INTEGRALDARSTELLUGEN FÜR GEWISSE ANALYTISCHE FUNKTIONEN NEBST DEN ANWENDUNGEN AUF KONFORME ABBILDUNG

Von Yûsaku Komatu

1. Einleitung.

In früheren Abhandlungen [1] und [2] sind einige Integraldarstellungen für gewisse in einem Kreis oder in einem konzentrischen Kreisring analytische Funktionen hergeleitet worden. Daran anschließend ist weiter gezeigt worden, daß sie sich darauf anwenden lassen, einen expliziten Ausdruck für diejenige Funktion zu gewinnen, die ein solches Grundgebiet auf das Innere eines Polygonalgebietes bzw. eines Polygonalringgebietes konform abbildet. Der Grundgedanke besteht jedenfalls darin, daß der Ausdruck $f''(z)/f'(z)$, worin $f(z)$ gewissen Regularitätsbedingungen genügt und die nullstellenfreie Ableitung besitzt, mittels eines Integrals vom Stieltjesschen Typus dargestellt wird. Der Umstand, daß es mindestens für die Anwendung auf die soeben hingewiesene Abbildung genügt, diesen besonderen Differentialausdruck zweiter Ordnung zu behandeln, beruht darauf, daß hierbei ein einfach oder zweifach zusammehängendes Grundgebiet ganz spezieller Gestalt in Betracht gezogen worden ist.

In der vorliegenden Abhandlung sollen die früher gewonnenen Darstellungsformeln derart verallgemeinert werden, daß die betreffende Funktion im Innern des Grundgebietes Pole besitzen kann und ferner ihre Ableitung dort verschwinden darf. Dementsprechend, angewandt auf eine Abbildung von einem Kreis oder Kreisring auf ein Gebiet, das durch ein Polygon oder zwei Polygone begrenzt wird und eventuell die Verzweigungsstellen enthält, wird ein expliziter Ausdruck für solche Abbildungsfunktion hergeleitet werden.[1]

2. Der Einheitskreis als Grundgebiet.

Zuerst werden die im Einheitskreis analytischen Funktionen mit gewissen Beschaffenheiten betrachtet, die im folgenden näher erklärt werden, um eine Darstellung der in Einleitung genannten Art herzuleiten. Im einfach zusammenhängenden Fall verläuft die Überlegung zwar auf eine elementare Weise. Aber sie wird zur Behandlung des zweifach zusammenhängenden Falls als

Eingegangen am 1. April, 1957.

1) Eine verwandte Überlegung findet sich auch in [4].

ein Vorbild dienen, da auch dieser sich im Prinzip ganz analog überführen läßt.

SATZ 1. *Es sei $f(z)$ eine in $|z|<1$ analytische Funktion, die sich bis auf die Pole $a_j (j=1,\cdots,P)$ mit der Ordnung κ_j dort regulär verhält und deren Ableitung abgesehen von den Nullstellen $b_k (k=1,\cdots,N)$ mit der Ordnung λ_k nicht verschwindet. Des weiteren verhalte sie sich im abgeschlossenen Kreis $|z|\leqq 1$ stückweise regulär. Dann gilt die Darstellung*

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\arg df(e^{i\varphi})$$
$$-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\Big(\frac{z}{z-a_j}-\frac{1}{1-\bar{a}_j z}\Big)+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\Big(\frac{z}{z-b_k}+\frac{1}{1-\bar{b}_k z}\Big).$$

Beweis. Auf Grund der Annahme, daß die Funktion $f(z)$ sich auch längs $|z|=1$ stückweise regulär verhält, sind sie selbst und also auch ihre Ableitung $f'(z)$ abgesehen von gewissen endlich vielen Randpunkten

$$z=e^{i\varphi_\mu} \qquad (\mu=1,\cdots,m)$$

überall längs $|z|=1$ regulär und sogar existieren an jeder dieser Stellen beide bestimmte Grenzwerte $\lim f'(e^{i\varphi})$ für $\varphi\to\varphi_\mu-0$ sowie $\varphi\to\varphi_\mu+0$. Die Sprunghöhe längs der Peripherie von $\arg f'(e^{i\varphi})$ an $e^{i\varphi_\mu}$ werde mit

$$(1-\alpha_\mu)\pi\equiv\arg\frac{f'(e^{i(\varphi_\mu+0)})}{f'(e^{i(\varphi_\mu-0)})}$$

bezeichnet. Nun werde eine Funktion betrachtet, die durch die Gleichung

$$\Phi(z)=z\frac{d}{dz}\lg\Big(f'(z)\prod_{j=1}^{P}(z-a_j)^{\kappa_j+1}\prod_{k=1}^{N}(z-b_k)^{-\lambda_k}\prod_{\mu=1}^{m}(z-e^{i\varphi_\mu})^{1-\alpha_\mu}\Big)$$
$$=z\frac{f''(z)}{f'(z)}+\sum_{j=1}^{P}\frac{(\kappa_j+1)z}{z-a_j}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k z}{z-b_k}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(1-\alpha_\mu)z}{z-e^{i\varphi_\mu}}$$

definiert wird. Sie verhält sich auf dem abgeschlossenen Kreis $|z|\leqq 1$ regulär und verschwindet an $z=0$. Wendet man demgemäß die Herglotzsche Darstellung auf diese Funktion an, so ergibt sich die Gleichung

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\rho(\varphi)-\sum_{j=1}^{P}\frac{(\kappa_j+1)z}{z-a_j}$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k z}{z-b_k}-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(1-\alpha_\mu)z}{z-e^{i\varphi_\mu}}.$$

Wegen der Regularität von $\Phi(z)$ auf $|z|\leqq 1$ erhält man hierbei

$$\rho(\varphi)=\int_0^{\varphi}\Re\Phi(e^{i\theta})\,d\theta$$
$$=\lim_{r\to1-0}\Re\Big\{\int_0^{\varphi}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\,d\theta+\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\int_0^{\varphi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-a_j}\,d\theta$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\int_0^{\varphi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-b_k}\,d\theta+\sum_{\mu=1}^{m}(1-\alpha_\mu)\int_0^{\varphi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-e^{i\varphi_\mu}}\,d\theta\Big\}$$

und also nach einer leichten Umformung

$$d\rho(\varphi)=d\arg f'(e^{i\varphi})+\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\,d\arg(e^{i\varphi}-a_j)-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\,d\arg(e^{i\varphi}-b_k)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{m}(1-\alpha_\mu)\,d\Big(\frac{\varphi}{2}-\pi\varepsilon_\mu(\varphi)\Big),$$

worin mit $\varepsilon_\mu(\varphi)$ diejenige Treppenfunktion bezeichnet ist, die gleich 0 oder 1 ist je nach $0<\varphi<\varphi_\mu$ oder $\varphi_\mu<\varphi\leqq 2\pi$. Beachtet man die ersichtlichen Beziehungen

$$\arg\frac{df(e^{i\varphi})}{d\varphi}=\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'(e^{i\varphi}),\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi=1 \qquad (|z|<1),$$

so ergibt sich die Gleichung

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\Big(\arg df(e^{i\varphi})+\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\arg(e^{i\varphi}-a_j)-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\arg(e^{i\varphi}-b_k)\Big)$$
$$-\sum_{j=1}^{P}\frac{(\kappa_j+1)z}{z-a_j}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k z}{z-b_k}.$$

