30. *La Dimension de Hausdorff de Certains Ensembles dans* [0, 1]

Par Kenji NAGASAKA
L'Institut de Mathématiques Statistiques

(Communicated by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., April 12, 1978)

0. Considérons des nombres réels ω avec $\omega \in \Omega = [0, 1]$ qui sont développés r-adiquement par la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega)}{r^i},$$

où $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\omega)$ est un des éléments $\{0, 1, \cdots, r-1\} = R$; cette représentation est unique sauf pour les nombres rationnels, ce qui ne concerne pas le calcul de dimension de Hausdorff.

1. Supposons d'abord que $r=2$ et à l'aide de la fonction de Rademacher définie par

$$r_i(\omega) = 1 - 2\varepsilon_i(\omega),$$

nous pouvons observer le comportement statistique de développement de ω. Posons $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n r_i(\omega)$ et soit μ_0 la mesure de Lebesgue. Nous allons nous intéresser à la grandeur de $|S_n(\omega)|$ quand n est assez grand et nous calculerons la dimension de Hausdorff de deux ensembles: $\bar{L}(\alpha)$ et $L(\alpha)$ pour α non-négatif, définis comme

$$\bar{L}(\alpha) = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{\sqrt{2n \log \log n}} \geqq \alpha\right\},$$

et

$$L(\alpha) = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{\sqrt{2n \log \log n}} = \alpha\right\}.$$

On sait que $L(1)$ est de mesure 1 au sens de Lebesgue, ce qui est un cas spécial de la loi du logarithme itéré (A. Ja. Hinčin [3]).

Considérons l'ensemble des ω, noté par $M(\nu_0, \nu_1)$, dont la fréquence rélative de $+1$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{le nombre de } i \leqq n \text{ avec } r_i(\omega)=1}{n},$$

notée par ν_0 est supérieure à $1/2$; la fréquence rélative de -1, notée par ν_1, est donc inférieure à $1/2$. Alors on voit facilement pour tout α non-négatif que

$$\bar{L}(\alpha) \supset \bar{L}(\infty) \supset M(\nu_0, \nu_1)$$

pour tout $\nu_0 > 1/2$ $(\nu_0 + \nu_1 = 1)$.

D'après le résultat d'Eggleston [4], pour tout α non-négatif, nous calculons

$$\dim \bar{L}(\alpha) \geqq \dim \bigcup_{\substack{\nu_0+\nu_1=1 \\ \nu_0>1/2}} M(\nu_0, \nu_1) = \sup_{\substack{\nu_0+\nu_1=1 \\ \nu_0>1/2}} \dim M(\nu_0, \nu_1) = 1.$$

Nous avons donc

Théorème 1. $\dim \bar{L}(\alpha)=1$, *pour tout α non-négatif.*

Corollaire. *L'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui ne satisfont pas de la loi du logarithme itéré est, bien que de mesure nulle au sens de Lebesgue, de dimension de Hausdorff* 1.

Nous allons maintenant calculer la dimension de Hausdorff de $L(\alpha)$, en effectuant le théorème de Beyer [1]. Définissons la transformation T_k de Ω dans $\Omega^k = \underbrace{\Omega \times \cdots \times \Omega}_{k\text{-fois}}$, de la façon suivante: $T_k(\omega)=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k) \in \Omega^k$, où $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(\omega)/2^i$. Alors pour $i=1, 2, \cdots, k$ et $j=1, 2, \cdots$,

$$\varepsilon_j(\omega_i) = \varepsilon_{(j-1)k+i}(\omega).$$

Théorème (Beyer). *Soit M un sous-ensemble de Ω, alors*

$$\dim M = (1/k) \dim T_k M,$$

où $T_k M = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k) \in \Omega^k$, $\exists \omega \in M$ *tel que* $T_k \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)\}$.

Nous allons par Théorème 2 améliorer Théorème 1 en utilisant le théorème de Beyer.

