Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XVII, Number 4, October 1976
NDJFAM

ALGÈBRE ET LOGIQUE TRIPOLAIRE

LÉON BIRNBAUM

1 *Sur la polarité et la valence des logiques à plusieurs valeurs* Une logique, dont les valeurs forment un groupe monogène cyclique d'ordre n, est une logique n-polaire.

Exemples: La logique chrysippienne est une logique bipolaire; la logique de Post est une logique tripolaire.

Je nommerai les n valeurs d'une logique n-polaire des pôles logiques. Les logiques polivalentes sont obtenues soit par l'interpolation d'un nombre fini ou infini de valeurs entre deux pôles logiques (les logiques de Łukasiewicz, les logiques modales, les logiques probabilistiques), soit par l'extrapolation d'une valeur ("l'absurde" dans la logique de Bochvar).

Soit $\{V_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les n valeurs d'une logique n-polaire, rangées en ordre arbitraire. Pour que $\{V_i\}$ soit un groupe cyclique monogène, il faut qu'il existe une fonction N de sorte que

$$V_2 = NV_1$$
$$V_3 = NV_2$$

et généralement

$$V_i = NV_{i-1}$$

et

$$V_1 = NV_n$$

Faisant quelques substitutions, on peut écrire encore

$$\begin{aligned}
V_3 &= NV_2 = N(NV_1) = NNV_1 = N^2V_1\\
V_4 &= N^3V_1\\
V_n &= N^{n-1}V_1\\
V_1 &= NV_n = N(N^{n-1}V_1) = N^nV_1
\end{aligned}$$

En général $V_i = N^nV_i$ ou $V_i = N^{kn}V_i$ (k nombre naturel). Dans un groupe cyclique la fonction y,

Received January 15, 1973

$$y = N^{tx} V_p \text{ (t nombre naturel, } t < n),$$

où V_p est un élément quelconque de l'ensemble $\{V_i\}$, prendra successivement toutes les valeurs V_i si x varie de 1 à n, et pour $x = n$ nous obtiendrons la valeur initiale. On peut en déduire qu'il faut que n soit un nombre prime.

2 *Algèbre "booleienne" tripolaire tri-bivalente* Une algèbre tripolaire est un ensemble $\mathfrak{M}$, dont les éléments peuvent prendre trois valeurs: 0, 1, 1-1, (1-1 $\neq$ 0. La choix de cette valeur sera justifié ultirieurment. Provisoirement nous utiliserons cette expression comme un symbole.) Si $A \in \mathfrak{M}$, alors $\mathcal{V}(A) \in S$, où $\mathcal{V}(A)$ représente la valeur de l'élément A et S représente l'ensemble $\{0, 1, 1\text{-}1\}$. Dans l'ensemble $\mathfrak{M}$ sont définies trois opérations binaires $\cap$, $\cup$, et $\times$ et une opération unaire cyclique $^{-}$.

Si

0.1 $\quad A \in \mathfrak{M}$ et $B \in \mathfrak{M}$

alors nous aurons

0.2 $\quad \overline{A} \in \mathfrak{M}$

0.3 $\quad \overline{\overline{A}} \in \mathfrak{M}$

0.4 $\quad A \cap B \in \mathfrak{M}$, excéptant le cas où $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(B) = 1\text{-}1$

0.5 $\quad A \cup B \in \mathfrak{M}$, excéptant le cas où $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(B) = 1$

0.6 $\quad A \times B \in \mathfrak{M}$, excéptant le cas où $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(B) = 0$

0.7 $\quad$ Si $\mathcal{V}(A) = 0$, alors $\mathcal{V}(\overline{A}) = 1$ et $\mathcal{V}(\overline{\overline{A}}) = 1\text{-}1$

Les éléments $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$ sont univoquement déterminés. Le sousensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans lequel les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$ peuvent prendre les valeurs 0 ou 1 on notera par α. Le sousensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans lequel les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$ peuvent prendre les valeurs 1 ou 1-1 on notera par β. Le sousensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans lequel les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$ peuvent prendre les valeurs 1-1 ou 0 on notera par γ. Je noterai l'égalité entre deux éléments par =; l'équivalence de deux rélations entre des éléments sera notée par $\underset{\mathrm{E}}{\equiv}$. Les relations d'égalité et d'équivalence sont refléxives, symétriques et transitives. L'expression "si A, alors B" sera notée par $A \to B$.

3 *Le système d'axiomes*

1.1	I	$A \in \alpha \,.\underset{\mathrm{E}}{\equiv}.\, \overline{A} \in \beta \,.\underset{\mathrm{E}}{\equiv}.\, \overline{\overline{A}} \in \gamma$	
1.2	II_1	$A = B \,.\!\to\!.\, A \cap C = B \cap C$	$A, B, C \in \mathfrak{M}$
1.3	II_2	$A = B \,.\!\to\!.\, A \cup C = B \cup C$	$A, B, C \in \mathfrak{M}$
1.4	II_3	$A = B \,.\!\to\!.\, A \times C = B \times C$	$A, B, C \in \mathfrak{M}$
1.5	II_4	$A = B \,.\!\to\!.\, \overline{A} = \overline{B}$	$A, B \in \mathfrak{M}$
1.6	III	$A \cap B. = .\overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}}. = .\overline{\overline{\overline{A} \times \overline{B}}}$	$A, B \in \mathfrak{M}$
1.7	IV	$\overline{\overline{\overline{A}}} = (\overline{\overline{\overline{A}}}) = (\overline{\overline{\overline{A}}}) = A$	$A \in \mathfrak{M}$
1.8	V	$(A \cap B) \cap C. = .\, A \cap (B \cap C). = .A \cap B \cap C$	$A, B, C \in \mathfrak{M}$
1.9	VI	$(A \cap \overline{A} \cap \overline{\overline{A}}) \cup B. = .B$	$A, B \in \mathfrak{M}$
1.10	VII	$A \cap B. = .B \cap A$	$A, B \in \mathfrak{M}$
1.11	VIII	$(A \cup B) \cap C. = .(A \cap C) \cup (B \cap C)$	$A, B \in \mathfrak{M}$ et $C \in \alpha$
1.12	IX	$A \cap A. = .A$	$A \in \alpha$

1.13 La substitution des variables dans une formule ne se faira que par les éléments de l'ensemble dans lequel la formule est définie.