Es bleibt also das Integral der Form

$$J(z;\,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\arg(e^{i\varphi}-t)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,\Re\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-t}\,d\varphi$$

für irgendeinen im Einheitskreis gelegenen Punkt t auszuwerten. Zum Zweck werde bemerkt, daß sich die Belegungsfunktion im letzten Poissonschen Integral in die Form

$$\Re\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-t}=\Re\frac{1}{1-\bar{t}e^{i\varphi}}$$

umschreiben läßt. Also stimmt der letzte Ausdruck für die Größe $J(z;\,t)$ gerade mit der Poissonschen Darstellung für die Funktion $1/(1-\bar{t}z)$ überein, die auf ganzem $|z|\leqq 1$ regulär analytisch ist. Folglich ergibt sich

$$J(z;\,t)=\frac{1}{1-\bar{t}z}.$$

Durch Verwendung dieser Identität erhält man sofort die gewünschte Darstellung.

SATZ 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz* 1 *gilt auch die Dar-*

stellung

$$f'(z) = C\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}((z-b_k)(1-\bar{b}_k z))^{\lambda_k}}{\prod\limits_{j=1}^{P}((z-a_j)(1-\bar{a}_j z))^{\kappa_j+1}}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{1}{e^{i\varphi}-z}\,d\arg df(e^{i\varphi})\right),$$

worin C eine Konstante ist.

Beweis. Es werde vorläufig angenommen, daß keine von a_j sowie b_k mit dem Ursprung übereinstimmt. Indem man dann die durch Einsetzen von $z=0$ aus der im Satz 1 gestellten Darstellung entstehende Relation von ihr selbst subtrahiert, läßt sie sich nach Abkürzung durch z in die Form

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\varphi}-z}\,d\arg df(e^{i\varphi})$$
$$-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\left(\frac{1}{z-a_j}-\frac{\bar{a}_j}{1-\bar{a}_j z}\right)+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{z-b_k}-\frac{\bar{b}_k}{1-\bar{b}_k z}\right)$$

bringen. Die letzte Gleichung gilt, wie man unmittelbar erkennt, auch dann, wenn irgendein von a_j oder b_k am Ursprung liegt. Integration über z zieht also nach sich die gewünschte Darstellung, worin C gerade die Integrationskonstante ist.

In den Sätzen 1 und 2 wird offenbar ersehen, daß das an b_k zugeordnete Parameter λ_k auf den Ausdruck $zf''(z)/f'(z)$ bzw. $f'(z)$ gerade so einwirkt wie das an a_j zugeordnete Parameter $-(\kappa_j+1)$.

3. Ein Kreisring als Grundgebiet.

Die im vorigen Paragraphen durchgeführte Überlegung läßt sich so modifizieren, um ein entsprechendes Resultat für die in einem Kreisring analytischen Funktionen herzuleiten.

SATZ 3. *Es sei $f(z)$ eine in $(0<)\ q<|z|<1$ analytische Funktion, die sich bis auf die Pole $a_j(j=1,\cdots,P)$ mit der Ordnung κ_j dort regulär varhält und deren Ableitung dort eindeutig ist und abgesehen von den Nullstellen b_k $(k=1,\cdots,N)$ mit der Ordnung λ_k nicht verschwindet. Des weiteren verhalte sie sich auf dem abgeschlossenen Kreisring $q\leqq|z|\leqq 1$ stückweise regulär. Dann gilt die Darstellung*

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}(\zeta(i\lg z+\varphi)\,d\arg df(e^{i\varphi})-\zeta_3(i\lg z+\varphi)\,d\arg df(qe^{i\varphi}))$$
$$-i\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\left(\zeta\left(i\lg\frac{z}{a_j}\right)+\zeta(i\lg(\bar{a}_j z))\right)$$
$$+i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\zeta\left(i\lg\frac{z}{b_k}\right)+\zeta(i\lg(\bar{b}_k z))\right)+ic^*,$$

wo c^* eine reelle Konstante bedeutet, die wirklich durch

$$c^* = \frac{\eta_1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(d \arg df(e^{i\varphi}) - d \arg df(qe^{i\varphi})) + 2\sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) \arg a_j - 2\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \arg b_k\right)$$

geliefert wird. Die Bezeichnungen aus der Weierstraßischen Theorie der elliptischen Funktionen[2] *beziehen sich auf die primitiven Perioden $2\omega_1 = 2\pi$ und $2\omega_3 = -2i \lg q$.*

Beweis. Der Beweis läßt sich grundsätzlich durch analoge Methode stattfinden wie beim Satz 1. Es werde nämlich angenommen, daß die Sprungstellen von $f'(z)$ längs des Randes an den Punkten

$$z = e^{i\varphi_\mu} \quad (\mu = 1, \cdots, m) \qquad \text{und} \qquad z = qe^{i\psi_\nu} \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

liegen und ferner die Sprunghöhen längs jeder der beiden Peripherien von $\arg f'(e^{i\varphi})$ an $e^{i\varphi_\mu}$ und von $\arg f'(qe^{i\varphi})$ an $qe^{i\psi_\nu}$

$$(1 - \alpha_\mu)\pi \equiv \arg \frac{f'(e^{i(\varphi_\mu+0)})}{f'(e^{i(\varphi_\mu-0)})} \quad \text{bzw.} \quad (1 - \beta_\nu)\pi \equiv \arg \frac{f'(qe^{i(\psi_\nu+0)})}{f'(qe^{i(\psi_\nu-0)})}$$

betragen. Nun werde die Funktion

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= z\frac{d}{dz} \lg \left(f'(z) \prod_{j=1}^{P} (z-a_j)^{\kappa_j+1} \prod_{k=1}^{N} (z-b_k)^{-\lambda_k} \prod_{\mu=1}^{m} (z-e^{i\varphi_\mu})^{1-\alpha_\mu} \Big/ \prod_{\nu=1}^{n} (z-qe^{i\psi_\nu})^{1-\beta_\nu} \right) \\
&= z\frac{f''(z)}{f'(z)} + \sum_{j=1}^{P} \frac{(\kappa_j + 1)z}{z - a_j} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k z}{z - b_k} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(1 - \alpha_\mu)z}{z - e^{i\varphi_\mu}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(1 - \beta_\nu)z}{z - qe^{i\psi_\nu}}
\end{aligned}$$

