155. *Les fonctions de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demi-espace*[*)]

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Nov. 12, 1971)

§1. Problème et résultat. Soit Ω le demi-espace euclédien de $\boldsymbol{R}^{n+1}(n \geqq 1)$ défini par $\Omega=\{(x, s)\,;\, x>0$ et $s \in \boldsymbol{R}^n\}$. Nous considérons, dans Ω, un opérateur différentiel elliptique L du second ordre de la forme

$$\begin{aligned} Lv(x, s)= &\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial s_j{}^2}\right)(xv(x, s)) \\ &-\rho\frac{\partial v}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial v}{\partial s_j}(x, s), \end{aligned} \tag{1}$$

où ρ et $b_j(1 \leqq j \leqq n)$ sont *des constantes réelles.* Nous nous bornerons à l'un des deux cas suivants:

Cas I. $\rho=-1$ et $b_1=\cdots=b_n=0$;

Cas II. $\rho<-3/2$ et $b_1, \cdots, b_n$ sont arbitraires.

L est alors uniformément elliptique dans chaque compact de Ω et il dégénère partout sur $x=0$ dans toutes les directions. Dans le Cas I, L est formellement auto-adjoint.

Le problème initial qui nous intéresse est le suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x, s)+Lu(t, x, s)=0, \text{ pour } (t, x, s) \in \boldsymbol{R}_+ \times \Omega, \text{ et,} \\ u(0, x, s)=u_0(x, s) \text{ (donnée), pour } (x, s) \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où nous ajoutons, dans le Cas II, la condition de Dirichlet homogène

$$u(t, 0, s)=0, \text{ pour } (t, s) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n. \tag{3}$$

Ce problème initial (2) dans le Cas I (ou (2)−(3) dans le Cas II) se résoud au moyen de semi-groupe dans le cadre de $L^2(\Omega)$. Plus précisément, réalisons L comme opérateur fermé dans $L^2(\Omega)$ en fixant le domaine

$$\begin{cases} D(L)=W_1^2(\Omega), \text{ dans le Cas I, et} \\ D(L)=W_1^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \text{ dans le Cas II,} \\ \text{où } W_1^2(\Omega)=\{v(x, s) \in H^1(\Omega)\,;\, xv(x, s) \in H^2(\Omega)\}. \end{cases} \tag{4}$$

Alors, dans chacun des Cas I et II, $-L$ engendre un semi-groupe de contraction e^{-tL} au sens de Hille-Yosida (voir [1] et [3]). Et, si $u_0 \in D(L)$, alors $u(tx, s)=(e^{-tL}u_0)(x, s)$ est la seule solution de (2) ((2)−(3) resp.) dans ce cadre. Ce semi-groupe admet la représentation par noyau de sorte que

$$(e^{-tL}u_0)(x, s)=\int_{\Omega} G(t\,;\, x, y\,;\, s-s')u_0(y, s')dyds', \tag{5}$$

*) Ce travail a été partiellement supporté par une bourse de Sakkokaï.

car L est à coefficients constants par rapport à s. Nous appelons $G(t; x, y; s)$ la fonction de Green pour l'équation (2)((2)−(3) resp.).

Le but de cette note est de montrer la construction de G et d'établir les majorations de G et de see dérivées en (x, s) jusqu'à l'ordre 2.

Proposition 1. *Si nous posons*

$$\hat{G}(t; x, y; \sigma)=\frac{a}{sh(at)}\left(\frac{y}{x}\right)^{(\rho+1)/2} I_{-\rho-1}\left(\frac{2a\sqrt{xy}}{sh(at)}\right) \exp\{-itb\cdot\sigma - a(x+y)coth(at)\}, \tag{6}$$

alors la fonction $G(t; x, y; s)$ est donnée par

$$G(t; x, y; s)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{is\cdot\sigma}\hat{G}(t; x, y; \sigma)d\sigma, \tag{7}$$

où $b\cdot\sigma=b_1\sigma_1+\cdots+b_n\sigma_n$, $a=\sqrt{1+\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}>0$ et $I_{-\rho-1}(z)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre $-\rho-1$ (voir Watson [4]).

Le théorème suivant est le résultat principal de cette note.

