A. J. MONTESINOS
KODAI MATH. J.
14 (1991), 420—431

SUR LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES VARIETES D'EINSTEIN DE DIMENSION 6 A COURBURE SECTIONNELLE NEGATIVE PINCEE

BY ANGEL J. MONTESINOS

Introduction. *Formulation des résultats.*

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et orientable de dimension $n=2K$ et désignons par $R(v_1, v_2, v_3, v_4)=g(R(v_1, v_2)v_3, v_4)$ son tenseur de courbure riemannien. Si $\{v_1, v_2\}$ est un couple orthonormé de vecteurs, la courbure sectionnelle dans le plan (v_1, v_2) est $R(v_1, v_2, v_1, v_2)$.

D'après la formule de Chern ([3]) la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ de M s'exprime par

$$\chi(M)=\int_M \chi(R)dv_g,$$

où v_g est la mesure induite sur M par l'élément de voume de la métrique g et, pour tout $p\in M$, $\chi(R)(p)$ est défini dans une base orthonormée arbitraire de l'espace tangent T_pM par

$$\chi(R)(p)=\frac{1}{2^{3K}\pi^K K!}\sigma_{i_1\cdots i_{2K}}\sigma_{j_1\cdots j_{2K}}R^{i_1 i_2 j_1 j_2}\cdots R^{i_{2K-1}i_{2K}j_{2K-1}j_{2K}}, \tag{1}$$

où $\sigma_{i_1\cdots i_{2K}}$ est l'indice de la permutation $(1, 2, \cdots, 2K)\to(i_1\cdots i_{2K})$.

Reppelons que si V est un espace euclidien et R un 4-tenseur covariant sur V vérifiant $R_{ijkl}=-R_{jikl}=R_{jilk}$ et $R_{ijkl}+R_{jkil}+R_{kijl}=0$ (donc aussi $R_{ijkl}=R_{klij}$), alors R est appelé tenseur de courbure sur V. L'espace des teneurs de courbure sur V sera noté $\mathrm{Courb}(V)$. Si $\dim V=2K$ et $R\in\mathrm{Courb}(V)$, on définit l'intégrand d'Euler (formel) de R par (1).

Les conjectures suivantes sont classiques :

Conjecture (globale) de H. Hopf. Si (M, g) est à courbure sectionnelle non négative, alors $\chi(M)\geqq 0$. Si (M, g) est à courbure sectionnelle non positive, alors $\chi(M)\geqq 0$ si $n\equiv 0$ (mod. 4) et $\chi(M)\leqq 0$ si $n\equiv 2$ (mod. 4).

Conjecture (algébrique) de H. Hopf. Soit $R\in\mathrm{Courb}(V)$ et $n=\dim(V)$ pair. Si R est à courbure sectionnelle non négative, alors $\chi(R)\geqq 0$. Ce qui équivaut

Received March 29, 1991.

à: si R est à courbure sectionnelle non positive, alors $\chi(R)\geqq 0$ si $n\equiv 0$ (mod. 4) et $\chi(R)\leqq 0$ si $n\equiv 2$ (mod. 4).

En dimension 4 la conjecture globale fut prouvée par J. W. Milnor, et puis par S. S. Chern ([4]) qui, de fait, montre la conjecture algébrique. De plus, on connaît une obstruction topologique à l'existence de métriques d'Einstein due à J. Thorpe et N. Hitchin ([14], [7]).

Il est bien connu que, dès la dimension 6, la conjecture algébrique est fausse: R. Geroch a, le premier, donné un exemple de tenseur de courbure en dimension 6 pour lequel la conjecture algébrique est violée (voir [5] et [10]); J. P. Bourguignon et H. Karcher construisent dans [1] un tenseur de courbure d'Einstein en dimension 6 à courbure sectionnelle positive dont l'intégrand d'Euler est négatif (pour d'autres contre-exemples à la conjecture algébrique en dimensions 6 et supérieures, voir [2]). Récemment, C. C. Hsiung et K. M. Shiskowski ont donné des conditions sur les courbures sectionnelles d'ordre $p(2\leqq p\leqq n=\dim(V))$ impliquant $\chi(R)\geqq 0$ ou $\chi(R)\leqq 0$ (voir [8]). D'autre part, D. L. Johnson ([9]) a prouvé la conjecture algébrique en dimensioh 6 pour le cas Kählérien.