4 *La déduction de quelques théorèmes* De l'axiome III, conformément à l'axiome II_4 nous obtenons $\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A} \times \overline{B}}}$. Conformément à l'axiome IV nous obtenons

2.1 $\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}}} = \overline{A} \times \overline{B}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

En substituant A par $\overline{\overline{A}}$ et B par $\overline{\overline{B}}$ nous aurons $\overline{\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cup \overline{\overline{\overline{\overline{B}}}}} = \overline{\overline{\overline{A}}} \times \overline{\overline{\overline{B}}}$. Mais $\overline{\overline{\overline{A}}} = A$, $\overline{\overline{\overline{B}}} = B$ (ax. IV); $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} = \overline{(\overline{\overline{\overline{A}}})} = \overline{A}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}} = \overline{(\overline{\overline{\overline{B}}})} = \overline{B}$. On obtiendra donc

2.2 $A \times B = \overline{\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

De la même manière on obtiendra

2.3 $A \cup B = \overline{\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}}$

2.3′ $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}}}} = \overline{A} \cap \overline{B}$

De l'axiome V on déduit

$$\begin{array}{rcll} (A \cap B) \cap C. & = & .A \cap (B \cap C) & \qquad A, B, C \in \mathfrak{M} \\ \overline{(A \cap B) \cap C.} & = & \overline{.A \cap (B \cap C)} & \qquad \text{Ax. } II_4 \\ \overline{A \cap B} \times \overline{C}. & = & .\overline{A} \times \overline{B \cap C} & \qquad (2.1) \end{array}$$

2.4 $(\overline{A} \times \overline{B}) \times \overline{C}. = .\overline{A} \times (\overline{B} \times \overline{C})$ $\qquad (2.1)$

En substituant A par $\overline{\overline{A}}$, B par $\overline{\overline{B}}$ et C par $\overline{\overline{C}}$, on obtiendra $(\overline{\overline{\overline{A}}} \times \overline{\overline{\overline{B}}}) \times \overline{\overline{\overline{C}}}. = .\overline{\overline{\overline{A}}} \times (\overline{\overline{\overline{B}}} \times \overline{\overline{\overline{C}}})$, c'est à dire

2.5 $(A \times B) \times C. = .A \times (B \times C)$ $\qquad A, B, C \in \mathfrak{M}$

Analoguement on obtient

2.6 $(A \cup B) \cup C. = .A \cup (B \cup C)$ $\qquad A, B, C \in \mathfrak{M}$
2.7 $(A \times B) \times C. =_{Df} .A \times B \times C$
2.8 $(A \cup B) \cup C. =_{Df} .A \cup B \cup C$

De l'axiome VII, conformément à l'axiome II_4 nous avons

2.9 $\overline{A \cap B.} = \overline{.B \cap A}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

c'est à dire, conformément à la formule 2.1

2.10 $\overline{A} \times \overline{B}. = .\overline{B} \times \overline{A}$

En substituant A par $\overline{\overline{A}}$ et B par $\overline{\overline{B}}$, nous obtenons $\overline{\overline{\overline{A}}} \times \overline{\overline{\overline{B}}}. = .\overline{\overline{\overline{B}}} \times \overline{\overline{\overline{A}}}$ ou

2.11 $A \times B. = .B \times A$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

Analoguement on obtient

2.12 $A \cup B. = .B \cup A$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

De l'axiome VI et de l'axiome II_4 nous obtenons

2.13 $\overline{(A \cap \overline{A} \cap \overline{\overline{A}}) \cup B} = \overline{B}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

Tenant compte de la formula 2.3′ nous aurons

2.14 $\overline{A \cap \overline{A} \cap \overline{\overline{A}}} \cap \overline{B}. = .\overline{B}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

2.15 $\overline{(A \cap \overline{A}) \cap \overline{\overline{A}}} \cap \overline{B}. = .\overline{B}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

Conformément à la formule 2.1 nous obtiendrons successivement:

$$(\overline{A \cap \overline{A}} \times \overline{\overline{\overline{A}}}) \cap \overline{B}. = .\overline{B}$$
$$((\overline{A} \times \overline{\overline{A}}) \times A) \cap \overline{B}. = .\overline{B}$$
$$(A \times (\overline{A} \times \overline{\overline{A}})) \cap \overline{B}. = .\overline{B}$$

2.16 $(A \times \overline{A} \times \overline{\overline{A}}) \cap \overline{B}. = .\overline{B}$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

En substituant B par $\overline{\overline{B}}$ nous obtiendrons

2.17 $(A \times \overline{A} \times \overline{\overline{A}}) \cap B. = .B$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

Analoguement on obtiendra

2.18 $(A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{A}}) \times B. = .B$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$

De l'axiome VIII et de l'axiome II_4 on déduit successivement:

$$\overline{(A \cup B) \cap C} = \overline{(A \cap C) \cup (B \cap C)} \qquad A, B \in \mathfrak{M} \text{ et } C \in \alpha$$
$$\overline{A \cup B} \times \overline{C}. = .\overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C} \qquad (2.1)$$
$$(\overline{A} \cap \overline{B}) \times \overline{C}. = .(\overline{A} \times \overline{C}) \cap (\overline{B} \times \overline{C}) \qquad A, B \in \mathfrak{M} \text{ et } C \in \alpha$$

En substituant A par $\overline{\overline{A}}$ et B par $\overline{\overline{B}}$ on obtient

$$(A \cap B) \times \overline{C}. = .(A \times \overline{C}) \cap (B \times \overline{C}) \qquad A, B \in \mathfrak{M} \text{ et } C \in \alpha$$