Theoreme. *Soient $0\leqq p\leqq 2$ et $|\mu|\leqq 2$. Alors, nous avons*

$$\begin{aligned}|D_x^p D_s^\mu G(t; x, y; s)| \leqq \text{Cte.}\ & x^{-\rho-p-1}t^{-p-(1/2)}(A+t)^{\rho+(1/2)} \\ & \times(t+\sqrt{xA})^p(B+t+\sqrt{tA}+|s|)^{-n-|\mu|} \\ & \times\exp.\left[-c\left\{\frac{B}{t}+t(A+1)+|s|\right\}\right],\end{aligned} \tag{8}$$

si $0<t\leqq 1$, où c est une constante positive, $A=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ et $B=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

§2. Demonstration de la proposition 1.

Posons, pour la solution u de (2)((2)−(3) resp.),

$$w(t, \xi, \sigma)=\int_0^\infty dx\int_{R^n} e^{-ix\xi-is\cdot\sigma}u(t, x, s)ds. \tag{9}$$

Alors, w doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+i(\xi^2+a^2)\dfrac{\partial w}{\partial \xi}+i(b\cdot\sigma-\rho\xi)w=0, \text{ pour } t>0 \text{ et } (\xi,\sigma)\in R^{n+1}, \\ \text{et } w(0, \xi, \sigma)=w_0(\xi, \sigma) \text{ (définie analoguement à (9)).}\end{cases} \tag{10}$$

Ici, nous avons utilisé la condition (3) dans le Cas II pour garantir que le membre à droite de (10) est nul. Cette équation du premier ordre est facilement résolue le long du courbe caractéristique. La conséquence est la suivante:

$$\begin{cases} w(t, \xi, \sigma)=e^{-itb\cdot\sigma}\left\{ch(at)+\dfrac{i\xi}{a}sh(at)\right\}^{\rho} w_0(\zeta(t, \xi, \sigma)), \\ \text{où } \zeta(t, \xi, \sigma)=\dfrac{a\xi ch(at)-ia^2sh(at)}{a\cdot ch(at)+i\xi sh(at)}.\end{cases} \tag{11}$$

Et, la transformation réciproque de Fourier par rapport à (ξ, σ) nous donne finalement la formule (6). Le calcul formel jusqu'ici se justifie dans le cadre de semi-groupe dans le § 1. C.Q.F.D.

§3. Demonstration du theoreme.

La fonction de Bessel modifiée $I_\nu(z)$ a la représentation intégrale

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1}(1-\zeta^2)^{\nu-1/2}e^{-z\zeta}d\zeta, \text{ si Re. } \nu>-1/2.$$

Nous la substituons dans (6), et nous avons une nouvelle expression de $\hat{G}$:

$$\begin{aligned} e^{itb\cdot\sigma}\hat{G}(t\,;x,y\,;\sigma)=&\frac{1}{\Gamma(-\rho-1/2)\sqrt{\pi}}\\ &\times\int_{-1}^{+1}(1-\zeta^2)^{-\rho-3/2}g(t\,;x,y\,;a,\zeta)d\zeta, \end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{cases} \text{où } a=\sqrt{1+\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}>0,\\ g(t\,;x,y\,;a,\zeta)=x^{-\rho-1}t^\rho\left(\dfrac{sh\ \alpha}{\alpha}\right)^\rho\exp\left(-\dfrac{\theta(x,y\,;\alpha,\zeta)}{t}\right),\\ \theta(x,y\,;\alpha,\zeta)=\{2\alpha\zeta\sqrt{xy}+\alpha(x+y)ch\ \alpha\}/sh\ \alpha, \text{ et } \alpha=at. \end{cases}\tag{13}$$

Lorsque σ parcourt $\boldsymbol{R}^n$, a et α parcourent les intervalles $[1,\infty)$ et $[t,\infty)$ respectivement. Mais, pour obtenir la décroissance de G par rapport à s, il sera mieux de déformer le cycle d'intégration dans (7) dans le domaine complexe de σ.