betrachtet, die sich auf dem abgeschlossenen Kreisring $q \leqq |z| \leqq 1$ überall regulär und dort eindeutig verhält. Wendet man demgemäß die Villat-Stieltjessche Darstellung auf diese Funktion an, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} &(\zeta(i \lg z + \varphi)\, d\rho(\varphi) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d\tau(\varphi)) \\
&- \sum_{j=1}^{P} \frac{(\kappa_j + 1)z}{z - a_j} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k z}{z - b_k} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(1 - \alpha_\mu)z}{z - e^{i\varphi_\mu}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(1 - \beta_\nu)z}{z - qe^{i\psi_\nu}} + ic_0,
\end{aligned}$$

worin c_0 eine reelle Konstante ist und $\rho(\varphi)$ und $\tau(\varphi)$ durch

$$\rho(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Re\Phi(e^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r\to 1-0} \int_0^{\varphi} \Re\Phi(re^{i\theta})\, d\theta$$

bzw.

$$\tau(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Re\Phi(qe^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r\to q+0} \int_0^{\varphi} \Re\Phi(re^{i\theta})\, d\theta$$

2) Hier als auch im folgenden.

definiert werden. Mithin erhält man

$$d\rho(\varphi) = d\arg f'(e^{i\varphi}) + \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1)\, d\arg(e^{i\varphi} - a_j) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\, d\arg(e^{i\varphi} - b_k)$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu)\, d\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\varepsilon_\mu(\varphi)\right) - \sum_{\nu=1}^{n} (1 - \beta_\nu)\, d\arg(e^{i\varphi} - qe^{i\psi_\nu}),$$

$$d\tau(\varphi) = d\arg f'(qe^{i\varphi}) + \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1)\, d\arg(qe^{i\varphi} - a_j) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\, d\arg(qe^{i\varphi} - b_k)$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu)\, d\arg(qe^{i\varphi} - e^{i\varphi_\mu}) - \sum_{\nu=1}^{n} (1 - \beta_\nu)\, d\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\delta_\nu(\varphi)\right);$$

hierbei sind mit $\varepsilon_\mu(\varphi)$ und $\delta_\nu(\varphi)$ diejenigen Treppenfunktionen bezeichnet, die gleich 0 oder 1 sind je nach $0 < \varphi < \varphi_\mu$ oder $\varphi_\mu < \varphi \leqq 2\pi$ bzw. $0 < \varphi < \psi_\nu$ oder $\psi_\nu < \varphi \leqq 2\pi$. Anderseits, da jede der Funktionen

$$u_\mu(z) = \frac{z}{z - e^{i\varphi_\mu}} \qquad \text{und} \qquad v_\nu(z) = \frac{z}{z - qe^{i\psi_\nu}} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, \cdots, m; \\ \nu = 1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

das Kreisinnere $|z| < 1$ bzw. das Kreisäußere $|z| > q$ auf die Halbebene $\Re u_\mu < 1/2$ bzw. $\Re v_\nu > 1/2$ abbildet, so läßt sich die Villat-Stieltjessche Darstellung ebenfalls auf diese Funktion anwenden. Es gelten also

$$\frac{z}{z - e^{i\varphi_\mu}}$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\zeta(i \lg z + \varphi)\, d\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\varepsilon_\mu(\varphi)\right) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d\arg(qe^{i\varphi} - e^{i\varphi_\mu}) \right)$$
$$+ ic_\mu^{(1)}$$

und

$$\frac{z}{z - qe^{i\psi_\nu}}$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\zeta(i \lg z + \varphi)\, d\arg(e^{i\varphi} - qe^{i\psi_\nu}) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\delta_\nu(\varphi)\right) \right)$$
$$+ ic_\nu^{(2)},$$

worin $c_\mu^{(1)}$ und $c_\nu^{(2)}$ gewisse reelle Konstanten bedeuten. Mit Berücksichtigung dieser Beziehungen sowie einer weiteren Identität d. h. der auf die besondere Funktion 1 angewandten Villat-Stieltjesschen Darstellung

$$1 = \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} (\zeta(i \lg z + \varphi) - \zeta_3(i \lg z + \varphi))\, d\varphi$$

erhält man

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \Bigg(\zeta(i \lg z + \varphi)\, d\Bigg(\arg df(e^{i\varphi}) + \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) \arg(e^{i\varphi} - a_j)$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \arg(e^{i\varphi} - b_k)\Big) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d\Big(\arg df(qe^{i\varphi})$$

$$+ \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) \arg(qe^{i\varphi} - a_j) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \arg(qe^{i\varphi} - b_k)\Big)\Big)$$

$$- \sum_{j=1}^{P} \frac{(\kappa_j + 1) z}{z - a_j} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k z}{z - b_k} + ic,$$

wo c wieder eine reelle Konstante bedeutet. Es genügt also zu zeigen, daß für irgendeinen im Kreisring gelegenen Parameterpunkt t die Gleichung

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} (\zeta(i \lg z + \varphi)\, d \arg(e^{i\varphi} - t) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d \arg(qe^{i\varphi} - t))$$

$$= \frac{z}{z - t} - i\zeta\left(i \lg \frac{z}{t}\right) - i\zeta(i \lg(\bar{t}z)) + ic_t$$

mit einer reellen Konstante c_t besteht. Dies geschieht ja wie folgt. Betrachtet man nämlich diejenige analytische Funktion $W(z) \equiv W(z;\, t)$, deren reeller Teil die Dirichletsche Randwertaufgabe mit der Randbedingung

$$\Re W(z) = \Re \frac{z}{z - t} \qquad \text{für } |z| = 1 \text{ und } |z| = q$$

auflöst, so läßt sie sich bekanntlich bis auf eine unwesentliche rein imaginäre additive Konstante durch die Formel

$$W(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} (\zeta(i \lg z + \varphi)\, \Re W(e^{i\varphi}) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, \Re W(qe^{i\varphi}))\, d\varphi$$

$$+ \frac{\eta_3}{\lg q} \lg z \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} (\Re W(e^{i\varphi}) - \Re W(qe^{i\varphi}))\, d\varphi$$

darstellen; das letzte Glied rechts rührt von der Mehrdeutigkeit von $W(z)$, genauer von $\Im W(z)$, her. Durch Einsetzen der vorgeschriebenen Randwerte wird sie in die Form

$$W(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} (\zeta(i \lg z + \varphi)\, d \arg(e^{i\varphi} - t) - \zeta_3(i \lg z + \varphi)\, d \arg(qe^{i\varphi} - t))$$

$$+ \frac{2\eta_3}{i \lg q} \lg z$$

umgeformt. Andererseits kann die Funktion $W(z)$ auch durch eine integralfreie Form