La conjecture globale en dimension 6 a été prouvée à l'aide d'hypothéses additionnelles: ainsi, si (M, g) admet un champ de Killing non nul et la courbure sectionnelle est positive, alors $\chi(M)>0$ (A. Weinstein [16]); S. I. Goldberg ([6]) démontra la conjecture globale en dimension n si la variété est conformément plate et S. Tanno ([15]) a établi (en dimension 6) que si le tenseur de courbure conforme est petit, la courbure scalaire τ est positive et la courbure de Ricci est près de $(1/6)\tau$, alors $\chi(M)>0$.

Nous prouvons (voir le Corollaire ci-dessous) que la caractéristique d'Euler d'un espace d'Einstein de dimension 6 à courbure sectionnelle négative 0,233 pincée est négative.

Introduisons maintenant quelques notations pour formuler notre résultat principal. Si $v\in T_1M$, le fibré tangent unitaire de M, l'endomorphisme de Jacobi $K_v\colon T_{1(v)}M\to T_{1(v)}M$ est défini par $K_v(w)=R(v, w)v$, pour tout $w\in T_{1(v)}M$. Il en résulte que $K_v(v)=0$ et $g(K_v(w), u)=g(w, K_v(u))$; en particulier K_v envoie $v^{\perp}=\{w\in T_{1(v)}M \mid g(v, w)=0\}$ sur lui-même et il existe une base orthonormée $\{e_1(v), \cdots, e_{n-1}(v)\}$ de $v^{\perp}$ qui diagonalise $K_v|_{v^{\perp}}$. Ainsi $K_v(e_i(v))=\lambda_i(v)e_i(v)$, remarquons que $\lambda_i(v)$ est la courbure sectionnelle selon le plan $(v, e_i(v))$.

La mesure $v_g\times\Lambda$ sur T_1M est le produit de v_g (celle induite par la métrique g sur M) et de Λ (la mesure de Lebesgue normalisée sur les fibres).

THÉORÈME. *Soit (M, g) une variété riemannienne d'Einstein de dimension* 6, *compacte et orientable, alors*

$$\chi(M)=\frac{5}{2^3\P^3 3}\int_{T_1M}[9{,}6\ \mathrm{Trace}(K_v^3)-6{,}56\ \mathrm{Trace}(K_v^2)\ \mathrm{Trace}\ K_v \tag{2}$$
$$+(\mathrm{Trace}\ K_v)^3-0{,}02\ \nabla_S R_{abcd}\nabla^S R^{abcd}]dv_g\times\Lambda\,.$$

En conséquence,

$$\chi(M)\leqq\frac{5}{2^3\pi^3 3}\int_{T_1M}[9{,}6\ \mathrm{Trace}(K_v^3)-6{,}56\ \mathrm{Trace}(K_v^2)\ \mathrm{Trace}\ K_v$$
$$+(\mathrm{Trace}\ K_v)^3]dv_g\times\Lambda, \tag{3}$$

l'égalité n'ayant lieu que si (M, g) *est localement symétrique* ($\nabla R=0$).

Remarque. (M, g) étant d'Einstein, on a $\rho=\lambda g$ (où ρ est le tenseur de Ricci) donc Trace $K_v=\lambda$ pour tout $v\in T_1M$. Compte tenu de (3) il est naturel de considérer le cas à courbure sectionnelle négative. On peut donc supposer $\lambda=-1$ et donner des conditions de pincement pour les valeurs propres $\lambda_i(v)$ de $K_v|_{v^\perp}$ impliquant

$$9{,}6\Big(\sum_{i=3}^{5}\lambda_i(v)^3\Big)+6{,}56\Big(\sum_{i=1}^{5}\lambda_i(v)^2\Big)-1<0,\quad \text{où}\quad \sum_{i=1}^{5}\lambda_i(v)=-1. \tag{4}$$

