42. *Sur la théorie des suites presque-périodiques. I*

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 13, 1985)

On va donner brièvement quelques nouveaux résultats relatifs aux suites presque-périodiques qui se déduisent de propriétés d'espaces fonctionnels définis sur le compactifié de Bohr de Z.

1. Z est le groupe additif des entiers relatifs dont le dual $\hat{Z}$ s'identifie à $R/2\pi Z$. On munit $\hat{Z}$ de la topologie discrète et le dual de $\hat{Z}$, $\bar{Z}$, est le compactifié de Bohr de Z par définition. On a le théorème:

Théorème 1. *$\bar{Z}=G\times\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un groupe compact connexe et G est totalement discontinu.*

Remarques 1.1. $G=\prod_p Z_p$, où p décrit l'ensemble des nombres premiers et Z_p est l'anneau des entiers p-adiques.

Remarques 1.2. On peut voir de façon analogue que le compactifié de Bohr $\bar{R}$ de R est $\bar{R}=G_1\times\mathcal{G}$, où G_1 est un groupe compact connexe, et $\mathcal{G}$ est le même groupe que celui figurant dans $\bar{Z}$. On note $d\nu$ la mesure de Haar normalisée sur $\bar{R}$.

2. Suites presque-périodiques.

Définition. $f: \bar{N}^*\to C$ est une suite uniformément presque-périodique ($U.p.p.$) si f est la restriction à N^* d'une fonction continue sur $\bar{Z}$ à valeurs complexe.

Remarque. Cette définition correspond à celle donnée dans [1], dans le sens que les ensembles de fonctions obtenus sont les mêmes.

Définition. Soit $\alpha\geq 1$ donné. f est *presque-périodique* au sens de Besicovitch pour l'exposant α ($B^\alpha.p.p.$), si pour tout $\varepsilon>0$, il existe P_ε un élément $U.p.p.$ tel que $\limsup_{x\to\infty}(1/x)\sum_{n\leq x}|f(n)-P_\varepsilon(n)|^\alpha<\varepsilon$. (On écrira ($B.p.p.$) pour ($B^1.p.p.$).)

On notera $M(\cdot)$ la moyenne arithmétique, $\bar{M}(\cdot)$ la limite supérieure pour $x\to+\infty$ de $(1/x)\sum_{n\leq x}(\cdot)$, où $(\cdot)$ dépend de n.

Soit $\mathcal{L}^\alpha(\bar{Z},dm)$ l'espace des fonctions intégrables sur $\bar{Z}$ pour dm, la mesure de Harr normalisée. On notera

$$B_0^\alpha=\{f\in B^\alpha.p.p.\,|\,\bar{M}(|f|^\alpha)=0\},$$

$$\mathcal{L}_0=\left\{f\in\mathcal{L}(\bar{Z},dm)\,\middle|\,\int|f|\,dm=0\right\},$$

$$\boldsymbol{B}^\alpha=B^\alpha/B_0^\alpha \quad \text{où} \quad B^\alpha=\{f\in B^\alpha.p.p.\},$$

$$L^\alpha(\bar{Z},dm)=\mathcal{L}^\alpha(\bar{Z},dm)/\mathcal{L}_0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,(F)&=\text{spectre de } F, \text{ où } F\in\mathcal{L}(\bar{Z},dm)\\ &=\left\{\psi\in\hat{Z}\,\middle|\,\int F\bar{\psi}\,dm\neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Comme $\psi \in \hat{Z}$, $\psi|_N \in U.p.p.$ par définition, et on rappelle que $\mathrm{Sp}(f)$ = spectre de f, où $f \in B.p.p.$ existe et est défini par : $\mathrm{Sp}(f)=\{\psi \in \hat{Z} \mid M(f\bar{\psi}) \neq 0\}$. $\hat{f}_\psi = M(f\bar{\psi})$ est le "coefficient de Fourier" de f en ψ, et $\hat{F}_\psi = \int F\bar{\psi}$ est la "transformée de Fourier" de F en ψ.

On a alors le résultat :

Théorème 2. *Il existe une isométrie entre B^α et L^α définie par*

$$F \longleftrightarrow f,$$
$$L^\alpha \longleftrightarrow B^\alpha,$$
$$\hat{F}_\psi = \hat{f}_\psi \quad \text{pour tout } \psi \text{ de } \hat{Z}.$$

Corollaire. $\int F dm = M(f)$ *si F et f sont associés par l'isométrie décrite dans le théorème* 2.

3. Groupe associé à une suite $B.p.p.$

L'intérêt d'introduire cette notion est que $\bar{Z}$ s'écrit :

$$\bar{Z} = (\prod Z_p) \times \prod_{h \in H} \lim \operatorname{proj} \mathbf{R}/\{(2\pi q!/h)\mathbf{Z}\} = G \times \mathcal{G},$$

où $(1, H)$ est une base de Hamel de R. $\bar{Z}$ n'est donc pas un produit dénombrable de groupes compacts facile à manier.