Prenons un vecteur $\boldsymbol{e}_0=(1/\sqrt{n},\cdots,1/\sqrt{n})$ dans $\boldsymbol{R}^n$ du longueur 1 et un $\varepsilon>0$ plus petit que $1/\sqrt{n}$, et posons $V_\varepsilon=\{s\in\boldsymbol{R}^n\,;|s/|s|-\boldsymbol{e}_0|<\varepsilon\}$. Alors, V_ε est un cône qui est un voisinage du demie-droite: $s=\lambda\boldsymbol{e}_0$ $(0<\lambda<\infty)$. Quel que soit $s\in\boldsymbol{R}^n(s\neq 0)$, le point s vient dans V_ε après une rotation convenable dans $\boldsymbol{R}^n$. Donc, il suffit d'établir l'inégalité (8) pour $s\in V_\varepsilon$. Nous supposons alors, dès maintenant, que s soit situé dans V_ε.

1ère *étape*. Dans $\boldsymbol{C}^n$ par rapport à σ, nous prenons un cycle $\Gamma=\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_n$ dont chaque $\Gamma_j(1\leqq j\leqq n)$ est défini par

$$\Gamma_j:\sigma_j=\tau_j+ih_j\sqrt{\tau_j^2+\frac{1}{n}}\ (-\infty<\tau_j<+\infty,\ 0<h_j<1),\tag{14}$$

où les constantes h_j seront choisies tout à l'heure si petites que l'intégration sur $\boldsymbol{R}^n$ soit égale à celle sur Γ dans la formule (7).

Suivant (14), les quantités a et α prennent des valeurs complexes, posons

$$a=a'+ia'' \quad\text{et}\quad \alpha=\alpha'+i\alpha''\ (a',a'',\alpha' \text{ et } \alpha'' \text{ sont réels}).\tag{15}$$

Lorsque σ parcourt Γ, a' parcourt un intervalle $[c',\infty)$, où

$$c'=\frac{1}{n}\sum\sqrt{1-h_j^2}>0.$$

On reprend, si nécessaire, les $h_j>0$ plus petites de sorte que le repport $|\alpha''/\alpha'|$ soit uniformément plus petit qu'un $\eta<1/2$. Alors, la partie réelle de θ dans (13) a l'estimation suivante:

$$\begin{cases} \text{Re. } \theta(x,y\,;\alpha,\zeta)\geqq c\left\{((1-|\zeta|)A+B)(\alpha'+1)+\dfrac{A\alpha'^2}{\alpha'+1}\right\},\\ \text{pour } -1\leqq\zeta\leqq 1,\ A=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \text{ et } B=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2, \end{cases}\tag{16}$$

où c est une constante qui ne dépend que de η. On estime également les $|\partial\theta/\partial x|$ et $|\partial^2\theta/\partial x^2|$, et nous avons

$$\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(t;x,y;a,\zeta)\right| \leqq \text{Cte. } (t+\sqrt{xA})^p\left(\frac{\alpha'+1}{xt}\right)^p |g|,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } p=0,1 \text{ ou } 2,\\ &|g(t;x,y;a,\zeta)| \leqq \text{Cte. } x^{-\rho-1}t^\rho\left(\frac{sh\,\alpha'}{\alpha'}\right)^\rho \exp\left(-\frac{\text{Re. }\theta}{t}\right).\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Et, la transformation du cycle d'intégration de $\boldsymbol{R}^n$ à Γ dans (7) est maintenant justifiée.

$2^{\text{ième}}$ *étape*. Nous passons aux estimations de G et de ses dérivées. (7) et (12) nous donnent

$$G(t;x,y;s)=\text{Cte. } \int_\Gamma e^{is\cdot\sigma}\,d\sigma\int_{-1}^{+1}(1-\zeta^2)^{-\rho-3/2}g(t;x,y;a,\zeta)d\zeta. \tag{18}$$

Posons encore

$$I_{p,\mu}(t;x,y;s,\zeta)=\left|D_x{}^pD_s{}^\mu\int_\Gamma e^{i(s-tb)\cdot\sigma}g(t;x,y;a,\zeta)d\zeta\right|. \tag{19}$$