DÉFINITION. Soit $E\subset\boldsymbol{R}$ un ensemble compact. On dit que les éléments de E sont p pincés si

$$pm\leqq x\leqq m \quad \text{pour tout } x\in E, \text{ ou bien si}$$
$$-m\leqq x\leqq -pm \quad \text{pour tout } x\in E. \text{ Ici,}$$
$$m=\max\{|j| \mid j\in E\} \quad \text{et} \quad 0\leqq p\leqq 1.$$

Si l'on fait $\lambda_1(v)=\lambda_2(v)=-\dfrac{\alpha}{2\alpha+3}$ et $\lambda_3(v)=\lambda_4(v)=\lambda_5(v)=-\dfrac{1}{2\alpha+3}$, alors les $\lambda_i(v)$ sont α pincés et, si $\alpha=0{,}2329$, le polynôme de (4) est positif. Nous prouvons que si le pincement des $\lambda_i(v)$ est 0,233 alors on a (4). En conséquence:

COROLLAIRE. *La caractéristique d'Euler d'un espace d'Einstein de dimension* 6, *compact, orientable et à courbure sectionnelle négative est négative si les valeurs propres de* $K_v|_{v^\perp}$ *sont* 0,233 *pincées, pour tout* $v\in T_1M$ (*il en est ainsi si la courbure sectionnelle est* 0,233 *pincée*).

Je dois les motivations de ce travail à André Avez. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma gratitude. Je remercie Jean-Pierre Bourguignon pour les conversations que nous avons eues.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [12].

Preuve du Théorème

D'après les résultats de T. Sakai ([13]) la formule de Chern pour une variété (M, g) de dimension 6 peut s'écrire comme suit:

$$\chi(M)=\frac{1}{384\pi^3}\int_M[\tau^3-12\tau|\rho|^2+3\tau|R|^2+16(\rho\rho\rho)$$
$$+24(\rho;\rho;R)-24(\rho;R,R)+2(R,R,R)-8(R:R:R)]dv_g,$$

R est le tenseur de courbure riemannien, ρ le tenseur de Ricci, τ la courbure scalaire et on utilise les notation suivantes ([15]) dans une base orthonormée arbitraire: $|R|^2=R_{abcd}R^{abcd}$, $|\rho|^2=\rho_{ij}\rho^{ij}$,

$$(R,\ R,\ R)=R^{ij}{}_{kl}R^{kl}{}_{rs}R^{rs}{}_{ij},$$

$$(R:\ R:\ R)=R^{ijkl}R_i{}^r{}_k{}^s R_{jslr},$$

$$(\rho\ ;\ R,\ R)=\rho^{rs}R_{rjkl}R_s{}^{jkl},$$

$$(\rho\ ;\ \rho\ ;\ R)=\rho^{ik}\rho^{jl}R_{ijkl},$$

$$(\rho\rho\rho)=\rho^i{}_j\rho^j{}_k\rho^k{}_i.$$

En partiuclier, si $(M,\ g)$ est d'Einstein, on obtient:

$$\chi(M)=\frac{1}{384\P^3}\int_M\left[\frac{1}{9}\tau^3-\tau|R|^2-8(R:\ R:\ R)+2(R,\ R,\ R)\right]dv_g. \tag{5}$$

Notre but est d'exprimer les intégrales de τ Trace(K_v^2) et de Trace(K_v^3) sur T_1M en fonction des quatre invariants cubiques du tenseur de courbure apparaissant dans la formule (5).

LEMME 1. *Si $(M,\ g)$ est une variété d'Einstein de dimension* 6, *alors*

$$\int_{T_1M}\tau\,\mathrm{Trace}(K_v^2)dv_g\times\Lambda=\frac{1}{48}\int_M\left[\frac{3}{2}\tau|R|^2+\frac{\tau^3}{6}\right]dv_g. \tag{6}$$

Preuve. Désignons par $S^5(p)$ la fibre de T_1M au-dessus de p. Soit $(E_1, \cdots, E_6)$ un repère orthonormé de T_pM et considérons le tenseur contravariant T dont les composantes en $(E_1,\ \cdots,\ E_6)$ sont

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{S^5(p)}v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta d\Lambda \tag{7}$$

(ici $v=v^iE_i\in S^5(p)$ est la variable d'intégration). Il s'agit d'un tenseur complètement symétrique et invariant par le groupe orthogonal. En conséquence:

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}=c[g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}+g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}+g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}], \tag{8}$$

où c est une constante.