$$W(z) = \frac{z}{z - t} - i\zeta\left(i \lg \frac{z}{t}\right) - i\zeta(i \lg(\bar{t}z)) + \frac{2\eta_3}{i \lg q} \lg z + ic_t$$

ausgedrückt werden. In der Tat, verhält sich die rechte Seite der letzten Gleichung ersichtlich an $z = t$, also auf ganzem $q \leqq |z| \leqq 1$ überall regulär. Da beide Halbperioden ω_1 und ω_3 als reell bzw. rein imaginär angenommen werden, so ist η_3 rein imaginär und ferner gilt im allgemeinen die Identität $\zeta(\overline{Z}) = \overline{\zeta(Z)}$. Berücksichtigt man weiter die wohlbekannte Formel

$$\zeta(Z + i \lg q) = \zeta(Z - i \lg q) - 2\eta_3,$$

so kann man einsehen, daß die rechte Seite der letztgenannten Gleichung den reellen Teil besitzt, der längs beider Peripherien mit der Funktion $\Re(z/(z-t))$ ganz übereinstimmt. Durch Vergleich beider Darstellungen für dieselbe Funktion $W(z)$ ergibt sich also die behauptete Gleichung. Folglich, um den Beweis des Satzes zu vollenden, bleibt es nur die Bestimmung der reellen Konstante c^* durchzuführen, was aber im Beweis des nachfolgenden Satzes 4 ausführlich gestatten wird.

SATZ 4. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz* 3 *gilt auch die Darstellung*

$$f'(z) = Cz^{ic^*-1} \frac{\prod_{k=1}^{N} (\sigma(i \lg (z/b_k))\, \sigma(i \lg (\bar{b}_k z)))^{\lambda_k}}{\prod_{j=1}^{P} (\sigma(i \lg (z/a_j))\, \sigma(i \lg (\bar{a}_j z)))^{\kappa_j+1}}$$

$$\cdot \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\lg \sigma(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(e^{i\varphi}) + \lg \sigma_3(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(qe^{i\varphi})\Big)\right),$$

worin c^* die im Satz 3 *angegebene Konstante bedeutet und C eine Konstante ist.*

Beweis. Mittels der der Division durch z nachfolgenden Integration führt die im Satz 3 aufgestellte Formel sofort die behauptete Darstellung zur Folge. Es bleibt also nur die Konstante c^* zu bestimmen; vgl. die letzten Wörter in der Beweisführung des Satzes 3. Zum Zweck werde die aus der eben gestellten Formel folgende Beziehung

$$\begin{aligned}\lg (zf'(z)) = \lg C &+ ic^* \lg z \\ &- \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) \lg\Big(\sigma\Big(i \lg \frac{z}{a_j}\Big)\sigma(i \lg (\bar{a}_j z))\Big) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \lg\Big(\sigma\Big(i \lg \frac{z}{b_k}\Big)\sigma(i \lg (\bar{b}_k z))\Big) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\lg \sigma(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(e^{i\varphi}) \\ &\qquad + \lg \sigma_3(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(qe^{i\varphi})\Big)\end{aligned}$$

betrachtet. Wegen der Eindeutigkeit von $f'(z)$ muß bie linke Seite bei der Substitution $\lg z \,|\, \lg z + 2\pi i$ stets eine ganze Vielfache von $2\pi i$ vermehren, während die rechte Seite dabei wirklich um die Größe

$$\begin{aligned}&- 2\pi c^* - \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1)\Big(\pi i - 2\eta_1\Big(i \lg \frac{z}{a_j} - \pi\Big) + \pi i - 2\eta_1(i \lg (\bar{a}_j z) - \pi)\Big) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \Big(\pi i - 2\eta_1\Big(i \lg \frac{z}{b_k} - \pi\Big) + \pi i - 2\eta_1(i \lg (\bar{b}_k z) - \pi)\Big)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}((-\pi i+2\eta_1(i\lg z+\varphi-\pi))\,d\arg df(e^{i\varphi})$$
$$-2\eta_1(i\lg z+\varphi-\pi)\,d\arg df(qe^{i\varphi}))$$

vermehrt. Durch Nullsetzen des reellen Teils der letzten Größe ergibt sich daher die Beziehung

$$\begin{aligned}0=&-2\pi c^*+4\eta_1\Big(\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\arg a_j-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\arg b_k\Big)\\&+\frac{2\eta_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(d\arg df(e^{i\varphi})-d\arg df(qe^{i\varphi}))\\&+4\eta_1(\arg z+\pi)\Big\{-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\\&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(d\arg df(e^{i\varphi})-d\arg df(qe^{i\varphi}))\Big\}.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Beziehung von der Veränderliche z unabhängig sein muß, so wird geschlossen, daß der letzte Faktor unter den geschweiften Klammern verschwinden muß. Diese Tatsache läßt sich auch unmittelbar bestätigen. Nämlich ist der Wert des Integrals

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(d\arg df(e^{i\varphi})-d\arg df(qe^{i\varphi}))\\&\equiv\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\,d(re^{i\varphi})-\lim_{r\to q+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\,d(re^{i\varphi})\end{aligned}$$

gleich der Differenz zwischen den Summen der nach der Vielfachheiten aufgezählten Anzahlen der Nullstellen und der Pole von $f'(z)$ im Gebiet $q<|z|<1$, und folglich ergibt sich in der Tat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(d\arg df(e^{i\varphi})-d\arg df(qe^{i\varphi}))=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1).$$

Nachdem diese Gleichung einmal aufgestellt worden ist, kann man sofort einsehen, daß c^* tatsächlich den angegebenen Wert besitzt. Hiermit ist der Beweis der vorliegenden als auch vorigen Sätze im ganzen Umfang erbracht.

4. Grenzübergang.

Bei dieser Gelegenheit soll hier der Grenzübergang $q\to 0$ in den im letzten Paragraphen gewonnenen Darstellungen betrachtet werden. Es wird für plausibel halten, daß diese Darstellungen dabei auf die entsprechenden Resultate bezüglich des Einheitskreises hinauslaufen. Das ist tatsächlich der Fall. Im folgenden sollen die Sätze 2 und 4 betrachtet werden, um diese Tatsache wirklich zu bestätigen.

