegen (2.4) ergibt sich (2.8).

Eine einfache Folgerung aus Satz C_α ist

Korollar C_α. *Ist* $\{\psi_\nu\}$ *eine Folge wie in Satz* C_α *und genügt die Folge* (1.1) *der Bedingung* (2.5), *so ist die Menge der Häufungspunkte der Folge* (1.1) *gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer* C_α*-Transformierten* $C_\alpha(m)$.

Beweis. Für $m=n+1$ gilt Satz C_α mit $q=0$. Ist also $\{s_{n(\nu)}\}$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ eine Teilfolge von (1.1) mit $\lim_{\nu\to\infty} s_{n(\nu)} = s$, so ist, mit $m_\nu = n(\nu)+1$, auch $\lim_{\nu\to\infty} C_\alpha(m_\nu) = s$. Ist umgekehrt $\{C_\alpha(m_\nu)\}$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ eine Teilfolge von $\{C_\alpha(m)\}$ $(m=0, 1, \cdots)$ mit $\lim_{\nu\to\infty} C_\alpha(m_\nu) = s'$, so ist, mit $n(\nu) = m_\nu - 1$, auch $\lim_{\nu\to\infty} s_{n(\nu)} = s'$.

Wir beschließen diese Nummer mit einem Beispiel. Ist $\nu=\nu(r)$ die kleinste ganze Zahl ν für die $\log_r \nu \geq 1$ gilt ($\log_r \nu$ sei der r-fach iterierte Logarithmus von ν), und setzen wir

(2.9) $\mathrm{l}_r^p(v) = v \log v \cdots \log_{r-1} v \log_r^p v$ für $r=1, 2, \cdots, 0 \leq p < 1$, $v \geq \nu(r)$,

so gilt Satz C_α mit

$$\nu\psi_\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } 0\nu < \nu \leq (r) \\ \mathrm{l}_r^p(\nu) \text{ für } \nu \geq \nu(r), \end{cases}$$

falls $r+p>1$ ist. Die Kopplungsbedingung (2.4) kann man dabei in der Form

$$\frac{1}{1-p} \overline{\lim_{n\to\infty}} [\log_r^{1-p} m(n) - \log_r^{1-p} n] = q$$

schreiben, denn für $n \geq \nu(r)-1$ ist

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\mathrm{l}_r^p(\nu)} = \int_n^m \frac{dv}{\mathrm{l}_r^p(v)} + o(1) = \frac{1}{1-p}[\log_r^{1-p} m - \log_r^{1-p} n] + o(1) \qquad (n\to\infty).$$

Literatur

[1] Agnew, R. P.: Abel transforms and partial sums of Tauberian series. Ann. Math., II. Ser., **50**, 110–117 (1949).

[2] Borwein, D.: On a scale of Abel-type summability methods. Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**, 318–322 (1957).

[3] Borwein, D.: On methods of summability based on power series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **64**, 342–349 (1957).

[4] Garten, V.: Über Taubersche Konstanten bei Cesàroschen Mittelbildungen. Commentarii Math. Helvet., **25**, 311–335 (1951).

[5] Hadwiger, H.: Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Commentarii Math. Helvet., **16**, 209–214 (1944).

[6] Jakimovski, A.: Tauberian constants for the $[J, f(x)]$ transformations. Pacific J. Math., **12**, 567–576 (1962).

[7] Jakimovski, A., and D. Leviatan: A property of approximation operators and applications to Tauberian constants. Math. Z., **102**, 177–204 (1967).

[8] Rangachari, M. S., and Y. Sitaraman: Tauberian theorems for logarithmic summability (L). Tôhoku Math. J., II. Ser., **16**, 257–269 (1964).

[9] Sitaraman, Y.: On the Tauberian constant for summability (L). J. Indian Math. Soc., **29**, 143–154 (1965).

[10] Wendel, J. G.: Note on the gamma function. Amer. Math. Monthly, **55**, 563–564 (1948).

[11] Zeller, K.: Theorie der Limitierungsverfahren (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 15). Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer (1958).