Si l'on contracte (7) et (8) avec $g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$ on obtient $c=1/48$. D'autre part, Trace$(K_v^2)=R_{vivj}R_v{}^i{}_v{}^j$ ce qui, d'après (8), implique

$$\int_{S^5(p)}\mathrm{Trace}(K_v^2)d\Lambda=R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^i{}_\delta{}^j T^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$=\frac{1}{48}[R_{\alpha i}{}^\alpha{}_j R_\gamma{}^{i\gamma j}+R_{\alpha i\beta j}R^{\alpha i\beta j}+R_{\alpha i\beta j}R^{\beta i\alpha j}]$$

$$=\frac{1}{48}\left[|\rho|^2+\frac{3}{2}|R|^2\right],\quad \text{car}\quad \frac{1}{2}|R|^2=R_{\alpha i\beta j}R^{\beta i\alpha j}.$$

Le lemme est prouvé.

LEMME 2. *Si* $(M. g)$ *est une variété d'Einstein de dimension* 6, *alors*

$$\int_{T_1 M} \mathrm{Trace}(K_v^3)dv_g \times \Lambda \tag{9}$$
$$= \frac{1}{480}\int_M \left[\frac{3}{4}\tau|R|^2 + \frac{\tau^3}{36} - (R:R:R) + \frac{13}{4}(R,\ R,\ R)\right]dv_g.$$

Preuve. On raisonne comme dans le lemme précédent:

$$\int_{S^5(p)} \mathrm{Trace}(K_v^3)d\Lambda = \int_{S^5(p)} R_{vivj}R_v{}^j{}_{vk}R_v{}^k{}_v{}^i d\Lambda$$
$$= R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^j{}_{\delta k}R_\eta{}^k{}_\mu{}^i \int_{S^5(p)} v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta v^\eta v^\mu d\Lambda.$$

Si l'on considère le tenseur contravariant donné par

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta\eta\mu} = \int_{S^5(p)} v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta v^\eta v^\mu d\Lambda,$$

on a

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta\eta\mu} = \frac{1}{480}\Big[\sum_{(i_1\cdots i_6)\in P(\alpha\cdots\mu)} g^{i_1 i_2}g^{i_3 i_4}g^{i_5 i_6}\Big],$$

où $P=P(\alpha\cdots\mu)$ est l'ensemble des permutations $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \eta,\ \mu)$ suivantes:

$$\begin{aligned} P = \{&(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6),\ (1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6),\ (1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5),\\ &(1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6),\ (1\ 3\ 2\ 5\ 4\ 6),\ (1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5),\\ &(1\ 4\ 2\ 3\ 5\ 6),\ (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6),\ (1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5),\\ &(1\ 5\ 2\ 3\ 4\ 6),\ (1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6),\ (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4),\\ &(1\ 6\ 2\ 3\ 4\ 5),\ (1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5),\ (1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4)\}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{S^5(p)} \mathrm{Trace}(K_v^3)d\Lambda = \frac{1}{480}\Big[&R_{\alpha i}{}^\alpha{}_j R_\beta{}^{j\beta}{}_k R_\gamma{}^{k\gamma i}\\ &+ R_{\alpha i}{}^\alpha{}_j R_\gamma{}^j{}_{\delta k}R^{\gamma k\delta i} + R_{\alpha i}{}^\alpha{}_j R_\gamma{}^j{}_{\delta k}R^{\delta k\gamma i}\\ &+ R_{\alpha i\beta j}R^{\alpha j\beta}{}_k R_\eta{}^{k\eta i} + R_{\alpha i\beta j}R^{\alpha j}{}_{\delta k}R^{\beta k\delta i}\\ &+ R_{\alpha i\beta j}R^{\alpha j}{}_{\delta k}R^{\delta k\beta i} + R_{\alpha i\beta j}R^{\beta j\alpha}{}_k R_\eta{}^{k\eta i}\\ &+ R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\alpha}{}_k R^{\beta k\gamma i} + R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\alpha}{}_k R^{\gamma k\beta i}\\ &+ R_{\alpha i\beta j}R^{\beta j}{}_{\delta k}R^{\alpha k\delta i} + R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\beta}{}_k R^{\alpha k\gamma i}\\ &+ R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\gamma}{}_k R^{\alpha k\beta i} + R_{\alpha i\beta j}R^{\beta j}{}_{\delta k}R^{\delta k\alpha i}\\ &R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\beta}{}_k R^{\gamma k\alpha i} + R_{\alpha i\beta j}R_\gamma{}^{j\gamma}{}_k R^{\beta k\alpha i}\Big](p). \end{aligned} \tag{10}$$