Zuerst beachte man, daß beim Grenzübergang $q\to 0$ die Grenzgleichungen

$$\eta_1\to\frac{\pi}{12},\qquad \sigma(u)\to 2e^{u^2/24}\sin\frac{u}{2},\qquad \sigma_3(u)\to e^{u^2/24}$$

gelten. Ferner strebt $d\arg df(qe^{i\varphi})$ dabei ersichtlich gegen $d\varphi$, wobei dem Umstand gemäß vorausgesetzt werden soll, daß der Grenzwert von $f'(qe^{i\varphi})$ endlich bleibt und sogar nicht verschwindet. Daher nähert sich der Logarithmus der rechten Seite in der im Satz 4 gestellten Darstellung von $f'(z)$ bis auf eine additive Konstante dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\lg z\Big(\frac{i}{12}\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\, d\arg df(e^{i\varphi}) - 2\pi + 2\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\arg a_j - 2\sum_{k=1}^{N}\lambda_k \arg b_k\Big) - 1\Big)\\
&-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\Big(\lg\frac{1-z/a_j}{\sqrt{z/a_j}} - \frac{1}{24}\lg^2\frac{z}{a_j} + \lg\frac{1-\bar{a}_j z}{\sqrt{\bar{a}_j z}} - \frac{1}{24}\lg^2(\bar{a}_j z)\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\Big(\lg\frac{1-z/b_k}{\sqrt{z/b_k}} - \frac{1}{24}\lg^2\frac{z}{b_k} + \lg\frac{1-\bar{b}_k z}{\sqrt{\bar{b}_k z}} - \frac{1}{24}\lg^2(\bar{b}_k z)\Big)\\
&+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{24}(\lg^2 z + 2i\varphi\lg z) + \lg\frac{\sqrt{z}}{e^{i\varphi}-z}\Big)d\arg df(e^{i\varphi})\\
&+\frac{1}{12}(-\lg^2 z + 2\pi i\lg z)
\end{aligned}$$

oder, nach Beseitigung einer gewissen additiven Konstante,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\lg((z-a_j)(1-\bar{a}_j z)) + \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\lg((z-b_k)(1-\bar{b}_k z))\\
&+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lg\frac{1}{e^{i\varphi}-z}\,d\arg df(e^{i\varphi})\\
&+\Big(\lg z + \frac{1}{12}\lg^2 z\Big)\Big\{\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1) - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\arg df(e^{i\varphi}) - 1\Big\}.
\end{aligned}$$

Da aber eine am Ende bei der Beweisführung des Satzes 4 bemerkte Gleichung ersichtlich eine weitere Grenzbeziehung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\arg df(e^{i\varphi}) - 1 = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k - \sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)$$

liefert, so ist die Größe unter den geschweiften Klammern gleich Null. Daher stimmt der eben gewonnene Grenzausdruck gerade mit der im Satz 2 aufgestellten Darstellung für $\lg f'(z)$ überein.

5. Abbildung auf einfach zusammenhängendes Polygonalgebiet.

In der konformen Abbildung von einem Kreis auf ein geradlinig begrenztes Polygonalgebiet spielt die sog. Schwarz–Christoffelsche Formel die Hauptrolle. Beim üblichen Fall, wo das Bildgebiet das Innere eines geradlinigen Polygons ist, ist es in einer früheren Note [1] gezeigt worden, daß die Formel sich aus einer speziellen Form der im Satz 1 angegebenen Darstellung sofort herleiten läßt, wobei $\{a_j\}$ und $\{b_k\}$ beide ganz fehlen. Hier soll aber die Formel in etwas verallgemeinerter Gestalt aufgestellt werden.

SATZ 5. *Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, endlich vielblättriges* *und geradlinig begrenztes Polygonalgebiet. Es sei $f(z)$ irgendeine analytische Funktion, die den Einheitskreis auf dieses Polygonalgebiet abbildet. Es werden die Eckpunkte dieses Gebietes mit $f(e^{i\varphi_\mu})$ $(\mu = 1, \cdots, m)$ und die inneren Winkel (in bezug auf das Bildgebiet selbst) an diesen Ecken mit $\alpha_\mu \pi$ bezeichnet. Ferner werden, wenn solche eventuell existieren, die Urbilde der unendlich fernen Punkte mit a_j $(j = 1, \cdots, P)$ und die der im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen mit b_k $(k = 1, \cdots, N)$ bezeichnet; die Verzweigungsordnung an $f(b_k)$ sei λ_k. Dann gilt die explizite Darstellung*

$$f(z) = C \int^z \frac{\prod_{k=1}^{N} ((z - b_k)(1 - \bar{b}_k z))^{\lambda_k}}{\prod_{j=1}^{P} ((z - a_j)(1 - \bar{a}_j z))^{\kappa_j + 1}} \prod_{\mu=1}^{m} (e^{i\varphi_\mu} - z)^{\alpha_\mu - 1} \, dz + C'$$

mit gewissen nur von der Größe und Lage des Bildpolygons abhängigen Konstanten C und C'. Hierbei bedeutet $\kappa_j - 1$ die Ordnung an der eventuellen Verzweigungsstelle $f(a_j)(= \infty)$; insbesondere ist κ_j natürlich gleich Eins zu setzen, wenn $f(a_j)(= \infty)$ keine Verzweigung aufweist. Es gilt eine Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu) - 2 + 2 \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) - 2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 0$$

und ferner bestehen zwischen den Parameterwerten die Monodromiebedingungen

$$\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa_p} \left(\frac{\prod_{k=1}^{N} ((z - b_k)(1 - \bar{b}_k z))^{\lambda_k}}{(1 - \bar{a}_p z)^{\kappa_p + 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{P} ((z - a_j)(1 - \bar{a}_j z))^{\kappa_j + 1}} \right) \prod_{\mu=1}^{m} (e^{i\varphi_\mu} - z)^{\alpha_\mu - 1} \right]_{z = a_p} = 0$$

$$(p = 1, \cdots, P).$$

Beweis. Für die Abbildungsfunktion $f(z)$ gilt die im Satz 2 angegebene Darstellung, worin verschiedene Parameter dieselben Sinne besitzen wie eben erwähnt. Wegen der stückweisen Geradlinigkeit des Randes verschwindet ferner $d \arg f(e^{i\varphi})$, als Funktion von φ, abgesehen von endlich vielen Stellen φ_μ $(\mu = 1, \cdots, m)$, wo $\arg df(e^{i\varphi})$ einen Sprung mit der Höhe $(1 - \alpha_\mu)\pi$ erleidet. Deshalb erhält man

$$\exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1}{e^{i\varphi} - z} \, d \arg df(e^{i\varphi})\right) = \prod_{\mu=1}^{m} (e^{i\varphi_\mu} - z)^{\alpha_\mu - 1},$$

woraus die behauptete Darstellung für $f(z)$ sofort folgt. Nun gilt ersichtlich (vgl. die am Ende von § 4 genannte Beziehung)

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d \arg df(e^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k - \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1) + 1.$$

Um schließlich die letztgenannten Monodromiebedingungen zu bestätigen, bemerke man, daß die im Einheitskreis meromorphe Funktion $f(z)$ selbstverständlich dort eindeutig ist. Deshalb muß das Residuum des Integranden von der Darstellung für $f(z)$ an jedem a_p $(p = 1, \cdots, P)$ verschwinden. Die betrachteten Bedingungen stellen gerade diese Tatsache dar.

