98. *Une Remarque sur le Théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau*

Par Mitsuo MORIMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 10, 1969)

Si on admet, pour les fonctions holomorphes, le principe de coïncidence de la valeur au bord au sens de distributions et de la valeur au bord au sens de hyperfonctions, on obtient le théorème du "Edge of the Wedge" de Bogolyubov comme un corollaire d'un théorème de nullité de certains espaces de cohomologie locale à coefficients dans le faisceau des germes de fonctions holomorphes et à support dans un tube fermé à base proprement convexe (voir Martineau [1]). Le but de cette note est de démontrer le théorème de nullité qui clarifie, ce qu'on espère, la démonstration du théorème du "Edge of the Wedge" de Martineau [2] et [3].

Soit G un polyèdre fermé d'un espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$. Soit $\partial^k G$ l'union de toutes les faces fermées de G de codimension k. Par exemple, si $G=I^n$, $I=[0, \infty)$,

$$\partial^1 G=\partial G=\bigcup_{h=1}^{n} I^{h-1}\times\{0\}\times I^{n-h},$$
$$\partial^2 G=\bigcup_{h_1<h_2} I^{h_1-1}\times\{0\}\times I^{h_2-h_1-1}\times\{0\}\times I^{n-h_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\partial^n G=\{0\}^n.$$

On dira qu'un polyèdre G est propre si et seulement si G ne contient aucune droite toute entière.

Pour un ensemble A de $\boldsymbol{R}^n$, on désigne par $T(A)$ le tube à base A:

$$T(A)=\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}A\subset\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}\boldsymbol{R}^n.$$

Pour un ensemble localement fermé F d'une variété complexe analytique, on note par $H^j[F]$ le j-ième espace de cohomologie locale à support dans F et à coefficients dans le faisceau des germes de fonctions holomorphes $\mathcal{O}$: $H^j[F]\cong H^j_F(D;\mathcal{O})$ pour un ouvert D qui contient F comme un sous-ensemble fermé.

Nous démontrons le théorème suivant:

Théorème. *Soit G un polyèdre propre et fermé de $\boldsymbol{R}^n$ et soit V une variété de Stein. Alors on a, pour $k=1, 2, \cdots, n$,*

$$H^j[T(\partial^k G)\times V]=0, \qquad \textit{pour } j\neq k, n.$$

Démonstration. On a déjà démontré (Théorème 1 de [4]) que

$$H^j[T(G)\times V]=0 \qquad \text{pour } j\neq n, \tag{1}$$
$$H^j[T(\partial^n G)\times V]=0 \qquad \text{pour } j\neq n. \tag{2}$$

Or on a la longue suite exacte suivante de cohomologie locale, pour $k=1, 2, \cdots, n$, (supprimons la notation V dans ce qui suit pour la simplicité) :

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & 0\to H^0[T(\partial^k G)]\to H^0[T(\partial^{k-1}G)]\to H^0[T(\partial^{k-1}G)^0] \\
& \to H^1[T(\partial^k G)]\to H^1[T(\partial^{k-1}G)]\to H^1[T(\partial^{k-1}G)^0] \\
& \to \cdots\cdots \\
& \to H^{n-1}[T(\partial^k G)]\to H^{n-1}[T(\partial^{k-1}G)]\to H^{n-1}[T(\partial^{k-1}G)^0] \\
& \to H^n[T(\partial^k G)]\to H^n[T(\partial^{k-1}G)]\to H^n[T(\partial^k G)^0] \\
& \to 0,
\end{aligned}
$$

où on a noté par la commodité

$$\partial^0 G = G$$
$$T(\partial^{k-1}G)^0 = T(\partial^{k-1}G) - T(\partial^k G).$$

Remarquons que $T(\partial^0 G)^0$ est l'intérieur de $T(G)$ qui est de Stein. D'autre part, pour $k=1, 2, \cdots, n-1$, $T(\partial^k G)^0$ est l'union disjointe de convexes qui sont ouverts dans leur variété linéaire de support. Par conséquent, grâce à la formule (2) avec paramètres complexes, on a pour $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$,

$$(4)\qquad H^j[T(\partial^k G)^0]=0 \qquad \text{pour } j\neq k.$$

En utilisant les nullités (1) et (4) et la suite exacte (3), on peut constater, par récurrence sur k, que

$$(5)\qquad H^j[T(\partial^k G)]=0, \qquad \text{pour } j=k+1, k+2, \cdots, n-1.$$

De même, utilisant les nullités (2) et (4) et la suite exacte (3), on obtient, par récurrence sur k dans le sens inverse,

$$(6)\qquad H^j[T(\partial^k G)]=0, \qquad \text{pour } j=0, 1, 2, \cdots, k-1.$$

Comme on sait que, si $j>n$, le j-ième espace de cohomologie à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}$ s'annule, le théorème résulte des formules (5) et (6).

Corollaire. *On a les isomorphismes suivants* (7) *et* (8) *et les suites exactes suivantes* (9) *et* (10) :

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & H^n[T(\partial^{n-1}G)]\cong H^n[T(\partial^{n-2}G)]\cong\cdots\cong H^n[T(\partial^2 G)]\cong H^n[T(\partial^1 G)] \\
& \qquad\cong H^n[T(G)],
\end{aligned}
$$

$$(8)\qquad H^0(T(G)^0)\cong H^1[T(\partial G)],$$

$$(9)\qquad 0\to H^k[T(\partial^k G)]\to H^k[T(\partial^k G)^0]\xrightarrow{\delta} H^{k+1}[T(\partial^{k+1}G)]\to 0, \quad \text{pour } k=1, 2, \cdots, n-2,$$

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & 0\to H^{n-1}[T(\partial^{n-1}G)]\to H^{n-1}[T(\partial^{n-1}G)^0]\xrightarrow{\delta} H^n[T(\partial^n G)] \\
& \qquad\to H^n[T(\partial^{n-1}G)]\to 0.
\end{aligned}
$$

En effet, on n'a qu'à supprimer tous les termes qui s'annulent dans les suites (3).

Remarquons que les formules (8), (9) et (10) donnet immédiatement le théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau (Théorème 1 de [3]). En effet, l'espace $H^k[(\partial^k G)^0]$ est la somme directe de tous les espaces des hyperfonctions, définies sur le tube ayant l'intérieur relatif de face de codimension k de G comme base, et holomorphes des variables complexes de la face. Il est aussi clair qu'un élément de $H^k[T(\partial^k G)^0]$ remplit la condition de recollement [3] si et seulement si son image par l'application de cobord δ s'annule.

Si on considère la cohomologie locale définie par la $\bar{\partial}$ résolution du faisceau $\mathcal{O}$ par les formes distributions prolongeables de type $(0, *)$, on obtient le théorème analogue pour cette cohomologie locale, qui implique à son tour le théorème du "Edge of the Wedge" que Martineau a présenté dans l'article [2].

References

[1] A. Martineau: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer Course on the Theory of Distributions. Lisbonne (1964).

[2] ——: Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the Wedge Theorem." Séminaire Bourbaki 20ème année, No. 340 (1967–1968).

[3] ——: Le "Edge of the Wedge Theorem" en théorie de hyperfonctions de Sato. Proc. Intern. Conf. on Funct. Anal. Tokyo (1969) (à paraître).

[4] M. Morimoto: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, **19** (2) (à paraître).