Osaka Mathematical Journal
Vol. 7, No. 2, December, 1955.

Sur une Totalisation dans les Espaces de Plusieurs Dimensions. II

Par Shizu ENOMOTO

Dans le mémoire précédante "Sur une totalisation dans les espaces plusieurs dimensions. I",[1] nous avons donné une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, qui a été dite l'intégrale $(\mathfrak{D})$. Nous avons montré dans le mémoire qu'on peut ramener toute intégrale $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle de n dimensions aux intégrations au sens de Denjoy n-plement itérées sur des segments d'une dimension.

Dans ce mémoire nous examinerons surtout les propriétés de l'intégrale $(\mathfrak{D})$.

On verra d'abord dans §5 que l'intégrale $(\mathfrak{D})$ est une extension de l'intégrale au sens de Denjoy à l'espace (euclidien) de plusieurs dimensions et que, comme le cas de l'intégrale au sens de Denjoy, il y a, pour une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle R_0 de plusieurs dimensions, une suite d'ensembles fermés $F_n (n=1, 2, \cdots)$ non-décroissante, de presque total R_0 et telle que l'intégrale $(\mathfrak{D})$ sur R_0 est la limite de l'intégrale au sens de Lebesgue de $f(p)$ sur F_n lorsque n tend vers 0. On verra de plus que pour une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ la fonction d'intervalle $F(I) = (\mathfrak{D})\int_I f(p)dp$ est extérieurement et intérieurement continue.

Dans § 6, nous montrerons que si une fonction d'intervalle $F(I)$ finiadditive et définie dans un intervalle R_0, est partout dérivable au sens strict dans R_0, la fonction $F_s'(p)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_0 et $F(I)=(\mathfrak{D})\int_I F_s'(p)dp$. Montrons enfin que si $f(p)$ est une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 et si $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie par $F(I)=(\mathfrak{D})\int_I f(p)dp$, la dérivée ordinaire $F'(p)$ existe presque partout dans R_0 et on a $F'(p)=f(p)$.

Désormais, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de le mémoire I.

---

1) Shizu Enomoto: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. I, Osaka Math. J. 7 (1955), 69—102.

§ 5. Quelques propriétés de l'intégrale ($\mathfrak{D}$).

Avant d'examiner les propriétés de l'intégrale ($\mathfrak{D}$), nous montrerons que l'intégrale ($\mathfrak{D}$) est une extension de l'intégrale au sens de Denjoy à l'espace de plusieurs dimensions. En effet, nous avons en plus du Théorème 3 et du Théorème 4 le Théorème suivant.

Théorème 7. *Si pour une fonction* $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})$ *définie dans un intervalle* $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ *il y a une fonction* $g(x_1)$ *intégrable au sens de Denjoy sur* $[a_1, b_1]$ *telle qu'on ait*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})=g(x_1) \text{ pour tout } (x_1, \cdots, x_{n_0})\in[a_2, b_2; \cdots; a_{n_0}, b_{n_0}],$$

alors, la fonction $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})$ *est aussi intégrable* ($\mathfrak{D}$) *dans* R_0.

Démonstration. Montrerons simplement le cas où $n_0=2$ seul. Posons $f(x, y)=f(x_1, x_2)$ et $g(x)=g(x_1)$. Puisque $g(x)$ est intégrable au sens de Denjoy sur $[a_1, b_1]$, il y a du Théorème 1 une suite d'ensembles fermés non-décroissante $F_n(n=1, 2, \cdots)$ de total $[a_1, b_1]$, qui satisfait aux conditions suivantes:

1) $g(x)$ est sommable sur tout F_n.

2) Pour tout F_n, la condition telle que $J_i\frown F_n\neq 0$ pour tout i entraîne $|\sum_{i=1}^{i_0} G(J_i)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{J_i\frown F_n} g(x)dx|<1/n(b_2-a_2)$, quel que soit le système des intervalles J_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans $[a_1, b_1]$ et n'empiétant pas les uns sur les autres, $G(J)$ étant l'intégrale au sens de Denjoy de $g(x)$ sur $J\leq[a_1, b_1]$.

Montrons que si l'on pose $F(I)=G(proj._x(I))\times|proj._y(I)|$ pour tout intervalle $I\leq R_0$ et $M_n=F_n\times[a_2, b_2]$ $(n=1, 2, \cdots)$, $F(I)$ est l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(x, y)$ sur I et $M_n(n=1, 2, \cdots)$ est une suite caractéristique et fondamentale de $f(x, y)$.

Il est évident que $F(I)$ est fini-additive, $M_n(n=1, 2, \cdots)$ est une suite d'ensembles fermés non-décroissante de total R_0 et $f(x, y)$ est sommable sur tout M_n.

Soit $I_i(i=1, 2, \cdots, i_0)$ un système d'intervalles contenus dans R_0 tel que $I_i\frown M_n\neq 0$ pour tout i. Puisqu'alors pour tout $y\in[a_2, b_2]$ le système d'intervalles $proj._x((I_i)^y)$ $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ dans $[a_1, b_1]$, pouvant être vide, n'empiètent pas les uns sur les autres, et puisqu'on a $proj._x((I_i)^y)\frown F_n\neq 0$ pour tout I_i tel que $(I_i)^y\neq 0$, il résulte

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G(proj._x((I_i)^y)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{proj._x((I_i)^y)\frown F_n} g(x)dx|<1/n(b_2-a_2).$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \frown M_n} f(x, y)\, d(x, y)| \\
&= |\sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{a_2}^{b_2} G(proj._x((I_i)^y)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{a_2\, proj._x((I_i)^y) \frown F_n}^{b_2} g(x)dx| \\
&\leq (L)\int_{a_2}^{b_2} |\sum_{i=1}^{i_0} G(proj._x((I_i)^y)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{proj._x((I_i)^y) \frown F_n} g(x)dx| \\
&< (1/n(b_2 - a_2)) \times (b_2 - a_2) = 1/n\,.
\end{aligned}
$$

Soient ε un nombre positif quelconque et $m(n, \varepsilon)$ un indice tel que $m(n, \varepsilon) \geq n$ et $1/m(n, \varepsilon) < \varepsilon/2$. Puisque $f(x, y)$ est sommable sur $M_{m(n, \varepsilon)}$, il y a un $\delta(n, \varepsilon) > 0$ dont on a $|(L)\int_{M_{m(n,\varepsilon)} \frown E} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon/2$ pour tout ensemble $E \leq R_0$. Soit I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ un système élémentaire dans R_0, qui satisfait aux conditions suivantes:

1′) $I_i \frown M_n \neq 0$ pour tout i,

2′) $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$.

Comme $M_n \leq M_{m(n,\varepsilon)}$, on a $I_i \frown M_{m(n,\varepsilon)} \neq 0$ pour tout i. On a donc

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \frown M_{m(n,\varepsilon)}} f(x, y)\, d(x, y)| < 1/m(n, \varepsilon) < \varepsilon/2\,.$$

D'autre part, comme on a

$$\mu_2((\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i) \frown (M_{m(n,\varepsilon)} - M_n)) \leq \mu_2((\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i) - M_n) < \delta(n, \varepsilon)\,,$$

on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \frown (M_{m(n,\varepsilon)} - M_n)} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon/2\,.$$

Conséquemment, il résulte

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \frown M_m} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon\,.$$

En effet, on voit que $f(x, y)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_0 et $M_n (n = 1, 2, \cdots)$ est une suite caractéristique et fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(x, y)$.

Dans la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, on peut voir que l'intégrale $(\mathfrak{D})$ est déterminée d'une façon univoque par la fonction à intégrer et ne change pas de valeur, quand on modifie cette fonction dans un ensemble de mesure nulle.