En substituant C par $\overline{\overline{D}}$ et, puisque $C \in \alpha$, conformément à la règle 1.13, on aura $\overline{\overline{D}} \in \alpha$. Conformément à l'axiome I:

$$\overline{\overline{D}} \in \alpha. \underset{E}{\equiv} .\overline{\overline{\overline{D}}} \in \beta$$

C'est à dire $D \in \beta$. On obtiendra $(A \cap B) \times \overline{\overline{\overline{D}}}. = .(A \times \overline{\overline{\overline{D}}}) \cap (B \times \overline{\overline{\overline{D}}})$ ou

2.19 $(A \cap B) \times D. = .(A \times D) \cap (B \times D)$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$ et $D \in \beta$

Analoguement on obtiendra

2.20 $(A \times B) \cup E. = .(A \cup E) \times (B \cup E)$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M}$ et $E \in \gamma$

En appliquant le même procédé à l'axiome IX, on obtiendra

2.21 $A \times A. = .A$ $\qquad A \in \beta$

2.22 $A \cup A. = .A$ $\qquad A \in \gamma$

5 *Les constantes de l'algèbre tripolaire* Nous définissons les éléments suivants:

3.1 $A \cap \overline{A} \cap \overline{\overline{A}}. =_{Df}. \Phi$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

3.2 $A \times \overline{A} \times \overline{\overline{A}}. =_{Df}. \Omega$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

3.3 $A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{A}}. =_{Df}. \pi$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

Conformément aux propositions 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, et 0.6 nous déduisons

$$\Phi \in \mathfrak{M}$$
$$\Omega \in \mathfrak{M}$$
$$\pi \in \mathfrak{M}$$

Faisant les substitutions 3.1, 3.2, et 3.3 dans l'axiome VI et dans les formules 2.17 et 2.18, nous obtenons

3.4 $\Phi \cup B. = .B \qquad B \in \mathfrak{M}$

3.5 $\Omega \cap B. = .B \qquad B \in \mathfrak{M}$

3.6 $\pi \times B. = .B \qquad B \in \mathfrak{M}$

De la déduction des formules 2.16 et 2.17 on peut déduire encore:

3.7 $\overline{\Phi} = \Omega$

3.8 $\overline{\Omega} = \pi$

3.9 $\overline{\pi} = \Phi$

En substituant en 3.4, 3.5, et 3.6 B par Φ, Ω, π nous obtenons:

3.10 $\Phi \cup \Phi. = .\Phi$

3.11 $\Phi \cup \Omega. = .\Omega$

3.12 $\Phi \cup \pi. = .\pi$

3.13 $\Omega \cap \Phi. = .\Phi$

3.14 $\Omega \cap \Omega. = .\Omega$

3.15 $\Omega \cap \pi. = .\pi$

3.16 $\pi \times \Phi. = .\Phi$

3.17 $\pi \times \Omega. = .\Omega$

3.18 $\pi \times \pi. = .\pi$

Puisque $\Phi \cup \Phi. = .\Phi$ (3.10), conformément à la relation 2.22 résulte

3.19 $\Phi \in \gamma$

Puisque $\Omega \cap \Omega. = .\Omega$ (3.14), conformément à l'axiome IX résulte

3.20 $\Omega \in \alpha$

Puisque $\pi \times \pi. = .\pi$ (3.18), conformément à la relation 2.21 résulte

3.21 $\pi \in \beta$

Puisque chacune des valeurs 0, 1, et 1-1 appartient à deux des sousensembles α, β, γ, et, en notant la valeur d'un élément A, $A \in \mathfrak{M}$, par $\mathcal{V}(A)$, nous convenons de noter

3.22 $\mathcal{V}(\Phi) = 0$

3.23 $\mathcal{V}(\Omega) = 1$

3.24 $\mathcal{V}(\pi) = 1\text{-}1$

En ce cas nous aurons:

3.25 $\Phi \in \alpha$

3.26 $\Omega \in \beta$

3.27 $\pi \in \gamma$

De l'axiome IX et des relations 2.21 et 2.22 nous déduisions

3.28 $\Phi \cap \Phi. = .\Phi$
3.29 $\Omega \times \Omega. = .\Omega$
3.30 $\pi \cup \pi. = .\pi$

Si dans les expressions $A \cap \overline{A} \cap \overline{\overline{A}}$, $A \times \overline{A} \times \overline{\overline{A}}$ et $A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{A}}$ on substitue A par $\overline{A}$ ou $\overline{\overline{A}}$ on obtient les mêmes expressions. On en déduit que Φ, Ω, et π sont des *constantes*, que je dénommerai *pôles* de l'algèbre tripolaire, pendant que je dénommerai les valeurs 0, 1, $1\text{-}\underline{1}$ *valeurs polaires*.

Puisque $\overline{\Phi} = \Omega$ (3.7) et par conséquent $\overline{\overline{\Phi}} = \pi$ on aura $\Omega \cap \pi = \overline{\Phi} \cap \overline{\overline{\Phi}}$. Compte tenant de 3.15 on obtient

3.31 $\pi = \overline{\Phi} \cap \overline{\overline{\Phi}}$

Conformément à l'axiome II_1 on aura $\Phi \cap \pi. = .\Phi \cap (\overline{\Phi} \cap \overline{\overline{\Phi}})$ ou $\Phi \cap \pi. = .\Phi \cap \overline{\Phi} \cap \overline{\overline{\Phi}}$, c'est à dire

3.32 $\pi \cap \Phi. = .\Phi$

En appliquant à la relation 3.32 successivement l'axiome II_4 et la formule 2.1, on obtient $\overline{\pi \cap \Phi}. = .\overline{\Phi}$, $\overline{\pi} \times \overline{\Phi}. = .\overline{\Phi}$ ou

3.33 $\Phi \times \Omega. = .\Omega$

Analoguement on déduit

3.34 $\pi \cup \Omega. = .\pi$

De (3.28) $\Phi \cap \Phi. = .\Phi$, (3.13) $\Phi \cap \Omega. = .\Phi$ et de (3.32) $\Phi \cap \pi. = .\Phi$ on déduit