Im besonderen Fall, wo die Mengen $\{a_j\}$ und $\{b_k\}$ beide fehlen, reduziert sich die Darstellung gerade auf die gewöhnliche Schwarz-Christoffelsche Formel, welche sich auf die Abbildung auf das schlichte Innere eines Polygons bezieht. Der folgende wohlbekannte Satz, worin statt des Inneren das Äußere eines Polygons in Betracht gezogen wird, gehört derselben Kategorie.

SATZ 6. *Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion, die den Einheitskreis auf das schlichte (oder, noch allgemeiner, keine Verzweigungsstelle enthaltende) Äußere eines geradlinigen Polygons abbildet. Es werden die Eckpunkte des Polygons mit $f(e^{i\varphi_\mu})$ $(\mu = 1, \cdots, m)$ und die inneren Winkel (in bezug auf das Bildgebiet) an diesen Punkten mit $\alpha_\mu\pi$ bezeichnet.*[3] *Ferner sei z_∞ das Urbild des unendlich fernen Punktes; nämlich sei $f(z_\infty) = \infty$. Dann gilt die Formel*

$$f(z) = C\int^z \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (e^{i\varphi_\mu} - z)^{\alpha_\mu - 1}}{(z - z_\infty)^2(1 - \bar{z}_\infty z)^2}\, dz + C'$$

mit gewissen Konstanten C und C', worin es gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu - 1) = 2.$$

Ferner besteht die Monodromiebedingung

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{e^{i\varphi_\mu} - z_\infty} = \frac{2\bar{z}_\infty}{1 - |z_\infty|^2}.$$

Beweis. Unmittelbar aus dem allgemeinen Satz 5. Die vorletzte Beziehung ist ersichtlich von elementargeometrischer Natur.

Als eine Ergänzung zum Satz 6 ist noch zu bemerken, daß *jede Funktion $f(z)$ von der in diesem Satz ausgesprochenen Gestalt mit $|z_\infty| < 1$ umgekehrt die Abbildung des Einheitskreises auf das Äußere eines geradlinigen Polygons in der dort erwähnten Weise vermittelt, sofern die genannte Monodromiebedingung erfüllt wird.* Diese Tatsache ergibt sich daraus, daß derartige Funktion $f(z)$ im Einheitskreis bis auf einen einzigen Pol erster Ordnung an z_∞ überall regulär ist und das Differential $d \arg df(z)$ sich auf dem Rand stückweise konstant verhält.

---

3) Die inneren Winkel in bezug auf das als eine Kurve angesehene Polygon sind also gleich $(2-\alpha_\mu)\pi$.

6. Abbildung auf Polygonalringgebiet.

In einer früheren Note [2] ist das Analogon der Schwarz-Christoffelschen Formel für diejenige Funktion hergeleitet worden, die einen konzentrischen Kreisring auf ein durch zwei geradlinige Polygone begrenztes, den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthaltendes Ringgebiet schlicht abbildet. Mit Hilfe des Satzes 4 läßt sich die ähnliche Verallgemeinerung dieser Formel feststellen, wie im Satz 5 für den einfach zusammenhängenden Fall.

SATZ 7. *Gegeben sei ein zweifach zusammenhängendes, endlich vielblättriges und geradlinig begrenztes Polygonalringgebiet. Es sei* $f(z)$ *irgendeine eindeutige analytische Funktion, die den Kreisring* $(0<)\,q<|z|<1$ *auf dieses Polygonalringgebiet abbildet. Es werden die Eckpunkte dieses Gebietes mit* $f(e^{i\varphi_\mu})$ $(\mu=1,\cdots,m)$ *sowie* $f(qe^{i\psi_\nu})$ $(\nu=1,\cdots,n)$ *und die inneren Winkel (in bezug auf das Bildgebiet selbst) an diesen Ecken mit* $\gamma_\mu\pi$ *bzw.* $\delta_\nu\pi$ *bezeichnet. Ferner werden, wenn solche eventuell existieren, die Urbilde der unendlich fernen Punkte mit* $a_j\,(j=1,\cdots,P)$ *und die der im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen mit* $b_k\,(k=1,\cdots,N)$ *bezeichnet; die Verzweigungsordnung an* $f(b_k)$ *sei* λ_k. *Dann gilt die explizite Darstellung*

$$f(z)=C\int^{z} z^{ic^*-1}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(\sigma(i\lg(z/b_k))\,\sigma(i\lg(\bar b_k z))\right)^{\lambda_k}}{\prod\limits_{j=1}^{P}\left(\sigma(i\lg(z/a_j))\,\sigma(i\lg(\bar a_j z))\right)^{\kappa_j+1}}$$

$$\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\sigma(i\lg z+\varphi_\mu)^{\gamma_\mu-1}\prod_{\nu=1}^{n}\sigma_3(i\lg z+\psi_\nu)^{\delta_\nu-1}\,dz+C'$$

mit gewissen nur von der Größe und Lage des Bildgebietes abhängigen Konstanten C *und* C'. *Hierbei bedeutet* κ_j-1 *die Ordnung an der eventuellen Verzweigungsstelle* $f(a_j)(=\infty)$; *insbesondere ist* κ_j *natürlich gleich Eins zu setzen, wenn* $f(a_j)(=\infty)$ *keine Verzweigung aufweist. Ferner bedeutet* c^* *eine reelle Konstante, die wirklich durch*

$$c^*=\frac{\eta_1}{\pi}\Big(\sum_{\mu=1}^{m}(1-\gamma_\mu)\varphi_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}(1-\delta_\nu)\psi_\nu+2\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)\arg a_j-2\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\arg b_k\Big)$$

geliefert wird, wobei noch eine weitere Beziehung gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{m}(1-\gamma_\mu)+\sum_{\nu=1}^{n}(1-\delta_\nu)+2\sum_{j=1}^{P}(\kappa_j+1)-2\sum_{k=1}^{N}\lambda_k=0.$$