Car, en vertu du Théorème 6, on peut ramener toute intégrale

$(\mathfrak{D})$ dans un intervalle de n dimensions à n intégrations au sens de Denjoy consécutives sur des segments d'une dimension. On sait de plus que l'intégrale au sens de Denjoy est déterminée d'une façon univoque par la fonction à intégrer et ne change pas de valeur, quand on modifie cette fonction dans un ensemble de mesure nulle. De plus, on peut voir aussitôt de la définition que si $f(p)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$, une fonction $g(p)$, dont on a $g(p)=f(p)$ presque partout, est aussi intégrable $(\mathfrak{D})$ et l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ est aussi celle de $g(p)$.

En outre, on peut entendre de la définition que toute fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ est mesurable et presque partout finie.

Théorème 8. *Si deux fonctions $f_1(p)$ et $f_2(p)$ sont intégrables $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0, il en est autant de toute combinaison linéaire de ces fonctions (à coefficients constants α et β) et on a*

$$(\mathfrak{D})\int_{R_0}(\alpha f_1+\beta f_2)dp = \alpha(\mathfrak{D})\int_{R_0} f_1 dp+\beta(\mathfrak{D})\int_{R_0} f_2 dp .$$

Démonstration. Pour $j=1$ ou 2, soient $M_{jn}\,(n=1,2,\cdots)$ une suite caractéristique de l'intégration $(\mathfrak{D})$ de f_j et $F_{jn}\,(n=1,2,\cdots)$ une suite fondamentale de l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de j_j. Posons $M_n=M_{1n}\bigwedge M_{2n}$ et $F_n=F_{1n}\bigwedge F_{2n}$ pour tout n. Alors, on verra aussitôt de la définition que $M_n\,(n=1,2,\cdots)$ est une suite caractéristique de f_1+f_2 et $F_n\,(n=1,2,\cdots)$ est une suite fondamentale de f_1+f_2. En vertu de la remarque mentionnée plus haut, on verra de plus que l'égalité voulue est vraie.

Ensuite, remarquons le

Corollaire 1. *Désignons respectivement par $R_{n_0+m_0}$, R_{n_0} et R_{m_0} les intervalles $[a_1, b_1\,;\,a_2, b_2\,;\,\cdots\,;\,a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace $E_{n_0+m_0}$, $[a_1, b_1\,;\,a_2, b_2\,;\,\cdots\,;\,a_{n_0}, b_{n_0}]$ dans l'espace E_{n_0} et enfin l'intervalle $[a_{n_0+1}, b_{n_0+1}\,;\,\cdots\,;\,a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace E_{m_0}. Pour une fonction $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0+m_0})$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans $R_{n_0+m_0}$, la fonction*

$$g(x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+m_0})=(\mathfrak{D})\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}}(\cdots(\mathfrak{D}))\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0})d(x_1))\cdots)d(x_{n_0}),$$ [2]

est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_{m_0} et on a

$$(\mathfrak{D})\int_{R_{m_0}} g(x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+m_0})d(x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+m_0})$$

$$=(\mathfrak{D})\int_{R_{n_0+m_0}} f(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0})d(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0}) .$$

---

2) Plus précisément, pour presqe toutes les valeurs de $(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})$ de R_{m_0},

$$g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})=(\mathfrak{D})\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}}(\dots((\mathfrak{D})\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0})d(x_1))\dots)d(x_{n_0}),$$

et pour toutes les autres valeurs $(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})$ de R_{m_0},

$$g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})=\text{un nombre quelconque.}$$

On peut le voir dans la démonstration du Théorème 6.

Théorème 9.[3] *Pour toute fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0}, il y a une suite d'ensembles fermés B_i $(i=1, 2, \cdots)$, non-décroissante, de presque total R_0 et telle que*:

1) *$f(p)$ soit sommable sur tout B_i,*
2) *on ait*

$$(\mathfrak{D})\int_{R_0} f(p)dp = \lim_{i\to\infty}(L)\int_{B_i} f(p)dp\,.$$

Démonstration. Pour le cas où $n_0=1$, on a vu selon Théorème 1 le résultat voulu. Donc, il s'agit d'établir que: si l'on suppose que le résultat voulu est vrai pour tout $n'<n_0$, cela reste vrai pour n_0. Posons $R_0=[a_1, b_1; \cdots; a_{n_0}, b_{n_0}]$. En vertu du Théorème 6, il y a une suite d'ensembles fermés D_i $(i=1, 2, \cdots)$ non-décroissante, de presque total R_0 et telle que:

1′) $f(p)$ soit sommable sur tout D_i,[4]

2′) en presque tout point $q'=(x_1', \cdots, x_{n_0-1}')$ d'intervalle $K_0=[a_1, b_1; \cdots; a_{n_0-1}, b_{n_0-1}]$, on peut déterminer pour tout $\varepsilon>0$ un indice $i_0(q', \varepsilon)$ de façon qu'on ait

$$\left|(D)\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x_1', \cdots, x_{n_0-1}', x_{n_0})d(x_{n_0}) - (L)\int_{D_i^{q'}} f(x_1', \cdots, x_{n_0-1}', x_{n_0})d(x_{n_0})\right| < \varepsilon,$$

pour tout $i\geq i_0(q', \varepsilon)$.

Posons

$$g(x_1, \cdots, x_{n_0-1}) = (D)\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x_1, \cdots, x_{n_0})d(x_{n_0})\,,$$

alors, en vertu du Corollaire 1, la fonction $g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans l'intervalle K_0 et on a

$$(\mathfrak{D})\int_{R_0} f(x_1, \cdots, x_{n_0})d(x_1, \cdots, x_{n_0}) = (\mathfrak{D})\int_{K_0} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\,d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\,.$$

Par suite, par hypothèse de l'induction, il y a pour la fonction $g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})$ une suite d'ensembles fermés B_j $(j=1, 2, \cdots)$, non-décroissante, de presque total K_0 et telle que

1″) $g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})$ soit sommable sur tout B_j,

2″) pour $\varepsilon>0$ quelconque, on peut choisir un indice $j_0(\varepsilon)$ tel que $j_0(\varepsilon)<j_0(\varepsilon')$ si $\varepsilon>\varepsilon'$ et qu'on ait

3) Voir Théorème 2.

4) On peut le voir en vertu de la démonstration du Théorème 6.

$$|(\mathfrak{D})\int_{K_0} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1}) -$$
$$(L)\int_{B_{j_0(\varepsilon)}} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})| < \varepsilon .$$

Soit $\varepsilon_n\,(n=1, 2, \cdots)$ une suite quelconque telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$. On peut déterminer pour ε_n un nombre positif δ_n de façon que $\delta_n < \delta_{n'}$ si $n > n'$ et qu'on ait

$$|(L)\int_{B\frown B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})| < \varepsilon_n/3 ,$$

quel que soit l'ensemble B contenu dans K_0 dont la mesure est inférieure à δ_n.

En raisonnant de la même manière, on peut voir qu'il y a pour tout ε_n un indice $i_0(\varepsilon_n)$ et un ensemble fermé H_n contenu dans $B_{j_0(\varepsilon_n/3)}$ tels que $i_0(\varepsilon_n) > i_0(\varepsilon_{n'})$ $(n > n')$, $H_n \supseteq H_{n'}$ $(n > n')$, $\mu_{n_0-1}(B_{j_0(\varepsilon_n/3)} - H_n) < \min(\delta_n, 1/n)$ et on ait

$$|g(x_1', \cdots, x_{n_0-1}') - (L)\int_{(D_{j_0(\varepsilon_n)})^{q'}} f(x_1', \cdots, x_{n_0-1}', x_{n_0})\, d(x_{n_0})|$$
$$< \varepsilon_n/3 \cdot \mu_{n_0-1}(K)$$

pour tout $q' = (x_1', \cdots, x_{n_0-1}') \in H_n$.