3.35 $\Phi \cap A. = .\Phi$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

De (3.33) $\Omega \times \Phi. = .\Omega$, (3.29) $\Omega \times \Omega. = .\Omega$ et de (3.17) $\Omega \times \pi. = .\Omega$ on déduit

3.36 $\Omega \times A. = .\Omega$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

De (3.34) $\pi \cup \Omega. = .\pi$, (3.30) $\pi \cup \pi. = .\pi$ et de (3.12) $\pi \cup \Phi. = .\pi$ on déduit

3.37 $\pi \cup A. = .\pi$ $\qquad A \in \mathfrak{M}$

6 *L'anneau tripolaire* $\mathfrak{T}_3$ Les valeurs 0, 1, et 1-1, determinées dans le chapitre antérieur comme des valeurs polaires, sont des éléments d'un anneau tripolaire—l'anneau $\mathfrak{T}_3$. Un *ensemble tripolaire* est un ensemble qui peut être décomposé en 3 sousensembles disjoints, isomorphes deux par deux.

Un *anneau tripolaire* est un ensemble tripolaire doué de trois lois de composition notées par $\otimes$, $\divideontimes$, et $\oplus$, qui satisfait au suivant tableau d'axiomes:

4.1 $a \otimes b \in \mathfrak{T}_3$ $\qquad a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.2 $a \divideontimes b \in \mathfrak{T}_3$ $\qquad a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.3 $a \oplus b \in \mathfrak{T}_3$ $\qquad a, b \in \mathfrak{T}_3$

4.4 $a \otimes b$ *est univoquement déterminé* $\qquad a, b \in \mathfrak{T}_3$

4.5 $a \times b$ *est univoquement déterminé* $a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.6 $a \oplus b$ *est univoquement déterminé* $a, b \in \mathfrak{T}_3$

4.7 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ $a, b, c \in \mathfrak{T}_3$
4.8 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $a, b, c \in \mathfrak{T}_3$
4.9 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $a, b, c \in \mathfrak{T}_3$

4.10 $a \otimes b = b \otimes a$ $a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.11 $a \times b = b \times a$ $a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.12 $a \oplus b = b \oplus a$ $a, b \in \mathfrak{T}_3$

4.13 *Il existe un élément* $0 \in \mathfrak{T}_3$, *de sorte que*

$$a \oplus 0 = 0 \oplus a = a \qquad a \in \mathfrak{T}_3$$

4.14 *Il existe un élément* $1 \in \mathfrak{T}_3$, *de sorte que*

$$a \otimes 1 = 1 \otimes a = a \qquad a \in \mathfrak{T}_3$$

4.15 *Il existe un élément* $-1/1 \in \mathfrak{T}_3$, *de sorte que*

$$a \times (-1/1) = (-1/1) \times a = a \qquad a \in \mathfrak{T}_3$$

4.16 *À chaque élément* $a \in \mathfrak{T}_3$, *correspond un élément unique* $-a \in \mathfrak{T}_3$, *et un élément unique* $/a \in \mathfrak{T}_3$, *de sorte que*

$$a \oplus (-a) \oplus (/a) = 0 \qquad a \in \mathfrak{T}_3$$

4.17 $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ $a, b, c \in \mathfrak{T}_3$
4.18 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$ $a, b, c \in \mathfrak{T}_3$

L'anneau tripolaire $\mathfrak{T}_3$ a 3 éléments-unité d'ordre I: 1, -1, et /1; 3 éléments-unité d'ordre II: -1/1, /1+1, et 1-1; un élément-unité d'ordre III: 1-1/1 = 0.

La matrice de l'opérateur $\otimes$ est représentée dans le suivant carré latin:

4.19

$\otimes$	1	-1	/1
1	1	-1	/1
-1	-1	/1	1
/1	/1	1	-1

4.20 $a \times b =_{Df} -(a \otimes b)/(a \otimes b)$

Comme valeurs polaires de l'algèbre "booleienne" tripolaire on a établi 1 (unité d'ordre I), 1-1 (unité d'ordre II) et 0 (unité d'ordre III). (1-1/1 = 0).

À l'aide de l'anneau tripolaire $\mathfrak{T}_3$ on peut donner un algorythme de l'algèbre "booleienne" tripolaire $\mathfrak{M}$. Soit A un élément de l'ensemble $\mathfrak{M}$ et $\mathcal{V}$ une fonction, qui fait correspondre univoquement à chaque élément de l'ensemble $\mathfrak{M}$ un élément de l'anneau $\mathfrak{T}_3$,

Si

4.21 $\mathcal{V}(A) =_{Df} a$ $A \in \mathfrak{M}; a \in \mathfrak{T}_3$

alors

4.22 $\mathcal{V}(\overline{A}) =_{Df} 1\text{-}a$
4.23 $\mathcal{V}(\overline{\overline{A}}) =_{Df} 1\text{-}(1\text{-}a) = 1\text{-}1/a$
4.24 $\mathcal{V}(A \cap B) =_{Df} a \otimes b$, où $\mathcal{V}(A) = a$, $\mathcal{V}(B) = b$ $\qquad A, B \in \mathfrak{M};\ a, b \in \mathfrak{T}_3$
4.25 $A = B. \rightarrow .\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(B). \rightarrow .a = b$