Schließlich besteht nebst den Monodromiebedingungen

$$\Big[\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\kappa_p}\Big(z^{ic^*-1}\Big(\frac{z-a_p}{\sigma(i\lg(z/a_p))\,\sigma(i\lg(\bar a_p z))}\Big)^{\kappa_p+1}$$

$$\cdot \frac{\prod_{k=1}^{N} (\sigma(i \lg (z/b_k))\, \sigma(i \lg (\bar{b}_k z)))^{\lambda_k}}{\prod_{\substack{j=1\\ j \neq p}}^{P} (\sigma(i \lg (z/a_j))\, \sigma(i \lg (\bar{a}_j z)))^{\kappa_j+1}}$$

$$\left.\cdot \prod_{\mu=1}^{m} \sigma(i \lg z + \varphi_\mu)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma_3(i \lg z + \psi_\nu)^{\delta_\nu - 1}\Big)\right]^{z=a_p} = 0$$

$$(p = 1, \cdots, P)$$

noch eine Monodromiebedingung

$$\int_0^{2\pi} e^{-c^*\varphi} \frac{\prod_{k=1}^{N} |\sigma(\varphi + i \lg b_k)|^{2\lambda_k}}{\prod_{j=1}^{P} |\sigma(\varphi + i \lg a_j)|^{2(\kappa_j+1)}} \prod_{\mu=1}^{m} \sigma(\varphi_\mu - \varphi)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma_3(\psi_\nu - \varphi)^{\delta_\nu - 1}\, d\varphi = 0$$

oder, damit äquivalent,

$$\int_0^{2\pi} e^{-c^*\varphi} \frac{\prod_{k=1}^{N} |\sigma_3(\varphi + i \lg b_k)|^{2\lambda_k}}{\prod_{j=1}^{P} |\sigma_3(\varphi + i \lg a_j)|^{2(\kappa_j+1)}} \prod_{\mu=1}^{m} \sigma_3(\varphi_\mu - \varphi)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma(\psi_\nu - \varphi)^{\delta_\nu - 1}\, d\varphi = 0.$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes 4 gestattet es ganz ähnlich zu schreiten wie beim Beweis des Satzes 5. Zuerst genügt es nämlich zu beachten, daß $d \arg df(e^{i\varphi})$ und $d \arg df(qe^{i\varphi})$, als Funktionen von φ, abgesehen von endlich vielen Stellen $\varphi_\mu\ (\mu = 1, \cdots, m)$ bzw. $\psi_\nu\ (\nu = 1, \cdots, n)$ verschwinden, wo $\arg df(e^{i\varphi})$ und $\arg df(qe^{i\varphi})$ Sprünge mit den Höhen $(1 - \gamma_\mu)\pi$ bzw. $(\delta_\nu - 1)\pi$ erleiden. Man erhält also

$$\exp\Big(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-\lg \sigma(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(e^{i\varphi})$$

$$+ \lg \sigma_3(i \lg z + \varphi)\, d \arg df(qe^{i\varphi}))\Big)$$

$$= \prod_{\mu=1}^{m} \sigma(i \lg z + \varphi_\mu)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma_3(i \lg z + \psi_\nu)^{\delta_\nu - 1},$$

woraus die Darstellung für $f(z)$ sofort folgt. Der Ausdruck für c^* ergibt sich auch ganz ähnlich aus dem im Satz 4 angegebenen allgemeinen Ausdruck. Die demnächst genannte Beziehung folgt, indem man beide Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d \arg df(e^{i\varphi}) - d \arg df(qe^{i\varphi})) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k - \sum_{j=1}^{P} (\kappa_j + 1)$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d \arg df(e^{i\varphi}) - d \arg df(qe^{i\varphi})) = \frac{1}{2} \Big(\sum_{\mu=1}^{m} (1 - \gamma_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n} (1 - \delta_\nu)\Big)$$

miteinander vergleicht. Um schließlich die Monodromiebedingungen zu bestätigen, bemerke man, daß die Funktion $f(z)$ als eindeutig angenommen wird. Die ersten P Bedingungen stellen die Tatsache dar, daß das Residuum des Integranden von der Darstellung für $f(z)$ an jedem $a_p (p = 1, \cdots, P)$ verschwinden muß. Andererseits, auf dem zweifachen Zusammenhang des Grundgebietes beruhend, bleibt noch eine weitere Möglichkeit, daß die Vieldeutigkeit von $f(z)$ als ein Periodizitätsmodul auftreten kann. Die letzte Bedingung behauptet gerade, daß es nicht der Fall ist. Wegen der Eindeutigkeit muß die Funktion $f(z)$ nämlich beim vollständigen Umlauf von z längs jeder Kreisperipherie um den Ursprung invariant bleiben, woraus die Beziehung

$$\int_{|z|=r} z^{ic^*-1} \frac{\prod_{k=1}^{N} (\sigma(i \lg (z/b_k))\, \sigma(i \lg(\bar{b}_k z))^{\lambda_k})}{\prod_{j=1}^{P} (\sigma(i \lg (z/a_j))\, \sigma(i \lg (\bar{a}_j z)))^{\kappa_j+1}}$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{m} \sigma(i \lg z + \varphi_\mu)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma_3(i \lg z + \psi_\nu)^{\delta_\nu - 1}\, dz = 0$$

folgt. Hierbei bedeutet r irgendeinen positiven mit keinem $|a_j|$ übereinstimmenden Wert, der zuerst der Bedingung $q < r < 1$ genügen soll, jedoch gegen 1 oder q angenähert werden kann. Setzt man zunächst $z = e^{i\varphi}$ ein, so ergibt sich durch Beseitigung eines unwesentlichen konstanten Faktors sofort die erste Form der letzten Monodromiebedingung. Die zweite Form läßt sich durch Einsetzen von $z = qe^{i\varphi}$ erhalten, indem man dabei die bekannten Transformationsformeln zwischen den Sigmafunktionen sowie die oben gestellten Beziehung in Betracht zieht.

Es gibt einen einzigen Periodizitätsmodul, sofern die ersten Monodromiebedingungen erfüllt sind. Mithin müssen beide Formen der letzten Bedingung natürlich miteinander äquivalent sein. Aber diese Äquivalenz kann auch rechnerisch bestätigt werden. Nämlich betrachte man die Substitution $z | q/z$. Die zu $f(z)$ gehörigen Parameter $\{a_j\}$, $\{b_k\}$, $\{\varphi_\mu, \gamma_\mu\}$, $\{\psi_\nu, \delta_\nu\}$ bzw. c^* werden dann durch die zu $f(q/z)$ gehörigen Parameter $\{q/a_j\}$, $\{q/b_k\}$, $\{-\psi_\nu, \delta_\nu\}$, $\{-\varphi_\mu, \gamma_\mu\}$ bzw. $-c^*$ ersetzt. Die erste Form der Bedingung, angewandt auf $f(q/z)$ statt $f(z)$, liefert somit

$$\int_0^{2\pi} e^{c^*\varphi} \frac{\prod_{k=1}^{N} |\sigma(\varphi + i \lg (q/b_k))|^{2\lambda_k}}{\prod_{j=1}^{P} |\sigma(\varphi + i \lg (q/a_j))|^{2(\kappa_j+1)}}$$

$$\cdot \prod_{\nu=1}^{n} \sigma(-\psi_\nu - \varphi)^{\delta_\nu - 1} \prod_{\mu=1}^{m} \sigma_3(-\varphi_\mu - \varphi)^{\gamma_\mu - 1}\, d\varphi = 0,$$

woraus die zweite Form folgt, indem man die Transformationsformel von σ– zu σ_3–Funktion benutzt, sodann bedenkt, daß η_3 rein imaginär ist, und schließlich die Integrationsveränderliche φ durch $-\varphi$ ersetzt.