Théorème 3. *Soit f un élément de $B.p.p.$, F un élément de $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$ qui lui est associé, $\Lambda(f)$ le spectre de f. Soit $\Lambda(f)^\perp = \{x \in \bar{Z} \mid \forall \psi \in \Lambda(f),\ \psi(x) = 1\}$. Alors, $\Lambda(f)^\perp$ est un sous-groupe compact de $\bar{Z}$, $G_f = \bar{Z}/\Lambda(f)^\perp$ est aussi compact, et sa mesure de Haar normalisée est la mesure image pour la projection canonique $\bar{Z} \to G_f$, de la mesure dm.*

On a en outre : le dual de G_f, noté $\hat{G}_f$, est le $\mathbf{Z}$-module engendré par $\Lambda(f)$.

Définition. G_f est le *groupe associé* à f.

On remarquera qu'il est nettement plus petit que $\bar{Z}$, et que c'est le cadre naturel pour étudier une seule fonction.

4. Complétion. On sait que $B^\alpha.p.p.$ est complet (Marcinkievicz). Le fait que $x \mapsto x+1$ conserve la mesure sur $\bar{Z}$ permet de démontrer :

Théorème 4. *Soit F un élément de $\mathcal{L}^\alpha(\bar{Z}, dm)$. Alors : pour dm-presque tout x, la suite $n \mapsto F(n+x)$ est un élément de $B^\alpha.p.p.$*

5. Suites à valeurs 0 et 1.

Théorème 5. *Soit f un élément de $B.p.p.$ ne prenant que les valeurs* 1 *ou* 0. *Alors, f est associée à la fonction caractéristique d'un ensemble dm-mesurable sur $\bar{Z}$, et la réciproque vaut.*

6. Fonction de distribution. Une étude intéressante a été faite, par Tortrat, des fonctions de distributions associées aux fonctions presque-périodiques (réelles) au sens de Besicovitch ([2]). On peut donner le résultat suivant :

Théorème 6. *Soit f un élément réel de $B.p.p.$, F un élément de $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$ qui lui est associé. Pour tout x réel, on définit $\sigma_F : R \to [0, 1]$, en x, par : $\sigma_F(x) = m$-mesure de $\{t \in \bar{Z} \mid F(t) < x\}$.*

Alors, la distribution asymptotique σ_f de f vérifie en tout point de con-

tinuité x de σ_F :

$$\sigma_f(x)=\sigma_F(x).$$

De plus, en un tel point, on définit :

$$I_x(n)=\begin{cases}1, & \text{si } f(n)<x\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$J_x(t)=\begin{cases}1, & \text{si } F(t)<x\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors, $I_x(n)$ est un élément de $B.p.p.(*)$ et $J_x(t)$ lui est associé dans $\mathcal{L}(\bar{\boldsymbol{Z}}, dm)$.

N. B. : (*) a été démontré par Delange [3] qui a étendu alors un résultat de l'auteur établi dans un cas particulier.

7. **Relation avec les fonctions presque-périodiques sur $\boldsymbol{R}$.**

On va noter $B^\alpha(\boldsymbol{R}, p.p.)$ l'espace des fonctions presque-périodiques sur $\boldsymbol{R}$ au sens de Besicovitch pour l'exposant α. Soit $f\in B.p.p.$ Si $\hat{G}_f\cap \boldsymbol{Z}=\{0\}$, alors G_f est un groupe compact connexe, la remarque 1.2 nous dit que f s'identifie à la transformée de Fourier d'un élément Φ de $\mathcal{L}(\bar{\boldsymbol{R}}, d\nu)$, auquel on peut associer un élément ϕ de $B(\bar{R}, p.p.)$. On aura alors, en tout point de continuité,

$$\sigma_f(x)=\sigma_F(x)=\sigma_\Phi(x)=\sigma_\phi(x) \qquad \text{etc.}$$

En général, pour étudier pratiquement une fonction ϕ de $B(\boldsymbol{R}, p.p.)$, on utilise une méthode de partage de $\boldsymbol{R}$ à pas constant δ, i.e. : on considère la suite $\phi_\delta(n)=\phi(n\cdot\delta)$, $n\in N$. La remarque que l'on vient de faire nous dit que les propriétés probabilistes de f_δ traduiront celles de ϕ si et seulement si $\hat{G}_{f_\delta}\cap \boldsymbol{Q}=\{0\}$; et dans ce cas, un seul δ suffit.

Références

[1] C. Corduneanu: Almost periodic functions. Interscience tracts in pure and applied mathematics. no. 22, Interscience Publishers (1968).
[2] A. Tortrat: Sur les fonctions presque-périodiques des classes B_p de Besicovitch. C. R. Acad. Sci. Paris, **252**, 1723–1725 (1961).
[3] H. Delange: En dehors d'une communication orale à l'auteur, il semble que ce résultat ait été présenté aux colloques de théorie des nombres d'Oberwolfach en 1980 et de Reims en 1981.