154. *Sur la forme de connexion du type régulier dans un espace projectif complexe*

Par Kazuhiko AOMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Sept. 12, 1970)

Soit S une hypersurface algébrique (irreductible ou non) dans un espace projectif complexe P^l à l dimensions. Soit $\mathfrak{g}$ une algébre de Lie complexe de dimension finie.

Définition 1. Soit ω une forme de connexion méromorphe sur P^l dont les singularités sont contenues dans S. Supposons qu'elle soit localement euclidíenne, à-savoir

$$(1) \qquad d\omega+\omega\wedge\omega=0.$$

On dit qu'elle est du type régulier sur P^l si la condition suivante est verifiée.

(H) Pour toute application holomorphe et propre ι du disque unité $D=\{z\in \boldsymbol{C};|z|<1\}$ dans P^l telle que l'image $\iota(D)$ ne soit pas contenue dans S, la forme induite $\iota^*(\omega)$ est à poles simples sur D.

M. R. Gérard a donné dans sa thèse [3] la définition du système de Pfaff du type de Fuchs en utilisant la notion du système différentiel ⟪faiblement singulier à l'origine⟫. En vue du théorème de la résolution des singularités, on voit que la forme ω définie plus haut n'est autre chose qu'un élément de $\Omega^{p\times p}(P^l,S)$ dans la notation de [2] dans le cas où $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(p,C)$. En supposant que chacune des composantes de S ainsi que l'ensemble des singularités de S soient sans singularités, M. Gérard a obtenu un résultat (Prop. 6, Chap. 2, [2]) qui permet de déterminer les éléments de $\Omega^{p\times p}(P^l,S)$.

Nous nous proposons de donner dans cette note un théorème qui réduit le problème de déterminer toutes les connexions du type régulier à celui de résoudre un système des équations algébriques (comme la Prop. 6 de M. Gérard permet de le faire) sans nous occuper aucunement des natures des singularités de S. Nous avons d'abord

Théorèm 1. *Toute la forme ω du type régulier sur P^l est fermée et* (1) *se réduit aux équations algébriques suivantes*

$$(2) \qquad \omega\wedge\omega=0.$$

Donc ω est uniquement déterminée par ses résidus.

Ce théorème se démontre par la méthode utilisée par O. Zariski [3] en considérant les intersections avec S des droites dans P^l.

Ceci étant, prenons un point 0 et un hyperplan H de P^l ne passant pas par 0. Soit w_L la coordonnée affine sur une droite L qui passe par

0 telle que $w=\infty$ et 0 correspondent respectivement aux points 0 et $L\cap H$.

Supposons que S consiste en des composantes irreductibles S_j $(1\leqq j\leqq r)$. Soit $\tilde{S}$ le sous-ensemble algébrique du produit $S_1\times S_2\times\cdots\times S_r$, consistant en des points $(z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(r)})\in S_1\times S_2\times\cdots\times S_r$ tels que les $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(r)}$ et 0 soient sur la même droite L dans P^l. $\tilde{S}$ est alors irreductible et un revêtement analytique de H. Soit π la projection naturelle de $\tilde{S}$ sur H.

Or $P^l-\{0\}$ peut être considéré comme un espace fibré E en droite dont la fibre est $L-\{0\}$ et la base est H. Soit π^*E l'espace fibré induite de E par π:

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi:\tilde{S} & \longrightarrow & H. \end{array}$$

Soient m le degré de S et $a_1, a_2, \cdots, a_m$ les coordonnées des points d'intersection $L\cap S$ par rapport à w_L. Ces points d'intersection peuvent être considérés comme sections de π^*E sur $\tilde{S}$.

Alors la matrice M du type $m\times m$ dont l'élément d'indice (i, j) est la forme $d(a_i-a_j)/(a_i-a_j)$ pour $i\neq j$ et 0 pour $i=j$ est bien définie sur $\tilde{S}$. Elle est fermée et à poles simples. Soient U_j les matrices des résidus de ω en a_j. Alors (2) est équivalent au suivant

$$\sum_{j\neq i}\frac{d(a_i-a_j)}{a_i-a_j}[U_i, U_j]=0 \qquad (1\leqq i\leqq m). \tag{3}$$

Soit α le nombre des composantes irreductibles du support polaire de M. Et soit $W^{(\nu)}=((w_{ij}^{(\nu)}))$ $(1\leqq\nu\leqq\alpha)$ les matrices des résidus correspondantes. La forme matricielle du premier membre de (3) n'est seulement bien définie dans $\tilde{S}$ mais aussi dans H, car U_i et U_j sont coïncident si a_i et a_j appartiennet à la même composante irreductible de S. Donc on a le théorème suivant

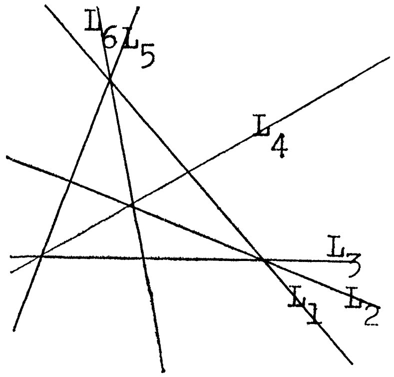
Théorème 2. *La forme du type régulier ω est complètement déterminée par ses résidus U_j $(1\leqq j\leqq m)$ satisfaisant aux égalités suivantes*

$$\sum_{j=1}^{m} U_j=0 \tag{4}$$

$$\sum_{j\neq i} w_{ij}^{(\nu)}[U_i, U_j]=0 \qquad (1\leqq i\leqq m). \tag{5}$$

Exemple. Considerons le cas $l=2$. Soit S la figure suivante consistant en 6 droites que noun nommons $L_1, L_2, \cdots, L_6$. Dans ce cas-là $\tilde{S}$ est isomorphes à P^1. Les égalités (5) se réduisent aux suivantes

$$\begin{aligned} &[U_1+U_2+U_3, U_j]=0, \quad \text{pour } j=1,2,3,\\ &[U_1+U_5+U_6, U_j]=0, \quad \text{pour } j=1,5,6,\\ &[U_2+U_4+U_6, U_j]=0, \quad \text{pour } j=2,4,6,\\ &[U_3+U_4+U_5, U_j]=0, \quad \text{pour } j=3,4,5 \text{ et}\\ &[U_1, U_4]=[U_2, U_5]=[U_3, U_6]=0. \end{aligned} \tag{6}$$



Nous sommes bornés jusqu'ici à considerer le cas de P^l. Il reste ā examiner si le théorème 1 continue d'être vrai, si on le remplacer par une variété compacte quelconque.

Les démonstrations des résultats ci-dessus se trouvent dans [1].

L'auteur veut exprimer sa reconnaissance au Prof. S. Iyanaga qui a bien voulu corriger le français.

Réfèrences

[1] K. Aomoto: Volume en l'honneur du Prof. K. Yano (à paraitre).
[2] R. Gérard: J. Math. Pures Appli. (1968).
[3] O. Zariski: Ann. of Math., **38** (1937).