199. *Sur le "principe de domination relatif" de Ninomiya*

Par Masayuki ITO
Institut Mathématique de l'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

1. Soit R^n l'espace euclidien à $n(\geqq 3)$ dimensions et muni de la coordonnée sphérique (r, σ), et soit K une fonction de r, continue au sens large dans R^n, finie en dehors de l'origine 0 et tendant vers 0 à l'infini. Le potentiel d'une mesure positive μ dans R^n par rapport au noyau K est défini par la convolution

$$K\mu(x)=K*\mu(x)=\int K(x-y)d\mu(y).$$

Appelons que K satisfait au "principe de domination relatif" de Ninomiya si, quel que soit $\alpha(2\leqq\alpha<n)$ et quelles que soient μ, ν de mesures positives dans R^n, l'inégalité $K_\mu(x)\leqq U^\nu_\alpha(x)$ est satisfaite partout dans R^n dès qu'elle l'est sur $S\mu$, le support de μ, et que $\int K\mu d\mu<+\infty$. On désigne ici par U^ν_α le potentiel de ν par rapport au noyau $r^{\alpha-n}$.

La forme originelle de Ninomiya concerne les potentiels de Riesz-Frostman (voir [1] et [4]), et on connaît que si K satisfait au principe de domination ordinaire, il satisfait au "principe de domination relatif" de Ninomiya (voir [2]). On se propose de fournir un résultat définitif.

Théorème. *Pour que K satisfasse au "principe de domination relatif" de Ninomiya, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe classique du maximum.*

On dit que K satisfait au principe classique du maximum si, quelle que soit μ une mesure positive et à support compact dans R^n, $K_\mu\leqq 1$ sur $S_\mu \Rightarrow K_\mu\leqq 1$ dans R^n.

2. On montrera le théorème. Il est facile de voir que la condition est nécessaire. Le principe classique du maximum pour K est un résultat immédiat de notre condition et du principe d'équilibre pour le noyau newtonien r^{2-n}, c'est-à-dire, à un ouvert borné ω de R^n, on peut associer une mesure positive λ portée par $\bar{\omega}$, telle que $U^\lambda(x)\leqq 1$ dans R^n et que $U^\lambda(x)=1$ dans ω. Le potentiel newtonien de λ est désigné par U^λ.

Montrons que la condition est suffisante.

Lemme. *Si $K(\neq 0)$ satisfait au principe classique du maximum, alors, quelles que soient μ, ν de mesures positives à support compact* *dans* R^n *et à* $S_\mu \cap S_\nu = \emptyset$, *on a* $\int d\mu \leqq \int d\nu$ *dès que* $K_\mu \leqq K_\nu$ *presque partout pour* μ *et que* $\int K_\mu d\mu < +\infty$.

En effet, il existe une mesure positive λ portée par S_μ et telle que $K_\lambda \leqq 1$ dans R^n et que $K_\lambda = 1$ K-p.p.p. sur S_μ(cf. [3]), et donc

$$\int d\mu = \int K_\lambda d\mu = \int K_\mu d\lambda \leqq \int K_\nu d\lambda = \int K_\lambda d\nu \leqq \int d\nu.$$

Une propriété a lieu K-p.p.p. si elle a lieu sauf sur l'ensemble de capacité inférieure nulle par rapport au noyau K.

Supposons que, pour un nombre $\alpha (2 \leqq \alpha < n)$ et pour deux mesures positives μ, ν dans R^n, $K_\mu(x) \leqq U_\alpha^\nu(x)$ sur S_μ et $\int K_\mu d\mu < +\infty$. Le noyau K satisfaisant au principe de continuité,[1] il existe une suite croissante (μ_n) de mesures positives et à support compact dans R^n, telle que K_{μ_n} soit fini et continu dans R^n et converge d'une manière croissante vers K_μ avec $n \to \infty$, et il suffit donc de supposer que K_μ est fini et continu dans R^n et que S_μ est compact. On peut considérer que ν est partout dense dans R^n, c'est-à-dire, quel que soit ω un ouvert non-vide de R^n, $\nu(\omega) > 0$, car il existe une fonction f finie, continue, positive dans R^n et telle que U_α^f soit borné. La fonction $K_\mu - U_\alpha^\nu$ étant semi-continue supérieurement dans R^n et on ayant

$$\sup_{x \in R^n} (K_\mu(x) - U_\alpha^\nu(x)) < +\infty, \quad \overline{\lim_{x \to \infty}} (K_\mu(x) - U_\alpha^\nu(x)) \leqq 0,$$

il existe un point x_0 de CS_μ, le complément de S_μ, tel que

$$K_\mu(x_0) - U_\alpha^\nu(x_0) = \sup_{x \in R^n} (K_\mu(x) - U_\alpha^\nu(x)) > 0$$

dès qu'il existe un point où $K_\mu - U_\alpha^\nu$ prend la valeur positive. On suppose l'existence d'un tel point x_0. On prend deux nombres positifs R_1, R_2 tels que

$$S_\mu \subset \{x \in R^n ; R_1 \leqq |x - x_0| \leqq R_2\} = C(x_0 ; R_1, R_2).$$

Il existe alors une mesure positive ε' portée par $C(0 ; R_1, R_2)$ et telle que $K(x) \leqq K_{\varepsilon'}(x)$ K-p.p.p. sur $C(0 ; R_1, R_2)$ et que $K(x) = K_{\varepsilon'}(x)$ presque partout pour ε'(cf. [3]). On peut considérer que ε' est indépendante de σ. D'après le lemme, on a $\int d\varepsilon' \leqq 1$, et donc,

$$\begin{aligned} K_\mu(x_0) - U_\alpha^\nu(x_0) &\geqq \int (K_\mu(x_0 - x) - U_\alpha^\nu(x_0 - x)) d\varepsilon'(x) \\ &> \int K_{\varepsilon'}(x_0 - x) d\mu(x) - U_\alpha^\nu(x_0) \geqq K_\mu(x_0) - U_\alpha^\nu(x_0). \end{aligned}$$

Cela est une contradiction. On a utilisé le fait que U_α^ν est surharmonique dans R^n et non-harmonique dans tout l'ouvert de R^n. La

1) On dit que K satisfait au principe de continuité si, quelle que soit μ une mesure positive et à support compact, $K\mu$ est fini et continu dans R^n dès que sa restriction à $S\mu$ est finie et continue.

démonstration est ainsi complète.

De la même manière que dans [4], on arrive au corollaire suivant:

Corollaire. *Supposons que K satisfait au principe classique du maximum, alors, quel que soit $\alpha (2 \leqq \alpha < n)$, l'inégalité $U_\alpha^\mu(x) \leqq U_\alpha^\nu(x)$ est satisfaite partout dans R^n dès que $K_\mu(x) \leqq K_\nu(x)$ sur S_μ et que $\int K_\mu d\mu < +\infty$, où μ et ν sont de mesures positives dans R^n.*

Références

[1] M. Itô: Remarks on Ninomiya's domination principle. Proc. Japan Acad., **40**, 743–746 (1964).

[2] ——: Le principe de domination de Ninomiya pour les potentiels par rapport au noyau invariable de composition. Proc. Japan Acad., **43**, 714–718 (1967).

[3] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 148–179 (1957).

[4] ——: Sur un principe du maximum pour le potentiel de Riesz-Frostman. J. Math. Osaka City Univ., **13**, 57–62 (1962).