Posons $F_n = (H_n \times [a_{n_0}, b_{n_0}]) \frown D_{i_0(\varepsilon_n)}$ pour tout n. Alors on a

$$|(\mathfrak{D})\int_{R_0} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0}) -$$
$$(L)\int_{F_n} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0})|$$
$$\leq |(\mathfrak{D})\int_{K_0} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1}) -$$
$$(L)\int_{B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})|$$
$$+ |(L)\int_{B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1}) -$$
$$(L)\int_{H_n} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})|$$
$$+ |(L)\int_{H_n} g(x_1, \cdots, x_{n_0-1})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1}) -$$
$$(L)\int_{H_n} ((L)\int_{(D_{i_0(\varepsilon)})^{(x_1, \cdots, x_{n_0-1})}} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\, d(x_{n_0}))\, d(x_1, \cdots, x_{n_0-1})|$$
$$< \varepsilon_n/3 + \varepsilon_n/3 + (\varepsilon_n/3 \cdot \mu_{n_0-1}(K_0)) \times \mu_{n_0-1}(H_n) < \varepsilon_n .$$

On verra que $F_n\,(n=1, 2, \cdots)$ est une suite voulue.

Examinons maintenant la continuité de l'intégrale $(\mathfrak{D})$.

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans un intervalle R_0 est *continue* (α) dans R_0 (à un point $p \in R_0$) quand elle tend vers zéro avec l'aire d'intervalle I (renfermant p) dont la norme est inférieure à α.

Théorème 10. *Lorsque* $f(p)$ *est intégrable* $(\mathfrak{D})$ *dans un intervalle* R_0, *la fonction d'intervalle*

$$F_{M_n}(I) = \begin{cases} (\mathfrak{D})\int_I f(p)\,dp & si\ I \frown M_n \neq 0, \\ 0 & si\ I \frown M_n = 0 \end{cases}$$

est continue$(1/n)$ *pour tout* n, $M_n\,(n=1, 2, \cdots)$ *étant une suite caractéristique pour l'intégration* $(\mathfrak{D})$ *de* $f(p)$.

Démonstration. Soit $F_n\,(n=1, 2, \cdots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut déterminer pour F_n un nombre $\delta' = \delta'(n, \varepsilon)$ de façon qu'on ait

$$|(L)\int_{E \frown F_n} f(p)\,dp| < \varepsilon/2,$$

quel que soit l'ensemble E dont la mesure est inférieure à δ. Posons $\eta = \eta(n, \varepsilon) = \min(\delta', \delta(n, \varepsilon/2))$, où $\delta(n, \varepsilon/2)$ est le nombre mentionné dans 2) de la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$ pour $M_n\,(n=1, 2, \cdots)$ et $F_n\,(n=1, 2, \cdots)$. Alors, pour tout intervalle I tel que $|I| < \eta$ et *que norme* $(I) < 1/n$, on a

$$|F_{M_n}(I) - (L)\int_{I \frown F_n} f(p)\,dp| < \varepsilon/2$$

lorsque $I \frown M_n \neq 0$ et on a $|F_{M_n}(I)| = 0$ lorsque $I \frown M_n = 0$. Par suite, $|F_{M_n}(I)| < |(L)\int_{I \frown F_n} f(p)\,dp| + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc, $F_{M_n}(I)$ est continue $(1/n)$.

Concernant la continuité de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, on aura de plus le théorème suivant.

Pour cela, nous montrons d'abord le

Lemme 6. *Désignons respectivement par* $R_{n_0+m_0}$, R_{n_0} *et* R_{m_0} *les intervalles* $[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ *dans l'espace* $E_{n_0+m_0}$, $[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ *dans l'espace* E_{n_0} *et enfin l'intervalle* $[a_{n_0+1}, b_{n_0+1}; \cdots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ *dans l'espace* E_{m_0}. *Pour une fonction* $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0+m_0})$ *intégrable* $(\mathfrak{D})$ *dans* $R_{n_0+m_0}$, *il y a une suite non-décroissante d'ensembles fermés* $N_h\,(h=1, 2, \cdots)$, *de total* R_{m_0} *et telle que*:

À tout h et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\tau(h, \varepsilon) > 0$ tel que $\tau(h, \varepsilon) > \tau(h', \varepsilon)$ pour tout $h < h'$ et que les conditions suivantes

1) $\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l) \frown N_h \neq 0$ *pour tout* l,

2) $\sum_{l=1}^{l_0} |\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l)| < \tau(h, \varepsilon)$,

3) *norme* $(\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l)) < 1/h$ *pour tout* l

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I_l} f(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0}) d(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0})| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire I_l ($l = 1, 2, \cdots, l_0$) tel que $\underset{E_{n_0}}{proj.}_x(I_l) = R_{n_0}$ pour tout l.

Démonstration. Pour le cas où $n_0 = 1$ et m_0 est un nombre quelconque, on a vu selon Lemme 3 le résultat voulu. Donc, il s'agit d'établir que: si l'on suppose que le résultat voulu est vrai pour tout $n' < n_0$ et m_0 quelconque, cela reste vrai pour n_0 et m_0. En vertu du Théorème 6, la fonction $f(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0})$ considérée comme fonction de x_1 dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ est intégrable au sens de Denjoy presque partout dans l'intervalle $[a_2, b_2; \cdots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$. Posons

$$g(x_2, \cdots, x_{n_0+m_0}) = (D) \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_{n_0+m_0}) d(x_1).$$

Puisqu'alors en vertu du Corollaire 1 $g(x_2, \cdots, x_{n_0+m_0})$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans l'intervalle $[a_2, b_2; \cdots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$, par hypothèse de l'induction, il y a une suite non-décroissante d'ensembles fermés N_h ($h = 1, 2, \cdots$), de total R_{m_0} et telle que:

à tout h et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\tau(h, \varepsilon) > 0$ tel que $\tau(h, \varepsilon) > \tau(h', \varepsilon)$ pour tout $h < h'$ et que les conditions suivantes

1′) $\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l') \frown N_h \neq 0$ pour tout l,

2′) $\sum_{l=1}^{l_0} |\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l')| < \tau(h, \varepsilon)$,

3′) *norme* $(\underset{E_{m_0}}{proj.}_y(I_l')| < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I_l'} g(x_2, \cdots, x_{n_0+m_0}) d(x_2, \cdots, x_{n_0+m_0})| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire I_l' $(l=1,2,\cdots,l_0)$ dans l'intervalle $[a_2, b_2\,;\cdots;a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ de n_0+m_0-1 dimensions tel que $\underset{E_{n_0-1}}{proj._x}(I_l')=[a_2, b_2\,;\cdots;a_{n_0}, b_{n_0}]$ pour tout l.

Soit I_l $(l=1,2,\cdots,l_0)$ un système élémentaire dans $R_{n_0+m_0}$ tel que

1″) $\underset{E_{m_0}}{proj._y}(I_l)\frown N_h \neq 0$ pour tout l,

2″) $\sum_{l=1}^{l_0}|\underset{E_{m_0}}{proj._y}(I_l)|<\tau(h,\varepsilon)$,

3″) *norme* $(\underset{E_{m_0}}{proj._y}(I_l))<1/h$ pour tout l,

4″) $\underset{E_{n_0}}{proj._x}(I_l)=R_{n_0}$ pour tout l.