Après quelques changements de variables, l'intégrale de (19) est majorée finalement par une intégrale seulement par rapport à α':

$$\left\{\begin{aligned}&I_{p,\mu}\leqq \text{Cte. } x^{-\rho-p-1}t^{\rho-n-p-|\mu|}(t+\sqrt{xA})^p\\ &\qquad\times\int_{c't}^\infty \alpha'^{n+|\mu|-1}(\alpha'+1)^{p-\rho}e^{-2c\theta_1}d\alpha',\\ &\text{où } \theta_1=\frac{((1-|\zeta|)A+B)}{t}(\alpha'+1)+\left(\frac{|s|}{t}+1\right)\alpha'+\frac{A\alpha'^2}{t(\alpha'+1)}.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

$3^{\text{ième}}$ *étape*. Notre but est de majorer les quantités

$$J_{p,\mu}(t;x,y;s)=|D_x{}^pD_s{}^\mu G(t;x,y;s)|. \tag{21}$$

(19) implique, naturellement,

$$J_{p,\mu}\leqq \text{Cte. } \int_{-1}^{+1}(1-\zeta^2)^{-\rho-3/2}I_{p,\mu}(t;x,y;s,\zeta)d\zeta. \tag{22}$$

Nous mettons dedans l'inégalité (20). Il est permis de changer l'ordre d'intégrations par rapport à α' et ζ. Nous intégrons d'abord en ζ:

$$\left\{\begin{aligned}&J_{p,\mu}\leqq \text{Cte. } x^{-p-\rho-1}t^{-n-p-|\mu|-(1/2)}(A+t)^{\rho+(1/2)}\\ &\qquad\times(t+\sqrt{xA})^pe^{-c\theta_0}K_{p,\mu}\\ &\text{avec } K_{p,\mu}=\int_{c't}^\infty \alpha'^{n+|\mu|-1}(\alpha'+1)^{p-\rho}e^{-c\theta_2}d\alpha',\\ &\theta_0=\frac{B}{t}+|s|+t(A+1) \text{ et } \theta_2=\frac{B+|s|+t}{t}\alpha'+\frac{A\alpha'^2}{t(\alpha'+1)}.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Il nous ne reste qu'à majorer cette dernière $K_{p,\mu}$. La variable t est, par hypothèse, plus petite que 1, et la constante c' l'est également. Nous partageons $K_{p,\mu}$ en deux parties:

$$K_{p,\mu}=K^0_{p,\mu}+K^1_{p,\mu}, \quad \text{où } K^0_{p,\mu}=\int_{c't}^1 \quad \text{et} \quad K^1_{p,\mu}=\int_1^\infty. \tag{24}$$

Ecrivons, pour simplicité,

$$\alpha'=r,\ c\frac{B+|s|+t}{t}=X \quad \text{et} \quad \frac{cA}{2t}=Y. \tag{25}$$

Alors, premièrement,

$$K^1_{p,\mu} \leqq \text{Cte. } (X+Y)^{\rho-n-p-|\mu|} \exp(-c''(X+Y)), \tag{26}$$

et $K^1_{p,\mu}$ est plus petite que $K^0_{p,\mu}$ suivante. Pour estimer $K^0_{p,\mu}$, notons que $Y>0$ et que $X \geqq c > 0$. Ecrivons m au lieu de $n+|\mu|$. Alors, nous avons

$$K^0_{p,\mu} \leqq \text{Cte.} \int_0^1 r^{m-1} e^{-Xr-Yr^2} dr. \tag{27}$$

Mais la dernière intégrale est majorée par

$$\left(\int_0^1 \exp\left(-\frac{X}{m} r - Yr^2\right) dr\right)^m \leqq \text{Cte. } (X^2+Y)^{-m/2} \tag{28}$$

à un facteur constant près. (26) et (28) donnent finalement

$$K_{p,\mu} \leqq \text{Cte. } t^{n+|\mu|}(B+|s|+t+\sqrt{xA})^{-n-|\mu|}. \tag{29}$$

Nous substituons (29) dans (23), et nous obtenons l'inégalité désirée (8).

Le Théorème est ainsi démontré. C.Q.F.D.

§4. Noyau de poisson.