Théorème 2. *Pour tout α positif,*

$$\dim L(\alpha) = 1.$$

Démonstration. Définissons un ensemble E_{k+1} dans Ω^{k+1} comme $E_{k+1} = T_k L(1) \times \{\omega\}$, *où* ω satisfait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n \log\log n}} = \sqrt{k+1}\,\alpha - \sqrt{k}.$$

Cet ω, donc nécessairement E_{k+1}, dépend de k et de α et l'existence de cet ω est assurée par Shiokawa et Uchiyama [10] (Théorème 3). D'après le théorème de Beyer, $\dim E_{k+1} = k$. Il est facile à voir que

$$L(\alpha) \supset T_{k+1}^{-1} E_{k+1}.$$

En effectuant encore le théorème de Beyer,

$$\begin{aligned} \dim L(\alpha) &= \frac{1}{k+1} \dim T_{k+1} L(\alpha) \\ &\geqq \frac{1}{k+1} \dim E_{k+1} \\ &= \frac{k}{k+1}. \end{aligned}$$

Etant k arbitrairement grand, nous avons, pour tout α positif, $\dim L(\alpha)=1$. C.Q.F.D.

2. Maintenant la base de développement r est un entier supérieur à 1. Définissons une fonction

$$N_n(\omega; \Delta_k) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ \varepsilon_i(\omega)=i_1, \varepsilon_{i+1}(\omega)=i_2, \cdots, \varepsilon_{i+k-1}(\omega)=i_k}} 1$$

pour $\Delta_k = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in R^k$. Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé simplement normal à la base r si, pour tout $\Delta_1 = j \in R$,

$$N_n(\omega\,;\,j)/n \to 1/r.$$

L'ensemble des ω simplement normaux est noté par $S(r)$. On appelle $\omega \in \Omega$ normal à la base r si, pour tout entier positif k, et pour tout $\Delta_k \in R^k$,

$$N_n(\omega\,;\,\Delta_k)/n \to 1/r^k.$$

L'ensemble des ω normaux à la base r est noté par $B(r)$, ce qu'on appelle l'ensemble normal à la base r. Il est bien connu que $\mu_0 S(r) = \mu_0 B(r) = 1$ d'après la loi des grands nombres. Il est donc en question de mesurer l'épaisseur des ensembles; $\Omega - S(r)$ et $S(r) - B(r)$. L'auteur a repondu à cette question en démontrant $\dim(\Omega - S(r)) = \dim(S(r) - B(r)) = 1$ dans [5] grâce à un résultat de Billingsley [2]. Nous remarquons ici que mon résultat au-dessus peut être montré d'après le théorème de Beyer.

Nous allons nous intéresser à la relation entre deux ensembles normaux $B(r)$ et $B(s)$. Ces deux ensembles sont identiques si et seulement si $\log r/\log s$ est un nombre rationnel (notons cette relation $r \sim s$) par W. M. Schmidt [9]. Supposons que $r \not\sim s$, alors $\mu_0(B(r) - B(s)) = 0$. W. M. Schmidt a demontré aussi que $B(r) - B(s) \neq \phi$ si $r \not\sim s$. Nous démontrerons, en effectuant le théorème de Beyer, un résultat plus fort:

Théorème 3. $\dim(B(r) - B(s)) = 1$ *si* $r \not\sim s$.

Corollaire. *L'ensemble des ω normaux à la base r mais qui ne sont pas absolument normaux, est de dimension* 1 *pour tout* $r \geqq 2$. *Tout les éléments de* $B = \bigcap_{s=2}^{\infty} B(s)$ *sont appellés absolument normaux.*

Lemme. *Etant donné* $y \in B(r)$, *le vecteur* $(x, y) \in \Omega^2$ *est normal à la base r pour presque tout* $x \in \Omega$.