(2.3)
$$A \cup B. = .\overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}}$$
$$\mathcal{V}(A \cup B) = \mathcal{V}(\overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}})$$
$$\mathcal{V}(A \cup B) = 1\text{-}1/\mathcal{V}(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$\mathcal{V}(A \cup B) = 1\text{-}1/(1\text{-}a) \otimes (1\text{-}b)$$
$$\mathcal{V}(A \cup B) = 1\text{-}1/(1\text{-}a\text{-}b/ab)$$

où ab est l'abréviation de $a \otimes b$

$$\mathcal{V}(A \cup B) = 1\text{-}1/1 \oplus a \oplus b\text{-}ab$$

Mais $1\text{-}1/1 = 0$ et $0 \oplus a = a$. On obtient

4.26 $\mathcal{V}(A \cup B) = a \oplus b\text{-}ab$

Analoguement on obtient

4.27 $\mathcal{V}(A \times B) = 1/1 \oplus a\text{-}a \oplus b\text{-}b/ab$

7 *La représentation des valeurs tripolaires*

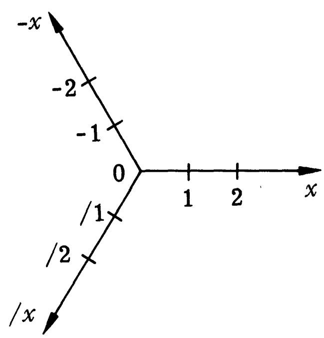

Fig. 1

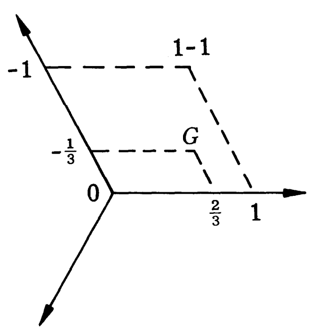

Fig. 2

La représentation des valeurs tripolaires dans un plan peut être faite à l'aide d'une étoile, ayant son centre en 0 et avec ses semiaxes décalés entre eux à 120° (Fig. 1). Sur les trois semiaxes nous figurons les valeurs x, $-x$, et $/x$, où x appartient aux nombres réels. Dans le plan de l'étoile à chaque valeur $a\text{-}b/c$ ($a, b, c \in \mathfrak{R}$) correspond un seul point. Chaque point du plan est donc déterminé par une seule coordonnée.

Nous figurerons sur cette étoile les points qui représentent les valeurs 0, 1, et 1-1 (Fig. 2). Le triangle aux sommets en 0, 1, 1-1 sera un triangle equilatéral.

Le point G, ayant la coordonnée $\frac{2}{3}\text{-}\frac{1}{3}$, est le centre de gravité du triangle, dont les sommets sont en 0, 1, 1-1. Si nous unissons G aux sommets du triangle, nous obtiendrons 3 domaines:

1) Le domaine $\sigma_\times$, représentant l'ensemble des points compris dans le triangle aux sommets en 0, 1, $\frac{2}{3}\text{-}\frac{1}{3}$.

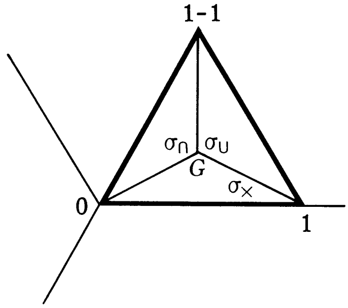

Fig. 3

2) Le domaine $\sigma_\cup$, représentant l'ensemble des points compris dans le triangle aux sommets en 1, 1-1, $\frac{2}{3}$-$\frac{1}{3}$.
3) Le domaine σ_n, représentant l'ensemble des points compris dans le triangle aux sommets en 1-1, 0, $\frac{2}{3}$-$\frac{1}{3}$ (Fig. 3).

Soit σ l'ensemble des points qu'appartienent au triangle aux sommets en 0, 1, 1-1 (Triangle polaire). À l'aide des formules 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, et 4.25 l'algèbre tripolaire "booleienne" peut devenir une algèbre tripolaire probabilistique. En ce cas σ, $\sigma_\times$, $\sigma_\cup$, et $\sigma_\cap$ représentent des champs de probabilités tripolaires.

L'algèbre tripolaire probabilistique est un ensemble $\mathfrak{M}_P$, dont les éléments peuvent prendre univoquement les valeurs comprises dans le champ de probabilités σ.

$$A \in \mathfrak{M}_P . \rightarrow . P(A) \in \sigma$$

où $P(A)$ représente la valeur probabilistique de l'élément A.

Si $A \in \mathfrak{M}_P$ et $B \in \mathfrak{M}_P$, alors

$\overline{A} \in \mathfrak{M}_P$,
$\overline{\overline{A}} \in \mathfrak{M}_P$,
$A \cap B \in \mathfrak{M}_P$, à l'exception des cas où $P(A)$ et $P(B)$ appartienent simultanément au domaine $\sigma_\cap$,
$A \cup B \in \mathfrak{M}_P$, à l'exception des cas où $P(A)$ et $P(B)$ appartienent simultanément au domaine $\sigma_\cup$,
$A \times B \in \mathfrak{M}_P$, à l'exception des cas où $P(A)$ et $P(B)$ appartienent simultanément au domaine $\sigma_\times$.

Si $P(A) \in \sigma_\times$, alors $P(\overline{A}) \in \sigma_\cup$ et $P(\overline{\overline{A}}) \in \sigma_\cap$.

Dans l'algèbre tripolaire probabilistique les axiomes II, III, IV, V, et VII de l'algèbre "booleienne" conservent leur valabilité.

8 *Sur quelques cas exceptés* Dans la section 2 de cet ouvrage aux formules 0.5, 0.6, et 0.4 j'ai indiqué que les opérations $\cap$, $\cup$, et $\times$ sont des lois de composition interne à un sens restrictif. Ces opérations ne se peuvent pas appliquer dans les cas dont l'exception a été indiquée. Nous nous proposons d'analyser les cas exceptés. Des propositions 0.4, 0.5, et résulte que $\pi \cap \pi$, $\Omega \cup \Omega$, et $\Phi \times \Phi$ n'appartienent pas à l'algèbre "booleienne" tripolaire. À l'aide des formules 3.22, 3.23, 3.24, 4.24, 4.26, et 4.27 on peut déduire:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(\Phi) = 0 \\
&\mathcal{V}(\underset{2}{\times}\Phi) = \mathcal{V}(\Phi \times \Phi) = 1/1 \\
&\mathcal{V}(\underset{3}{\times}\Phi) = \mathcal{V}(\Phi \times \Phi \times \Phi) = 2/1 \\
&\mathcal{V}(\underset{4}{\times}\Phi) = 2
\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}(\underset{5}{\times}\Phi) = 2\text{-}1$$
$$\mathcal{V}(\underset{6}{\times}\Phi) = 1\text{-}1 = \mathcal{V}(\pi)$$
$$\mathcal{V}(\underset{7}{\times}\Phi) = 0 = \mathcal{V}(\Phi)$$

etc.