Soit $\rho < -3/2$ dans ce paragraphe. Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,s) + Lu(t,x,s) = 0, & \text{pour } t>0 \text{ et } (x,s) \in \Omega, \\ u(0,x,s) = 0, & \text{pour } (x,s) \in \Omega, \text{ et} \\ u(t,0,s) = f(t,s) \text{ (donnée)}, & \text{pour } t>0 \text{ et } s \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases} \tag{30}$$

Plus précisément, $f(t,s)$ est une fonction donnée, continue de t à valeurs dans $H^{1/2}(\boldsymbol{R}^n)$ et partout nulle sur $t=0$, et nous cherchons une $u(t,x,s)$ satisfaisante à (30), fonction continue de t à valeurs dans $W^2_1(\Omega)$ et une fois différentiable de t à valeurs dans $L^2(\Omega)$. La solution u est unique et admet la représentation par noyau

$$u(t,x,s) = \int_0^t dt' \int_{\boldsymbol{R}^n} P(t-t'; x, s-s') f(t',s') ds'. \tag{31}$$

Nous appelons ce $P(t;x,s)$ le noyau de Poisson pour ce problème de Dirichlet (30).

Proposition 2. *Si nous posons*

$$\hat{P}(t;x,\sigma) = \frac{x^{-\rho-1}}{\Gamma(-\rho-1)} \left(\frac{sh(at)}{a}\right)^\rho \exp\{-itb.\sigma - ax.\,coth(at)\}, \tag{32}$$

alors le noyau $P(t;x,s)$ est donné par

$$P(t;x,s) = (2\pi)^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{is\cdot\sigma} \hat{P}(t;x,\sigma) d\sigma. \tag{33}$$

Et, nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned} |D^p_x D_s P(t;x,s)| \leqq \text{Cte. } & x^{-\rho-1} t^\rho \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x}\right)^p (t+x+|s|)^{-n-|\mu|} \\ & \times \exp\left\{-c\left(\frac{x}{t} + |s| + t\right)\right\}, \end{aligned} \tag{34}$$

pour $0 \leqq p \leqq 2$, $0 \leqq |\mu| \leqq 2$, où c est une constante positive.

Nous omettons la démonstration qui est analogue à celles de la proposition 1 et du théorème. La relation entre P et la fonction de Green G est

$$P(t\,;x,s)=-(\rho+1)G(t\,;x,0\,;s). \tag{35}$$

§ 5. Commentaires.

Le Théorème démontré dans ce mémoire n'est qu'un résultat transitoire. L'auteur n'est pas certain si l'inégalité (8) soit la meilleure possible ou non. Il est probable qu'on aura besoin d'une considération plus fine, lorsqu'on essaye de construire les fonctions de Green pour des opérateurs paraboliques du même type de dégénéressance mais à coefficients plus généraux.

De toute façon, la forme de la fonction de Green est très différente de celles dans le cas non dégénéré. Rappelons-nous, par exemple, le problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur. Comme il est bien connu, la fonction de Green pour ce problème a été donnée comme la somme d'une solution élémentaire et une fonction compensatrice suivant la condition aux limites. Mais, dans notre cas dégénéré, on ne peut pas séparer les deux choses. C'est la première différence.

Deuxièmement, dans la fonction de Green pour l'équation de la chaleur, les quantités $x, y, |s|$ et $\sqrt{t}$ avaient les qualités presque égales dans estimations des dérivées, tandis que, dans notre cas dégénéré, les quantités $x, y, |s|$ et t elle-même ont la même force. Voyons le membre à droite de l'inégalité (8), il est homogène de degré $-n-1-p-|\mu|$ par rapport à (t, x, y, s) au facteur exponentiel près. Mais, ceci n'est pas du tout étonnant, parce que l'équation $\partial u/\partial t+Lu=0$ est invariante, sauf le terme xu, par l'homothétie $(t, x, s)\rightarrow(\lambda t, \lambda x, \lambda s)$ pour $\lambda>0$.

Un calcul pareil à celui du § 2 a été fait dans [2].

Références

[1] Baouendi, M. S., et Goulaouic, C.: Arch. Rat. Mech. Anal., **34**, No. 5, p. 361–379 (1969).
[2] Shimakura, N.: Proc. Japan Acad., **45**(10), p. 866–871 (1969).
[3] ——: Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre (a paraître).
[4] Watson, G. N.: A treatise on the theory of Bessel function (1922). MacMillan.