Puisqu'alors $\underset{E_{m_0}}{proj._y}(I_l)$ $(l=1,2,\cdots,l_0)$ est un système élémentaire dans R_{m_0}, si l'on pose

$$I_l'=[a_2, b_2\,;\cdots;a_{n_0},b_{n_0}]\times \underset{E_{m_0}}{proj._y}(I_l)$$

pour tout l, le système élémentaire I_l' $(l=1,2,\cdots,l_0)$ dans $[a_2, b_2\,;\cdots;a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ possède les propriétés 1′) 2′) et 3′) d'en haut. Donc, on a

$$\Big|\sum_{l=1}^{l_0}(\mathfrak{D})\int_{I_l'}g(x_2,\cdots,x_{n_0+m_0})\,d(x_2,\cdots,x_{n_0+m_0})\Big|<\varepsilon.$$

Par suite,

$$\Big|\sum_{l=1}^{l_0}(\mathfrak{D})\int_{I_l}f(x_1,\cdots,x_{n_0+m_0})\,d(x_1,\cdots,x_{n_0+m_0})\Big|$$
$$=\Big|\sum_{l=1}^{l_0}(\mathfrak{D})\int_{I_l'}\Big((D)\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\cdots,x_{n_0+m_0})\,d(x_1)\Big)d(x_2,\cdots,x_{n_0+m_0})\Big|$$
$$=\Big|\sum_{l=1}^{l_0}(\mathfrak{D})\int_{I_l'}g(x_2,\cdots,x_{n_0+m_0})\,d(x_2,\cdots,x_{n_0+m_0})\Big|<\varepsilon.$$

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} est *extérieurement*, resp. *intérieurement*, *continue en un intervalle* I situé dans R_0, lorsque pour tout intervalle I il y a pour $\varepsilon>0$ un nombre $\delta(\varepsilon,I)>0$ tel que si $I'\supseteqq I$, resp. $I\supseteqq I'$, et $\mu_{n_0}(I'-I)<\delta(\varepsilon,I)$, resp. $\mu_{n_0}(I-I')<\delta(\varepsilon,I)$, on a $|F(I)-F(I')|<\varepsilon$.

Théorème 11. *Pour une fonction intégrable* $(\mathfrak{D})$ *dans un intervalle* R_0 *de l'espace* E_{n_0}, *la fonction d'intervalle* $F(I)=(\mathfrak{D})\int_I f(p)\,dp$ *est extérieurement et intérieurement continue en tout intervalle* $I\subseteqq R_0$.

Démonstration. Montrons seulement que $F(I)$ est extérieurement continue pour le cas où $n_0=3$. Soient $I_0=[a_{01}, b_{01}\,;a_{02}, b_{02}\,;a_{03}, b_{03}]$ un intervalle quelconque situé dans $R_0=[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$ et ε un nombre positif quelconque.

1°) Puisque $f(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans l'intervalle $[a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; a_3, b_3]$, en vertu du Lemme 6 il y a une suite d'ensembles $N_h(h=1, 2, \cdots)$, non-décroissante, de total $[a_3, b_3]$ et telle que:

à tout h on peut faire correspondre un nombre positif $\tau_3(h, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes

1′) $proj._y(I_l) \frown N_h \neq 0$ pour tout l,

2′) $\sum_{l=1}^{l_0} |proj._y(I_l)| < \tau_3(h, \varepsilon)$,

3′) $norme\ (proj._y(I_l))| < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_l(l=1, 2, \cdots, l_0)$ tel que $\underset{E_2}{proj._x}(I_l)= [a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}]$ pour tout l.

Comme $N_h\,(h=1, 2, \cdots)$ est une suite non-décroissante et de total $[a_3, b_3]$, il y a un ensemble N_{h_0} renfermant les points a_{03} et b_{03}. Donc, si l'on pose $\tau_3(\varepsilon)=\min(1/h_0, \tau_3(h_0, \varepsilon)/2)$, pour toute couple (a''', b''') telle que $a_0 \leq a''' \leq a_{03} < b_{03} \leq b''' \leq b_3$, $a_{03}-a''' < \tau_3(\varepsilon)$ et $b'''-b_{03} < \tau_3(\varepsilon)$, on a

$$|\sum_{l=1}^{2} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1=[a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; a''', a_{03}]$ et $I_2=[a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; b_{03}, b''']$.

Lorsqu'on y remplace l'axe z par l'axe y, resp. l'axe x, on peut déterminer un nombre $\tau_i(\varepsilon)$ $(i=2$, resp. $i=1)$ tel que:

pour toute couple $(a^{(i)}, b^{(i)})$ $(i=2$, resp. $i=1)$ telle que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i}-a^{(i)}) < \tau_i(\varepsilon)$ et $(b^{(i)}-b_{0i}) < \tau_i(\varepsilon)$, on a

$$|\sum_{l=1}^{2} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1=[a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; a_{03}, b_{03}]$ et $I_2=[a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; a_{03}, b_{03}]$, resp. $I_1=[a', a_{01}; a_{02}, b_{02}; a_{03}, b_{03}]$ et $I_2=[b_{01}, b'; a_{02}, b_{02}; a_{03}, b_{03}]$.

2°) Puisque $f(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans l'intervalle $[a_{01}, b_{01}; a_2, b_2; a_3, b_3]$, en vertu du Lemme 6 il y a une suite d'ensembles $N_h'\,(h=1, 2, \cdots)$, non-décroissante, de total $[a_2, b_2; a_3, b_3]$ et telle que:

à tout h on peut faire correspondre un nombre positif $\tau_1'(h, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes

1') $\underset{E_2}{proj._y}(I_l) \frown N_h' \neq 0$ pour tout l,

2') $\sum_{l=1}^{l_0} |\underset{E_2}{proj._y}(I_l)| < \tau_1'(h, \varepsilon)$,

3') *norme* $(\underset{E_2}{proj._y}(I_l)) < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

quel que soit le système d'intervalles I_l $(l = 1, 2, \cdots, l_0)$ tel que $proj._x(I_l) = [a_{01}, b_{01}]$ pour tout l.

Pour la suite N_h' $(h = 1, 2, \cdots)$, il y a un ensemble $N_{h'}'$ renfermant les points (a_{02}, a_{03}), (a_{02}, b_{03}), (b_{02}, a_{03}) et (b_{02}, b_{03}). Donc, si l'on pose $\tau_1'(\varepsilon) = \min(1/h', (\tau_1'(h', \varepsilon))^{1/2}/2)$, pour toutes les couples (a'', b'') et (a''', b''') telles que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i} - a^{(i)}) < \tau_1'(\varepsilon)$ et $(b^{(i)} - b_{0i}) < \tau_1'(\varepsilon)$ pour $i = 2, 3$, on a

$$|\sum_{l=1}^{4} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1 = [a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; a''', a_{03}]$, $I_2 = [a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; b_{03}, b''']$, $I_3 = [a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; a''', a_{03}]$ et $I_4 = [a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; b_{03}, b''']$.

Lorsqu'on y remplace les axes y, z par z, x, resp. x, y, on peut déterminer un nombre positif $\tau_2'(\varepsilon)$, resp. $\tau_3'(\varepsilon)$, dont il résulte le même résultat que celui d'en haut.

3°) De même, on peut déterminer selon Théorème 10 un nombre positif $\tau''(\varepsilon)$ tel que:

pour toutes trois couples (a', b') (a'', b'') et (a''', b''') telles que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i} - a^{(i)}) < \tau''(\varepsilon)$ et $(b^{(i)} - b_{0i}) < \tau''(\varepsilon)$ pour $i = 1, 2, 3$, on a

$$|\sum_{l=1}^{8} F(I_l)| < \varepsilon/3,$$

où $I_l (l = 1, 2, \cdots, 8)$ désignent tous les intervalles $[J_{1i}; J_{2j}; J_{3k}]$ $(i, j, k = 1$ ou $2)$ tels que $J_{h1} = [a^{(h)}, a_{0h}]$, $J_{h2} = [b_{0h}, b^{(h)}]$ $(h = 1, 2, 3)$.