$$\mathcal{V}(\Omega) = 1$$
$$\mathcal{V}(\underset{2}{\cup}\Omega) = \mathcal{V}(\Omega \cup \Omega) = 2\text{-}1$$
$$\mathcal{V}(\underset{3}{\cup}\Omega) = \mathcal{V}(\Omega \cup \Omega \cup \Omega) = 2\text{-}2$$
$$\mathcal{V}(\underset{4}{\cup}\Omega) = 1\text{-}2$$
$$\mathcal{V}(\underset{5}{\cup}\Omega) = \text{-}1$$
$$\mathcal{V}(\underset{6}{\cup}\Omega) = 0 = \mathcal{V}(\Phi)$$
$$\mathcal{V}(\underset{7}{\cup}\Omega) = 1 = \mathcal{V}(\Omega)$$

etc.

$$\mathcal{V}(\pi) = 1\text{-}1$$
$$\mathcal{V}(\underset{2}{\cap}\pi) = \mathcal{V}(\pi \cap \pi) = \text{-}1$$
$$\mathcal{V}(\underset{3}{\cap}\pi) = \mathcal{V}(\pi \cap \pi \cap \pi) = \text{-}1/1$$
$$\mathcal{V}(\underset{4}{\cap}\pi) = /1$$
$$\mathcal{V}(\underset{5}{\cap}\pi) = 1/1$$
$$\mathcal{V}(\underset{6}{\cap}\pi) = 1 = \mathcal{V}(\Omega)$$
$$\mathcal{V}(\underset{7}{\cap}\pi) = 1\text{-}1 = \mathcal{V}(\pi)$$

etc.

Les puissances par l'opération $\times$ pour Φ, par l'opération $\cup$ pour Ω et par l'opération $\cap$ pour π forment des groupes monogènes cycliques d'ordre 6, respectivement $\mathfrak{G}_\Phi$, $\mathfrak{G}_\Omega$, et $\mathfrak{G}_\pi$.

La représentation de ces groupes est la suivante:

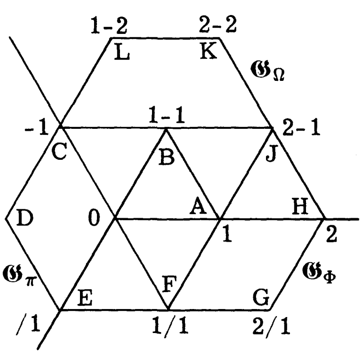

Fig. 4

$\mathfrak{G}_\Phi$ a comme élément neutre π. (OFGHJBO)
$\mathfrak{G}_\Omega$ a comme élément neutre Φ. (JKLCDAJ)
$\mathfrak{G}_\pi$ a comme élément neutre Ω. (ABCDEFA)

9 *La logique tripolaire tri-bivalente* Soit $\mathfrak{P}_3$ l'ensemble des propositions tripolaires. Une proposition est tripolaire si elle peut prendre 3 valeurs polaires. Soit 0, 1, et 1-1 ces valeurs—que je dénommerai *valeurs logiques* (*polaires*). Chaque proposition peut avoir une et seulement une valeur logique. J'exprimerai la valeur logique d'une proposition comme suit:

5.1 $\mathcal{V}(P) = p$ $\qquad P \in \mathfrak{P}_3;\ p \in \{0, 1, 1\text{-}1\}$

L'ensemble $\mathfrak{P}_3$ est un ensemble tripolaire. Nous déterminons les sous-ensembles α, β, γ de l'ensemble $\mathfrak{P}_3$ en les définissant comme suit:

5.2 $P \in \alpha. \rightarrow .\mathcal{V}(P) \in \{0, 1\}$

5.3 $P \in \beta. \rightarrow .\mathcal{V}(P) \in \{1, 1\text{-}1\}$

5.4 $P \in \gamma . \rightarrow . \mathcal{V}(P) \in \{1\text{-}1, 0\}$
5.5 $P \in \alpha . \rightarrow . P \in \mathfrak{P}_3$
5.6 $P \in \beta . \rightarrow . P \in \mathfrak{P}_3$
5.7 $P \in \gamma . \rightarrow . P \in \mathfrak{P}_3$

L'ensemble $\mathfrak{P}_3$ est doué de 3 opérations binaires ., v, et o et une opération unaire cyclique ~ de sorte que:

5.8	$P . Q \in \mathfrak{P}_3$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$, à l'exception du cas où $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(Q) = 0$
5.9	$P \vee Q \in \mathfrak{P}_3$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$, à l'exception du cas où $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(Q) = 1$
5.10	$P \circ Q \in \mathfrak{P}_3$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$, à l'exception du cas où $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(Q) = 1\text{-}1$
5.11	$\sim P \in \mathfrak{P}_3$	$P \in \mathfrak{P}_3$
5.12	$\sim\sim P \in \mathfrak{P}_3$	$P \in \mathfrak{P}_3$

L'ensemble $\mathfrak{P}_3$ satisfait au suivant système d'axiomes:

5.13	I	$P \in \alpha . \underset{E}{\equiv} . \sim P \in \beta . \underset{E}{\equiv} . \sim\sim P \in \gamma$	
5.14	II_1	$(P \underset{E}{\equiv} Q) \rightarrow (P . R \underset{E}{\equiv} Q . R)$	$P, Q, R \in \mathfrak{P}_3$
5.15	II_2	$(P \underset{E}{\equiv} Q) \rightarrow (P \vee R \underset{E}{\equiv} Q \vee R)$	$P, Q, R \in \mathfrak{P}_3$
5.16	II_3	$(P \underset{E}{\equiv} Q) \rightarrow (P \circ R \underset{E}{\equiv} Q \circ R)$	$P, Q, R \in \mathfrak{P}_3$
5.17	II_4	$(P \underset{E}{\equiv} Q) \rightarrow (\sim P \underset{E}{\equiv} \sim Q)$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$
5.18	III_1	$(P . Q) \underset{E}{\equiv} \sim(\sim\sim P \vee \sim\sim Q)$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$
5.19	III_2	$(P . Q) \underset{E}{\equiv} \sim\sim(\sim P \circ \sim Q)$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$
5.20	IV	$\sim\sim\sim P \underset{E}{\equiv} \sim(\sim\sim P) \underset{E}{\equiv} \sim\sim(\sim P) \underset{E}{\equiv} P$	$P \in \mathfrak{P}_3$
5.21	V	$(P . Q) . R \underset{E}{\equiv} P . (Q . R)$	$P, Q, R \in \mathfrak{P}_3$
5.22	VI	$(P . \sim P . \sim\sim P) \vee Q \underset{E}{\equiv} Q$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$
5.23	VII	$P . Q \underset{E}{\equiv} Q . P$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$
5.24	VIII	$(P \vee Q) . R \underset{E}{\equiv} (P . R) \vee (Q . R)$	$P, Q \in \mathfrak{P}_3$ et $R \in \alpha$
5.25	IX	$P . P \underset{E}{\equiv} P$	$P \in \alpha$

La règle de la substitution. La substitution des variables d'une formule ne se fait que par les éléments de l'ensemble pour lequel la formule est définie.

De ce qu'on a présenté ci-dessus résulte que l'ensemble $\mathfrak{P}_3$ a la structure d'une algèbre tripolaire tri-bivalente.

Soit $\mathcal{L}$ une application unijective de l'algèbre tripolaire $\mathfrak{M}$ sur l'ensemble $\mathfrak{P}_3$, c'est à dire si

5.26 $\mathcal{L}(A) = P$ $\qquad$ $A \in \mathfrak{M}$ et $P \in \mathfrak{P}_3$

nous aurons

5.27 $\mathcal{L}(\overline{A}) = \sim P$
5.28 $\mathcal{L}(\overline{\overline{A}}) = \sim\sim P$

Si $\mathcal{L}(A) = P$ et $\mathrm{L}(B) = Q$ $\qquad$ $A, B \in \mathfrak{M}$ et $P, Q \in \mathfrak{P}_3$

alors

5.29 $\mathcal{L}(A \cap B) = P . Q$
5.30 $\mathcal{L}(A \cup B) = P \vee Q$
5.31 $\mathcal{L}(A \times B) = P \circ Q$

Nous définissons les constantes de la logique tripolaire **F**, **W**, et **T** comme suit:

5.32 $\mathcal{L}(\Phi) = \mathsf{F}$ $\qquad\qquad$ $\mathsf{F} \in \mathfrak{P}_3$

5.33 $\mathcal{L}(\Omega) = \mathsf{W}$ $\qquad\qquad$ $\mathsf{W} \in \mathfrak{P}_3$

5.34 $\mathcal{L}(\pi) = \mathsf{T}$ $\qquad\qquad$ $\mathsf{T} \in \mathfrak{P}_3$

5.35 $\mathcal{L}(A) = P. \rightarrow .\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(P)$ $\qquad\qquad$ $A \in \mathfrak{M}$ et $P \in \mathfrak{P}_3$

De 5.27, 5.28, 3.22, 3.23, et 3.24 nous déduisons

5.36 $\mathcal{V}(\mathsf{F}) = 0$

5.37 $\mathcal{V}(\mathsf{W}) = 1$

5.38 $\mathcal{V}(\mathsf{T}) = 1\text{-}1$

De l'ensemble des constantes **F**, **W**, **T** nous séparons une, qui soit dorénavant la constante *règente*, de sorte que chaque formule déduite soit équivalente à cette constante.

Si **K** est la constante régente ($\mathsf{K} \in \{\mathsf{F}, \mathsf{W}, \mathsf{T}\}$) et $\varphi(P, Q, R) \in \mathfrak{P}_3$, alors

5.39 $\varphi(P, Q, R). =_{Df} .(\varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{K})$

pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables P, Q, et R dans l'ensemble des valeurs où elles sont définies. Nous séparons **W** comme constante régente. En ce cas toutes les formules déduites seront sousentendues comme équivalentes à **W**. C'est à dire

5.40 $\varphi(P, Q, R) =_{Df} (\varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W})$

où P, Q, R sont définis comme à 5.39. Exemple:

5.41 $(P . Q \underset{\mathsf{E}}{\equiv} Q . P). \underset{\mathsf{E}}{\equiv} .((P . Q \underset{\mathsf{E}}{\equiv} Q . P) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W})$ $\qquad\qquad$ $P, Q \in \mathfrak{P}_3$

De 3.7, 3.8, 3.9, 5.27, et 5.28 nous déduisons

5.42 $\sim \mathsf{F} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W}$

5.43 $\sim \mathsf{W} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{T}$

5.44 $\sim \mathsf{T} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{F}$

Nous pouvons déduire encore:

5.45 $\sim\sim \mathsf{F} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{T}$

5.46 $\sim\sim \mathsf{W} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{F}$

5.47 $\sim\sim \mathsf{T} \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W}$

De 5.40, 5.16, 5.17, 5.42, et 5.46 nous déduisons

5.48 $(\varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{F}). \underset{\mathsf{E}}{\equiv} .(\sim \varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W}). \underset{\mathsf{E}}{\equiv} .\sim \varphi(P, Q, R)$

5.49 $(\varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{T}). \underset{\mathsf{E}}{\equiv} .(\sim\sim\varphi(P, Q, R) \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \mathsf{W}). = .\sim\sim \varphi(P, Q, R)$