Démonstration du lemme. Supposons que x et y sont développés r-adiquement et pour $\Delta = \Delta_{l,l} = \begin{pmatrix} i_{11}, i_{21}, \cdots, i_{l1} \\ i_{12}, i_{22}, \cdots, i_{l2} \end{pmatrix} \in R^l \times R^l$, une fonction $N_n((x, y)\,;\,\Delta)$ se définit comme suit:

$$N_n((x, y)\,;\,\Delta) = \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ \varepsilon_j(x) = i_{11}, \varepsilon_{j+1}(x) = i_{21}, \cdots, \varepsilon_{j+l-1}(x) = i_{l1} \\ \varepsilon_j(y) = i_{12}, \varepsilon_{j+1}(y) = i_{22}, \cdots, \varepsilon_{j+l-1}(y) = i_{l2}}} 1.$$

Il faut démontrer que, pour presque tout $x \in \Omega$, pour p arbitraire, et pour chaque $\Delta_{l,l}$,

$$N_n((x, y)\,;\,\Delta)/n \to 1/r^{2l}.$$

Considérons une fonction caractérisque $X_j(\cdot)$ de l'événement $\{\varepsilon_j(x) = i_{11}, \varepsilon_{j+1}(x) = i_{21}, \cdots, \varepsilon_{j+l-1}(x) = i_{l1}\}$, alors $N_n((x, y)\,;\,\Delta) = \sum_{\substack{j \in S \\ 1 \leqq j \leqq n}} X_j(x)$, où S est l'ensemble des j tel que $\varepsilon_j(y) = i_{21}, \varepsilon_{j+1}(y) = i_{22}, \cdots, \varepsilon_{j+l-1}(y) = i_{l1}$. En prenant l'espérance de $N_n((x, y)\,;\,\Delta)$,

$$EN_n((\cdot, y)\,;\,\Delta) = \sum_{\substack{j \in S \\ 1 \leqq j \leqq n}} EX_j = \frac{1}{r^l} \sum_{\substack{j \in S \\ 1 \leqq j \leqq n}} 1 = \frac{1}{r^l}\left(\frac{n}{r^l} + o(n)\right).$$

D'après la loi des grands nombres, pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$N_n((x,y)\,;\,\Delta)/n \to 1/r^{2l}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si l'on remplace cet $x \in \Omega$ par $(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}) \in \Omega^{k-1}$, ce lemme est encore vrai, alors l'ensemble P_{k-1} des vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$ tel que $(x_1, x_2 \cdots, x_{k-1}, y)$ r-normal, est de mesure pleine; Prenons $y \in B(r) - B(s)$, et posons

$$G_k = P_{k-1} \cap [T_{k-1}(B(r) \cap B(s))] \times \{y\} \subset \Omega^k\,;$$

En effectuant le théorème de Beyer, $\dim T_k^{-1} G_k = (k-1)/k$ et $T_k^{-1} G_k \subset B(r)$ du lemme. De la propriété de $y \in B(r) - B(s)$, il n'est pas tellement difficile à montrer que

$$T_k^{-1} G_k \subset B(r) - B(s).$$

Cette relation est valable pour tout k, on obtient

$$\dim (B(r) - B(s)) \geqq \dim \bigcup_{k=2}^{\infty} T_k^{-1} G_k = \sup_k \dim T_k^{-1} G_k = 1.$$

C.Q.F.D.

Références

[1] Beyer, W. A.: Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series. Pacific J. Math., **12**, 35–46 (1962).

[2] Billingsley, P.: Ergodic Theory and Information. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney (1965).

[3] Hinčin, A. Ja.: Über einen Satz der Wahrscheinlichkeits-rechnung. Fund. Math., **6**, 9–20 (1924).

[4] Eggleston, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math., Oxford Ser., **20**, 31–36 (1949).

[5] Nagasaka, K.: On Hausdorff dimension of non-normal sets. Ann. Inst. Stat. Math., **23**, 515–521 (1971).

[6] ——: Dimension de Hausdorff et ses applications (en japonais). Kokyu-Roku de l'Institut de Recherches pour les Sciences Mathématiques, no. 294, 124–144 (1977).

[7] ——: L'estimation de dimension de Hausdorff de certains ensembles. Res. Memo. of Inst. Stat. Math., no. 103 (1977).

[8] ——: Sur la dimension de Hausdorff des ensembles dont les éléments ne satisfont pas de certain loi statistique (en japonais). Proc. Inst. Stat. Math., **25**, 1–9 (1978).

[9] Schmidt, W. M.: On normal numbers. Pacific J. Math., **10**, 661–672 (1966).

[10] Shiokawa, I., and Uchiyama, S.: On some properties of the dyadic Champernowne numbers. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **26**, 9–27 (1975).