Posons $\kappa(\varepsilon) = \min(\tau_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\tau_i'(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\tau''(\varepsilon)) \times \min((b_{02} - a_{02})(b_{03} - a_{03}), (b_{03} - a_{03})(b_{01} - a_{01}), (b_{01} - a_{01})(b_{02} - a_{02})))$. Alors, à cause de 1°) 2°) et 3°), on peut voir que

$$|F(I) - F(I_0)| < \varepsilon,$$

quel que soit l'intervalle I tel que $I \supseteq I_0$ et $\mu_3(I - I_0) < \kappa(\varepsilon)$.

Passons encore à la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$.

On verra aussitôt que, $f(p)$ étant une fonction intégrable ($\mathfrak{D}$), on peut choisir une suite fondamentale $F_n\,(n=1, 2, \cdots)$ pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$, de telle sorte que $f(p)$ soit mesurable et bornée sur tout F_n.

Soit $f(p)$ une fonction intégrable ($\mathfrak{D}$) dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0}. Soient $M_n\,(n=1, 2, \cdots)$ une suite charactéristique pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$ et $F_n\,(n=1, 2, \ldots)$ une suite foundamental pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$ et $F_n(n=1, 2, \cdots)$ une suite fondamental pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$. Alors on voit que:

2*) À tout n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspendre un nombre $\delta^*(n, \varepsilon)>0$ tel que les conditions suivantes

2*1) $(I_i)^\circ \frown M_n \neq 0$ pour tout i,

2*2) $\mu_{n_0}(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta^*\,(n, \varepsilon)$,

2*3) *norme* $(I_i) < 1/n$ pour tout i

entraînent

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \frown F_n} f(p)\,dp| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_i\,(i=1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Car, soit $\delta(n, \varepsilon)$ un nombre positif mentionné à 2) de la définition de l'intégration ($\mathfrak{D}$) pour $M_n\,(n=1, 2, \cdots)$ et $F_n\,(n=1, 2, \cdots)$. Posons $\delta^*(n, \varepsilon)=\delta(n, \varepsilon/2)$. Soit $I_i\,(i=1, 2, \cdots, i_0)$ un système d'intervalles contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres. Supposons que le système satisfasse aux conditions 2*1), 2*2) et 2*3). En vertu du Théorème 11, il y a pour le système un système d'intervalles I_i' $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ tel que:

1′) $I_i' \frown M_n \neq 0$ pour tout i,

2′) $I_i' \leq I_i$ pour tout i,

3′) $|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i')| < \varepsilon/4$ et $|\sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{(I_i - I'_i) \frown F_n} f(p)\,dp| < \varepsilon/4$.

Selon 2′), on a $\mu_{n_0}(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i' - M_n) < \delta^*\,(n, \varepsilon) = \delta(n, \varepsilon/2)$ et *norme* $(I_i') \leq$ *norme* $(I_i) < 1/n$ pour tout i. Donc, en vertu de la définition on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i') - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i' \frown F_n} f(p)\,dp| < \varepsilon/2.$$

Par conséquent, il vient que

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\frown F_n} f(p)\,dp\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i)-\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i')\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i')-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i'\frown F_n} f(p)\,dp\Big| \\
&+\Big|\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i'\frown F_n} f(p)\,dp-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\frown F_n} f(p)\,dp\Big| \\
&< \varepsilon/4+\varepsilon/2+\varepsilon/4=\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

§ 6. Rapport à la dérivation.

Commençons par deux théorèmes suivants, qui pourront être regardés comme point de départ de nos études sur l'intégrale ($\mathfrak{D}$).

Par dérivée au sens strict $F_s'(p)$ au point p d'une fonction d'intervalle $F(I)$, nous entendons la limite de l'expression $F(I)/|I|$, où I désigne un intervalle renfermant p et dont *norme* (I) tend vers 0.

Théorème 12. *Si $F(I)$ est une fonction d'intervalle fini-additive définie dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} tel qu'il y ait $F_s'(p)$ en tout point p de R_0, la fonction $F_s'(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_0 et on a*

$$F(I)=(\mathfrak{D})\int_I F_s'(p)\,dp \qquad \textit{pour tout } I\leq R_0\,.$$

Démonstration. Simplement, nons nous bornons au cas de $n_0=2$. Désignons par $f(p)$ la fonction $F_s'(p)$. Pour tout n, A_n désigne l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait $\dfrac{|F(I)|}{|I|}<n$, quel que soit l'intervalle $I\leq R_0$ refermant p et tel que *norme* $(I)<4/n$. Posons $M_n=\bar{A}_n$ $(n=1,2,\cdots)$. On voit aussitôt que M_n $(n=1,2,\cdots)$ est une suite d'ensembles fermés non-décroissante et de total R_0. Montrons que ce sera une suite caractéristique pour l'intégration ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$ et fondamentale pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$. Nous allons montrer d'abord $M_n\leq A_{2n}$ pour tout n. Pour cela, il suffit de prouver $\bar{A}_n-A_n\leq A_{2n}$ pour tout n. Soient p un point de $\bar{A}_n-A_n$ et I un intervalle renfermant p et tel que *norme* $(I)<2/n$. Alors, il y a une suite des points p_j $(j=1,2,\cdots)$ telle que $p_j\in A_n$ et $\lim\limits_{j\to\infty} p_j=p$. Pour cela, les deux cas suivants peuvent être considérés.

i) Le cas où il y a p_{j_0} tel que $p_{j_0}\in I$: Comme $p_{j_0}\in A_n$, on voit aussitôt que $|F(I)|/|I|<n<2n$.

ii) Le cas où il n'y a aucun point p_j tel que $p_j\in I$: Dans le cas, sans restreindre la généralité, il suffit de considérer les deux cas suivants qui sont montrés dans fig. 2.

Pour *a*), on peut construire comme fig. 2 un intervalle I' tel que:

1) $I \bigcup I'$ soit un intervalle,
2) il y ait un $p_{j_0} \in I'$,
3) $norme(I') < 2/n$,
4) $|I'| \leqq |I|/2$.

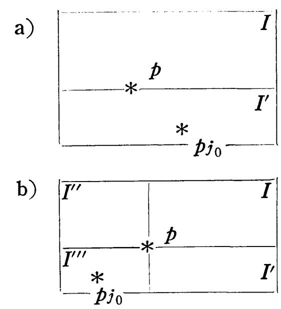

Fig. 2

Parce qu'il en résulte $norme(I \bigcup I') < 4/n$ et $I \bigcup I' \ni p_{j_0}$, on a $|F(I \bigcup I')| < |I \bigcup I'| \cdot n$ et $|F(I')| < |I| \cdot n$. Donc, $|F(I)| \leqq |F(I \bigcup I')| + |F(I')| < (|I \bigcup I'| + |I'|) \cdot n \leqq 2n|I|$. Pour *b*), on peut construire comme fig. 2 trois intervalles $I^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que:

1) $I \bigcup (\bigcup_{i=1}^{3} I^{(i)})$ soit un intervalle.
2) il y ait pour I''' un $p_{j_0} \in I'''$.
3) $norme(I^{(i)}) < 2/n$ pour tout i.
4) $\sum_{i=1}^{3} |I^{(i)}| < |I|/4$.

De la même manière que a), on peut démontrer que $|F(I)| < 2n|I|$. Donc, le point p appartient à A_{2n}.

D'après ce qu'on a $M_n \leqq A_{2n}$, $|f(p)| \leqq 2n$ pour tout $p \in M_n$. Par conséquent, $f(p)$ est sommable sur tout M_n.

Pour montrer la propriété 2) de la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$), commençons par les préparatifs suivants.