Im besonderen Fall, wo die Mengen $\{a_j\}$ sowie $\{b_k\}$ beide leer sind, reduziert sich die eben erwähnte Darstellung auf die früher in [2] gestellte Formel, welche sich auf die Abbildung auf das schichte Innere eines beschränkten Polygonalringgebietes bezieht. Aber hierbei wird diese Formel überdies durch die einzige Monodromiebedingung ersetzt. Andererseits lautet nun das dem Satz 5 entsprechende Resultat wie folgt.

SATZ 8. *Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion, die den Kreisring $(0<)\, q<|z|<1$ auf ein den unendlich fernen Punkt enthaltendes, schlichtes (oder, noch allgemeiner, keine Verzweigungsstelle enthaltendes) und geradlinig begrenztes Polygonalringgebiet abbildet. Es werden die Eckpunkte der Randpolygone mit $f(e^{i\varphi_\mu})$ $(\mu=1,\cdots,m)$ sowie $f(qe^{i\psi_\nu})$ $(\nu=1,\cdots,n)$ und die inneren Winkel (in bezug auf das Bildgebiet) an diesen Punkten mit $\gamma_\mu\pi$ bzw. $\delta_\nu\pi$ bezeichnet.*[4] *Ferner sei z_∞ das Urbild des unendlich fernen Punktes; nämlich sei $f(z_\infty)=\infty$. Dann gilt die Formel*

$$f(z)=C\int^{z} z^{ic^*-1}\frac{\prod_{\mu=1}^{m}\sigma(i\lg z+\varphi_\mu)^{\gamma_\mu-1}\prod_{\nu=1}^{n}\sigma_3(i\lg z+\psi_\nu)^{\delta_\nu-1}}{\sigma(i\lg(z/z_\infty))^2\,\sigma(i\lg(\bar{z}_\infty z))^2}\,dz+C'$$

mit gewissen Konstanten C und C', worin c^* eine reelle Konstante bedeutet, die durch

$$c^*=\frac{\eta_1}{\pi}\Big(\prod_{\mu=1}^{m}(1-\gamma_\mu)\varphi_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}(1-\delta_\nu)\psi_\nu+4\arg z_\infty\Big)$$

geliefert wird. Es gelten ferner die Beziehungen

$$\sum_{\mu=1}^{m}(\gamma_\mu-1)=\sum_{\nu=1}^{n}(\delta_\nu-1)=2$$

sowie die Monodromiebedingungen

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{m}(\gamma_\mu-1)\Big(\zeta(i\lg z_\infty+\varphi_\mu)-\frac{\eta_1}{\pi}\varphi_\mu\Big)\\&+\sum_{\nu=1}^{n}(\delta_\nu-1)\Big(\zeta_3(i\lg z_\infty+\psi_\nu)-\frac{\eta_1}{\pi}\psi_\nu\Big)\\&-2\Big(\zeta(2i\lg|z_\infty|)-\frac{2\eta_1}{\pi}\arg z_\infty\Big)=0\end{aligned}$$

und

4) Die inneren Winkel in bezug auf die als Kurven angesehenen Randpolygone an $f(e^{i\varphi_\mu})$ und $f(qe^{i\psi_\nu})$ sind also gleich $(2-\gamma_\mu)\pi$ bzw. $\delta_\nu\pi$.

$$\int_0^{2\pi} e^{-c^*\varphi} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} \sigma(\varphi_\mu - \varphi)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma_3(\psi_\nu - \varphi)^{\delta_\nu - 1}}{|\sigma(\varphi + i \lg z_\infty)|^4} d\varphi = 0$$

oder, damit äquivalent,

$$\int_0^{2\pi} e^{-c^*\varphi} \frac{\prod_{\mu=1}^{m} \sigma_3(\varphi_\mu - \varphi)^{\gamma_\mu - 1} \prod_{\nu=1}^{n} \sigma(\psi_\nu - \varphi)^{\delta_\nu - 1}}{|\sigma_3(\varphi + i \lg z_\infty)|^4} d\varphi = 0.$$

Beweis. Uumittelbar aus dem Satz 7. Die vorletzten Beziehungen besagen zwar etwas eingehender als im Satz 7 selbst, aber sie stellen nur eine elementargeometrische Tatsache über die Summe der Winkel irgendeines schlichten (oder verzweigungsstellenfreien) Polygons dar. Die erste Monodromiebedingung wird zuerst in der Form

$$\begin{aligned} c^* &+ \sum_{\mu=1}^{m} (\gamma_\mu - 1) \zeta(i \lg z_\infty + \varphi_\mu) \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu - 1) \zeta_3(i \lg z_\infty + \psi_\nu) - 2\zeta(i \lg |z_\infty|^2) = 0 \end{aligned}$$

gewonnen und dann nach Einsetzen des Wertes von c^* in die angegebene Form erbracht.[5)]

Ähnlich wie im einfach zusammenhängenden Fall ist hierbei auch eine Ergänzung zum Satz 8 zu bemerken. Nämlich *vermittelt jede Funktion $f(z)$ von der in diesem Satz ausgesprochenen Gestalt mit $q < |z_\infty| < 1$ umgekehrt die Abbildung des Kreisringes $q < |z| < 1$ auf ein den unendlich fernen Punkt enthaltendes geradlinig begrenztes Polygonalringgebiet in der dort erwähnten Weise, sofern beide genannte Monodromiebedingungen erfüllt werden.*

Zum Schluß werde nebenbei bemerkt, daß die in diesem Paragraphen gestellten Resultate bei $q \to 0$ in die in § 5 erwähnten entsprechenden Resultate übergehen, nämlich, daß die Sätze 5 und 6 als besondere Grenzfälle der Sätze 7 bzw. 8 angesehen werden können. Dafür möge man auf die in § 4 der vorliegenden Note oder im Schlußparagraphen einer früheren Abhandlung [2] ausgeführten Überlegungen hinweisen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KOMATU, Y., Einige Darstellungen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen auf konforme Abbildung. Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 536—541.
[2] KOMATU, Y., Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen

5) Es ist möglich, einen anderen mehr unmittelbaren Beweis anzugeben, insofern man den Bezug nur auf den Satz 8 nimmt. Vgl. dazu eine nachfolgende Note [3].

nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete. Jap. Journ. Math. **19** (1945), 203—215.

[3] KOMATU, Y., On conformal mapping of polygonal domains. Proc. Japan Acad. **33** (1957), 279—283.

[4] MORI, A., On conformal representation of multiply connected polygonal domain. Journ. Math. Soc. Japan **2** (1951), 187—197.

MATHEMATISCHES SEMINAR,
INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE ZU TOKYO.