Conformément aux formules déduites dans les sections **4** et **5**, en utilisant l'application unijective $\mathcal{L}$ et en considérant $P, Q, R \in \mathfrak{P}_3$ nous obtiendrons:

6.1 $P \vee Q \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \sim(\sim\sim P \circ \sim\sim Q)$ $\qquad\qquad$ (2.3)

6.2 $P \vee Q \underset{\mathsf{E}}{\equiv} \sim\sim(\sim P . \sim Q)$ $\qquad\qquad$ (2.3)

6.3	$P \circ Q \underset{E}{\equiv} \sim(\sim\sim P . \sim\sim Q)$	(2.2)
6.4	$P \circ Q \underset{E}{\equiv} \sim\sim(\sim P \vee \sim Q)$	(2.2)
6.5	$(P \circ Q) \circ R \underset{E}{\equiv} P \circ (Q \circ R)$	(2.5)
6.6	$(P \vee Q) \vee R \underset{E}{\equiv} P \vee (Q \vee R)$	(2.6)
6.7	$(P . Q) . R =_{Df} P . Q . R$	(2.7)
6.8	$(P \circ Q) \circ R =_{Df} P \circ Q \circ R$	(2.8)
6.9	$(P \vee Q) \vee R =_{Df} P \vee Q \vee R$	(2.9)
6.10	$P \circ Q \underset{E}{\equiv} Q \circ P$	(2.11)
6.11	$P \vee Q \underset{E}{\equiv} Q \vee P$	(2.12)
6.12	$(P \circ \sim P \circ \sim\sim P) . Q \underset{E}{\equiv} Q$	(2.17)
6.13	$(P \vee \sim P \vee \sim\sim P) \circ Q \underset{E}{\equiv} Q$	(2.18)
6.14	$(P . Q) \circ D \underset{E}{\equiv} (P \circ D) . (Q \circ D)$	$D \in \beta$; (2.19)
6.15	$(P \circ Q) \vee G \underset{E}{\equiv} (P \vee G) \circ (Q \vee G)$	$G \in \gamma$; (2.20)
6.16	$D \circ D \underset{E}{\equiv} D$	$D \in \beta$; (2.21)
6.17	$G \vee G \underset{E}{\equiv} G$	$G \in \gamma$; (2.22)
6.18	$P . \sim P . \sim\sim P \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.1)

c'est à dire

6.19	$\sim(P . \sim P . \sim\sim P)$	Principe de la noncontradiction
6.20	$P \circ \sim P \circ \sim\sim P \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.2)

c'est à dire

6.21	$P \circ \sim P \circ \sim\sim P$	Principe du quart exclu
6.22	$P \vee \sim P \vee \sim\sim P \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.3)

c'est à dire

6.23	$\sim\sim(P \vee \sim P \vee \sim\sim P)$	Un tiers principe
6.24	$\mathbf{F} \vee P \underset{E}{\equiv} P$	(3.4)
6.25	$\mathbf{W} . P \underset{E}{\equiv} P$	(3.5)
6.26	$\mathbf{T} \circ P \underset{E}{\equiv} P$	(3.6)
6.27	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F} \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.10)
6.28	$\mathbf{F} \vee \mathbf{W} \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.11)
6.29	$\mathbf{F} \vee \mathbf{T} \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.12)
6.30	$\mathbf{W} . \mathbf{F} \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.13)
6.31	$\mathbf{W} . \mathbf{W} \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.14)
6.32	$\mathbf{W} . \mathbf{T} \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.15)
6.33	$\mathbf{T} \circ \mathbf{F} \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.16)
6.34	$\mathbf{T} \circ \mathbf{W} \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.17)
6.35	$\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.18)
6.36	$\mathbf{F} . \mathbf{F} \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.28)
6.37	$\mathbf{W} \circ \mathbf{W} \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.29)
6.38	$\mathbf{T} \vee \mathbf{T} \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.30)
6.39	$\mathbf{F} . \mathbf{T} \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.32)
6.40	$\mathbf{W} \circ \mathbf{F} \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.33)
6.41	$\mathbf{T} \vee \mathbf{W} \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.34)
6.42	$\mathbf{F} . P \underset{E}{\equiv} \mathbf{F}$	(3.35)
6.43	$\mathbf{W} \circ P \underset{E}{\equiv} \mathbf{W}$	(3.36)
6.44	$\mathbf{T} \vee P \underset{E}{\equiv} \mathbf{T}$	(3.37)

Le calcul logique tripolaire tri-bivalent peut être fait aussi algorythmiquement à l'aide de formules suivantes:

7.1 $\mathcal{V}(P) = p$ $\quad P \in \mathfrak{P}_3$ et $p \in \{0, 1, 1\text{-}1\}$

7.2 $\mathcal{V}(\sim P) = 1\text{-}p$ (4.22)

7.3 $\mathcal{V}(\sim\sim P) = 1\text{-}1/p$ (4.23)

Si $\mathcal{V}(P) = p$ et $\mathcal{V}(Q) = q$ $\quad P, Q \in \mathfrak{P}_3$ et $p, q \in \{0, 1, 1\text{-}1\}$

alors

7.4 $\mathcal{V}(P . Q) = pq$ (4.24)

7.5 $\mathcal{V}(P \vee Q) = p \oplus q\text{-}pq$ (4.25)

7.6 $\mathcal{V}(P \circ Q) = 1/1 \oplus p\text{-}p \oplus q\text{-}q/pq$ (4.26)

En ce cas chaque formule déduite doît avoir la valeur logique égale à 1, pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables de l'ensemble des valeurs pour lequel la formule a été définie.

Si la proposition P, $P \in \mathfrak{P}_3$, peut prendre une valeur logique quelconque, comprise dans le triangle polaire, alors la logique tripolaire tri-bivalente devient une logique tripolaire ∞-valente, c'est à dire qu'elle devient une *logique tripolaire probabilistique.*

École professionale
Dej, Cluj, Roumanie