Désignons par $\mathfrak{R}_m(R_0)$ toutes les mailles du m^e-réseau de l'intervalle R_0 pour tout $m=1,2,\cdots$. Posons $G_n = I_0 - M_n$ et choisissons: dans $\mathfrak{R}_1(R_0)$ les mailles qui sont contenues dans G_n, dans $\mathfrak{R}_2(R_0)$ les mailles qui sont contenues dans G_n et qui ne sont pas contenue dans les mailles précédemment choisies et ainsi de suite. On les désigne par R_j^n $(j=1,2,\cdots)$. Ils possèdent les trois propriétés suivantes:

1°) $\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^n = G_n$ et R_j^n $(j=1,2,\cdots)$ n'empiètent pas les unes sur les autres.

2°) Pour tout intervalle $I \leqq R_0$, on a $\sum_{j=1}^{\infty} |F(I \bigwedge R_j^n)| < \infty$. En outre, pour tout intervalle $I \leqq R_0$ dont $norme(I) < 1/n$, on a $\sum_{j=1}^{\infty} |F(I \bigwedge R_j^n)| \leqq 18n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \bigwedge I|$.

On voit aisément la propriété 1°). Montrerons la propriété 2°). Soit j_0 un indice tel que $norme(R_j^n) < 1/n$ pour tout $j \leqq j_0$. Si R_j^n est une maille de m^e–réseau, la maille de $(m-1)^e$–réseau qui contient R_j^n possède au moins un point p_{nj} de M_n. Pour tout R_j^n $(j \geq j_0)$, désignons par Q_j^n la maille. Alors, sans restreindre la généralité, on peut considérer seulement les trois cas suivants qui sont montrés dans fig. 3. Soient

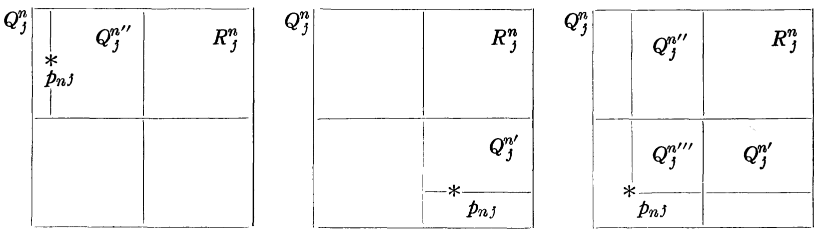

Fig. 3

$Q_j^{n(i)}$ $(i=1,2,3)$ des intervalles construits comme fig. 3. Puisque *norme* $(Q_j^{n(i)}) < 1/n$ et $p_{nj} \in A_{2n}$ pour tout $j \geq j_0$, on a $|F(R_j^n)| \leq 18n \cdot |R_j^n|$, $j \geq j_0$, de la même manière que le cas de fig. 2. On a donc

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |F(R_j^n)| \leq 18n \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} |R_j^n| .$$

Par suite,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |F(R_j^n)| \leq \sum_{j=1}^{j_0-1} |F(R_j^n)| + 18n \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} |R_j^n| < \infty .$$

De même, on peut prouver le reste de la propriété 2°).

Définissons maintenant une fonction d'intervalle $G_n(I)$ de manière que

$$G_n(I) = (L) \int_{I \frown M_n} f(p)\, dp + \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \frown I) , \quad I \leq R_0 .$$

Alors, cela possède les propriétés suivantes :

1′) $G_n(I)$ est fini-additive.

2′) On a $G_n(I) = F(I)$ pour tout intervalle I contenu dans G_n.

3′) $(G_n)_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n.

On voit facilement la propriété 1′). Pour 2′) : Comme $I \leq G_n$, on a $I \frown M_n = 0$ pour l'ensemble fermé M_n, de sorte que dist. $(I, M_n) > 0$.[5] Donc, on peut choisir un intervalle $I' = [a, a'\,;\, b, b']$ tel que les points (a, b), (a', b), (a, b'), (a', b') soient des points de division d'un m_0^e–réseau. Pour cet intervalle I', on peut choisir un indice j_0 tel que I' n'empiètent

5) Pour deux ensembles A et B quelconques, dist. (A, B) désigne le nombre $\underset{p \in A,\, q \in B}{\text{borne sup}}$ dist. (p, q).

aucune R_j^n pour tout $j > j_0$. On a $I' = \bigcup_{j=1}^{j_0} (R_j^n \frown I')$, de sorte que $I = \bigcup_{j=1}^{j_0} (R_j^n \frown I)$. Donc, $G_n(I) = \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \frown I) = \sum_{j=1}^{j_0} F(R_j^n \frown I) = F(I)$, puisque $F(I)$ est fini-additive. Pour 3′) : Posons $\Phi(I) = (L)\int_{I \frown M_n} f(p)\,dp$, $I \leq R_0$. Alors, on a $\Phi_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n. Soient p un point de dispersion de l'ensemble complémentaire de M_n dont on a $\Phi'_s(p) = f(p)$ au point p et I un intervalle renfermant p et dont la norme est inférieure à $1/n$. Alors, on a selon 2°)

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} |F(R_j^n \frown I)|}{|I|} \leq 18n \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \frown I|}{|I|} = 18n \frac{\mu_2(I - M_n)}{|I|}.$$

Par suite,

$$\lim_I \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \frown I)}{|I|} \right| \leq 18n \cdot \lim_I \frac{\mu_2(I - M_n)}{|I|} = 0,$$

où I désigne un intervalle arbitraire renfermant p et dont la norme tend vers 0. Il en résulte $\lim_I \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \frown I)}{|I|} = 0$. On a donc

$$\lim_I \frac{G_n(I)}{|I|} = \lim_I \frac{(L)\int_{I \frown M_n} f(p)\,dp}{|I|} + \lim_I \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \frown I)}{|I|}$$
$$= \Phi_s'(p) + 0 = \Phi_s'(p) = f(p).$$

En effet, $(G_n)_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n.

Considérons ensuite une fonction d'intervalle définie par $H_n(I) = G_n(I) - F(I)$, $I \leq R_0$. On verra qu'elle possède les propriétés suivantes:

1″) $H_n(I)$ est fini-additive.

2″) $(H_n)_s'(p) = 0$ presque partout dans R_0.

3″) $H_n(I)$ est absolument continue sur R_0, c.-à-d. étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ de façon qu'on ait

$$\sum_{i=1}^{i_0} |F(I_i)| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont la mesure $\sum_{i=1}^{i_0} |I_i|$ est inférieure à η.

On voit aussitôt la propriété 1′). Pour 2″) : Comme $(G_n)_s'(p) = f(p)$ et $F_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n, $(H_n)_s'(p) = 0$ presque partout dans M_n. D'autre part, pour le point p de $R_0 - M_n$ il y a un intervalle I_0 contenant p et contenu dans $R_0 - M_n$. On a selon 2″) $G_n(I) = F(I)$

pour tout $I \subseteq I_0$. Donc, $(H_n)_s'(p)=0$. Pour 3″) : Comme la fonction $f(p)$ est sommable sur M_n, il y a pour tout $(1>)\varepsilon>0$, un nombre $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tel que pour tout ensemble E la condition $\mu_2(E)<\delta$ entraîne $|(L)\int_{E\frown M_n} f(p)\,dp|<\varepsilon/4$. Posons $\eta=\min(\delta, \varepsilon/(18\times 4)n)$. Soit I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ un système d'intervalles dont les intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres et $\sum_{i=1}^{i_0}|I_i|<\eta$.

Désignons par I_i' $(i=1,2,\cdots,i_1)$ tous les intervalles tels que $I_i\frown M_n \neq 0$ parmi des I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ et par I_i'' $(i=1,2,\cdots,i_2)$ tous les autres intervalles. Pour I_i' $(i=1,2,\cdots,i_1)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i_1}|G_n(I_i')| &\leq \sum_{i=1}^{i_1}\Big|(L)\int_{I_i'\frown M_n} f(p)\,dp+\sum_{j=1}^{\infty}F(R_j^n\frown I_i')\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_1}\Big|(L)\int_{I_i'\frown M_n} f(p)\,dp\Big|+\sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{\infty}|F(R_j^n\frown I_i')| \\ &< \varepsilon/4+\sum_{i=1}^{i_1}(18n\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|R_j^n\frown I_i'|) \\ &\leq \varepsilon/4+18n\cdot\sum_{i=1}^{i_1}|I_i'|<\varepsilon/4+18n\,(\varepsilon/(18\times 4)n)=\varepsilon/2\end{aligned}$$

En notant $M_n \subseteq A_{2n}$ et $I_i'\frown M_n \neq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{i_1}|F(I_i')|<\sum_{i=1}^{i_1}(|I_i|\times 4n)\leq(\varepsilon/(18\times 4)n)\times 4n<\varepsilon/2\,.$$

Donc, on a $\sum_{i=1}^{i_1}|H_n(I_i')|<\varepsilon$. D'autre part, pour I_i'' $(i=1,2,\cdots,i_2)$, on a $G_n(I_i'')=F(I_i'')$ pour tout i, puisque $I_i''\leq G_n$. Donc, on a $\sum_{i=1}^{i_2}|H_n(I_i'')|=0$. Conséquemment, il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{i_0}|H_n(I_i)|<\varepsilon$.

En vertu de 1′) 2″) et 3″), il résulte $G_n(I)=F(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq R_0$.[6)]

Or, montrons que la fonction d'intervalle $F(I)$ possède la propriété 2) de la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$ pour la suite M_n $(n=1,2,\cdots)$. Pour tout indice n et tout $\varepsilon>0$, on prend le nombre $\varepsilon/18n$ comme $\delta(n,\varepsilon)$. Soit I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ un système élémentaire d'intervalles dans R_0, possédant les propriétés suivantes :

1*) $I_i\frown M_n \neq 0$ pour tout i,

2*) $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n)<\delta(n,\varepsilon)$,

3*) *norme* $(I_i)<1/n$ pour tout i.

6) Voir, S. Saks : Theory of the Integral (1937), p. 121.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \cap M_n} f(p)\,dp|\\
=&|\sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \cap M_n} f(p)\,dp|\\
=&|\sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \cap M_n} f(p)\,dp + \sum_{i=1}^{i_0} (\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I_i)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i \cap M_n} f(p)\,dp|\\
=&|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I_i)| \leq \sum_{i=1}^{i_0} (18n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \cap I_i|)\\
\leq& 18n \cdot \sum_{i=1}^{i_0} |I_i| < 18n \cdot \delta(n, \varepsilon) = 18n \cdot (\varepsilon/18n) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Mais il est remarquable que, pour une fonction d'intervalle $F(I)$ fini-additive définie dans un intervalle R_0 et telle que $F_s'(p)$ existe sauf pour un seul point p_0, la fonction

$$f(p) = \begin{cases} F_s'(p) & \text{pour tout } p \neq p_0\,, \\ 0 & \text{pour } p = p_0\,, \end{cases}$$

n'est pas toujours intégrable ($\mathfrak{D}$). En effet, nous pouvons le voir par un exemple très simple comme il suit:

Exemple. Lorsque $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie dans un intervalle $R_0 = [0, 1; 0, 1]$ de la manière que

$$F(I) = (L)\int_c^d ((L)\int_a^b \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\,dx)dy\,,$$

où $I = [a, b; c, d]$ contenu dans R_0, la fonction d'intervalle $F(I)$ n'est pas continue (α) au point $p_0 = (0, 0)$, quel que soit le nombre positif α.

Car, pour tout intervalle $I = [0, \beta; 0, \delta]$ contenu dans R_0, on a

$$\begin{aligned}
F(I) &= (L)\int_0^\delta ((L)\int_0^\beta \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\,dx)dy\\
&= (L)\int_0^\delta \frac{\beta}{\beta^2 + y}\,dy = \tan^{-1}\frac{y}{\beta}\Big]_0^\delta = \tan^{-1}\frac{\delta}{\beta}\,.
\end{aligned}$$

Fixons un nombre quelconque β. Alors, $F(I) = \tan^{-1}\dfrac{\delta}{\beta}$ tend vers $\pi/2$ lorsque δ tend vers 0. Donc, $F(I)$ n'est pas continue (α) au point p_0 pour tout $\alpha > 0$.

Par suite, pour la fonction d'intervalle $F(I)$, sa dérivée au sens strict n'existe pas en p_0.

En outre, la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_0. Puisque

$$(L)\int_0^1 ((L)\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\, dx) dy = \pi/4\,,$$
$$(L)\int_0^1 ((L)\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\, dy) dx = -\pi/4\,,$$

on peut le voir en vertu du Théorème 6.

D'ailleurs, si l'on ajoute la propriété d'être continue (α) pour une fonction d'intervalle, on a le

Théorèm 13. *Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle fini-additive définie dans un intervalle R_0, qui satisfait à la condition: $F_s'(p)$ existe pour tout point p de R_0 sauf tout au plus une infinité dénombrable N et à tout point p de N on peut faire correspondre un nomble positif $\alpha = \alpha(p)$ dont $F(I)$ est continue (α) au point p. Alors, la fonction*

$$f(p) = \begin{cases} F_s'(p) & si \quad p \overline{\in} N \text{ et } p \in R_0, \\ \text{un nombre arbitraire} & si \quad p \in N \end{cases}$$

est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_0.

Démonstration. Désignons par A_n l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait $|F(I)|/|I| < n$, quel que soit l'intervalle $I \leq R_0$ renfermant p et tel que *norme* $(I) < 4/n$. Désignons par $p_i (i = 1, 2, \cdots)$ l'ensemble N. On verra alors que si l'on pose $M_n = \bar{A}_n \cup N_n (n = 1, 2, \cdots)$, où $N_n = \{p_i\,;\, i \leq n,\ \alpha(p_i) \geq 1/n\}$, $M_n (n = 1, 2, \cdots)$ est une suite caractéristique pour l'intégration ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$ et fondamentale pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$. En notant que l'ensemble N_n est fini et que $F(I)$ est continue $(1/n)$ à tout point $p \in N_n$, on peut le démontrer de la même manière que la démonstration de Théorème 12.

Nous entendons par $p(I)$ le paramètre de régularité de l'intervalle I, c.-à-d. le nombre $|I|/|K|$, K étant le plus petit carré contenant I. Par $\bar{F}_\rho(p)$ et $\underline{F}_\rho(p)$ au point p d'une fonction d'intervalle $F(I)$, nous entendons respectivement la limite supérieure et inférieure de l'expression $F(I)/|I|$, où I désigne un intervalle arbitraire tel que $I \ni p$ et $p(I) \geq \rho$, lorsque l'aire $|I|$ tend vers 0. Dans le cas où $\lim\limits_{\rho \to 0} \bar{F}_\rho(p) = \lim\limits_{\rho \to 0} \underline{F}_\rho(p)$, ce nombre porte le nom dérivée ordinaire de la fonctian $F(I)$ au point p; on la désigne par $F'(p)$.

Théorème 14. *Lorsque $f(p)$ est une fonction integrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} et $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie par $F(I)=(\mathfrak{D})\int_I f(p)dp(I\leqq R_0)$, on a $F'(p)=f(p)$ presque partout dans R_0.*

Démonstration. Pour la simplicité, montrerons seulement le cas où $n_0=2$. Soit $F_n(n=1, 2, \cdots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(x, y)$. Considérons pour tout F_n la fonction d'intervalle:

$$G_n(I)=\begin{cases} F(I) & \text{si } (I)^\circ \frown F_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } (I)^\circ \frown F_n = 0. \end{cases}$$

Pour montrer le résultat voulu, nous allons voir d'abord que la fonction d'intervalle $G_n(I)$ est intégrable au sens de Burkill dans tout intervalle $I_0\leqq R_0$, plus précisément, si l'on désigne par $\int_{I_0}^* G_n(I)$ l'intégrale au sens de Burkill de $G_n(I)$ dans I_0, on a $\int_{I_0}^* G_n(I)=(L)\int_{I_0\frown F_n} f(x, y)d(x, y)$.

Comme cela est noté dans § 5, à tout F_n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre positif $\delta^*(n, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes:

1) $(I_i)^\circ \frown F \neq 0$ pour tout i.
2) $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - F_n) < \delta^*(n, \varepsilon)$,
3) *norme* $(I_i) < 1/n$ pour tout i

entraînent

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)\int_{I_i\frown F_n} f(x, y)d(x, y)\right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_i (i=1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Puisque, pour I_0 tel que $I_0-F_n\neq 0$, l'ensemble I_0-F_n est ouvert dans I_0, on peut choisir une suite des intervalles $R_j(J=1, 2, \cdots)$ qui n'empiètent pas les uns sur les autres, telle que $\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j=I_0-F_n$. On a un indice j_0 tel que $\mu_2((I_0-F_n)-\bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) < \delta^*(n, \varepsilon)$. Posons $\tau(\varepsilon)=1/2\cdot\min(1/n, \text{dist.}(F_n\frown I_0, \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j))>0$. Montrons que pour toute subdivision[7]

[7] Quand un système d'intervalles est composé d'intervalles contenus dans un intervalle I, contenant tous les points de I et n'empiétant pas les uns sur les autres, nous disons que le système est une subdivision de I.

$I_i(i=1, 2, \cdots, i_0)$ de I_0 dont la norme de I_i est inférieure à $\tau(\varepsilon)$ pour tout i, on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) - (L)\int_{I_0 \frown F_n} f(x, y)d(x, y)| < \varepsilon .$$

On a d'abord $I_i \leqq I_0 - \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ pour tout intervalle I_i tel que $(I_i)^\circ \frown F_n \neq 0$. Car, si (x, y) est un point d'un tel intervalle I_i, dist. $(F_n \frown I_0, (x, y)) \leqq$ dist. $(F_n \frown I_i, (x, y)) < 2 \cdot \textit{norme}\,(I_i) < 2\tau(\varepsilon)$. Il en résulte $(x, y) \bar{\in} \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. Par suite, on a $I_i \leqq I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. Conséquemment, si l'on pose $I_i'(i=1, 2, \cdots, i')$ tous les intervalles I_i tels que $(I_i)^\circ \frown F_n \neq 0$, on a $\bigcup_{i=1}^{i'} I_i' \leqq I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. On a de plus $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i'} I_i' - F_n) \leqq \mu_2((I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) - F_n) = \mu_2((I_0 - F_n) - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) < \delta^*(n, \varepsilon)$ et *norme* $(I_i') < \tau(\varepsilon) \leqq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Il s'ensuit que

$$|\sum_{i=1}^{i'} F(I_i') - \sum_{i=1}^{i'} (L)\int_{I_i' \frown F_n} f(x, y)d(x, y)| < \varepsilon .$$

En effet, on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G(I_i) - (L)\int_{I_0 \frown F_n} f(x, y)d(x, y| < \varepsilon .$$

Pour un intervalle I_0 tel que $I_0 \leqq F_n$, on a $F(I) = (L)\int_{I \frown F_n} f(x, y)d(x, y)$ pour tout intervalle $I \leqq I_0$. On a par suite pour toute subdivision $I_i(i=1, 2, \cdots, i_0)$ de I_0

$$\sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) = (L)\int_{I_0 \frown F_n} f(x, y)d(x, y) .$$

Conséqemment, la fonction d'intervalle $G_n(I)$ est intégrable au sens de Burkill dans tout intervalle $I_0 \leqq R_0$ et on a

$$\int_{I_0}^{*} G_n(I) = (L)\int_{I_0 \frown F_n} f(x, y)d(x, y) .$$

Posons maintenant $V_n(I) = (L)\int_{I \frown F_n} f(x, y)d(x, y)$ pour tout $I \leqq R_0$. On a alors $V_n'(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n, de sorte qu'on ait $G_n'(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n[8]. En notant la définition de $G_n(I)$, on voit facilement que si $G_n'(x, y)$ existe pour un point de densité (x, y) de F_n, on a $G_n'(x, y) = F'(x, y)$. Donc, il s'ensuit que $F'(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n. Puisque $F_n(n=1, 2, \cdots)$ est une suite dont le presque total est R_0, on a $F'(x, y) = f(x, y)$ presque portout dans R_0.

8) Voir, S. Kempisty: Fonctions d'intervalle non additives (1939), p. 21.

Théorème 15. *Pour une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{r_0}, s'il y a un nombre positif δ_n, dépendant seulement de l'indice n, de telle sorte qu'on puisse prendre $\delta_n \times \varepsilon$ comme $\delta(n, \varepsilon)$ qui est mentionné à 2) de la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, on a $F_s'(p) = f(p)$ presque partout dans R_0.*

Démonstration. Soit $F_n (n=1, 2, \cdots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Comme $\mu_{r_0}(R_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$, il s'agit d'établir que $F_s'(p) = f(p)$ presque partout dans tout F_n. Considérons un point p de densité de F_n auquel on a $V_s'(p) = f(p)$, $V(I)$ étant la fonction d'intervalle définie de la manière suivante

$$V(I) = (L)\int_{I \cap F_n} f(p)dp\,, \quad I \subseteq R_0\,.$$

Nous montrerons que, en tel point p, il se trouve $F_s'(p) = f(p)$. Puisque p est un point de densité de F_n, il y a pour $\varepsilon > 0$ quelconque un nombre $\kappa(\varepsilon) > 0$ tel qu'on ait

$$\mu_{r_0}(I - F_n) / |I| < (\varepsilon \times \delta_n)/2\,,$$

quel que soit l'intervalle I renfermant p et dont la norme est inférieure à $\kappa(\varepsilon)$. Posons $\eta(\varepsilon) = \min(1/n, \kappa(\varepsilon))$. Soit I un intervalle renfermant p et dont la norme est inférieure à $\eta(\varepsilon)$. Pour cela, on a $I \cap F_n \neq 0$, *norme* $(I) < 1/n$ et de plus, si l'on pose $\varepsilon' = 2\mu_{r_0}(I - F_n)/\delta_n$, on a $\mu_{r_0}(I - F_n) = (\delta_n \times \varepsilon')/2 < \delta_n \times \varepsilon'$. il en résulte $|F(I) - (L)\int_{I \cap F_n} f(p)dp| < \varepsilon'$. On a donc

$$\left| \frac{F(I)}{|I|} - \frac{V(I)}{|I|} \right| < \frac{\varepsilon'}{|I|} = \frac{2 \cdot \mu_{r_0}(I - F_n)}{|I| \times \delta_n} < \frac{\varepsilon \times \delta_n}{2} \times \frac{2}{\delta_n} = \varepsilon$$

Comme nous avons $V_s'(p) = f(p)$ au point p, il s'ensuit que $F_s'(p) = f(p)$ en ce point p.

Pour le cas où il y a pour le point p un intervalle I_0 renfermant p et contenu dans F_n, il vient $F(I) = V(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq I_0$. Donc, il résulte évidemment $F_s'(p) = V_s'(p) = f(p)$ en ce point p.

(Reçu le 29 Septembre, 1955)