D'autre part, on vérifie aisément (voir [13] p. 591) que

$$
\begin{aligned}
&\rho^{uv}R_u{}^{abc}R_{vbca}=-\frac{1}{2}(\rho\,;\,R,\,R),\\
&R^{abcd}R_{ab}{}^{uv}R_{cudv}=\frac{1}{2}(R,\,R,\,R),\\
&R^{abcd}R_{ac}{}^{uv}R_{budv}=\frac{1}{4}(R,\,R,\,R),\\
&R^{abcd}R_a{}^u{}_b{}^vR_{cudv}=\frac{1}{4}(R,\,R,\,R)\quad\text{et}\\
&R^{abcd}R_{ac}{}^{uv}R_{bduv}=\frac{1}{2}(R,\,R,\,R).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Le lemme découle alors de (10) et (11).

Remarquons que, pour une métrique d'Einstein, les endomorphismes de Jacobi ne fournissent que trois invariants cubiques en $R\left(\int_{S^5(p)}\mathrm{Trace}(K_v^3),\ \int_{S^5(p)}\mathrm{Trace}(K_v^2)\,\mathrm{Trace}\,K_v\right.$ et $\left.\int_{S^5(p)}(\mathrm{Trace}\,K_v)^3\right)$ or d'après (5), $\chi(M)$ s'exprime en fonction de quatre invariants cubiques du tenseur de courbure. Nous utilisons alors le fait que l'intégrale sur M de $|\nabla R|^2=\nabla_sR_{abcd}\nabla^SR^{abcd}$ a une expression cubique en la courbure. En effet, d'après une identité introduite par A. Lichnerowicz (voir [11] p. 10 et [13] p. 592):

$$
\begin{aligned}
\int_M -|\nabla R|^2+4|\nabla\rho|^2-|\nabla\tau|^2=\int_M &-4(R:R:R)+4(\rho\,;\,\rho\,;\,R)\\
&+2(\rho\,;\,R,\,R)-2(R,\,R,\,R)-4(\rho\rho\rho).
\end{aligned}
$$

Ici M est une variété compacte, orientable de dimension n. En particulier, si $(M,\,g)$ est d'Einstein de dimension 6 on obtient

$$
\int_M|\nabla R|^2dv_g=\int_M\left[-\frac{1}{3}\tau|R|^2+4(R:R:R)+2(R,\,R,\,R)\right]dv_g. \tag{12}
$$

Le Théorème est prouvé car (2) découle de (5), (6), (9) et (12). Le Corollaire est conséquence du fait suivant, dont la preuve est présentée à l'Appendice:

LEMMA 3. *Soit*

$$
P(X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4,\,X_5)=960\Big(\sum_{i=1}^5X_i^3\Big)-656\Big(\sum_{i=1}^5X_i^2\Big)+100.
$$

Alors $P>0$ *sur les* $(X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4,\,X_5)$ *vérifiant* $\sum_{i=1}^5X_i=1$ *et* $0\leqq 0{,}233\max_{j=1\cdots5}\{X_j\}\leqq X_i$, *pour tout* $i=1\cdots5$.

Appendice

Notra but est de prouver le lemme 3. Etant donnée la syétrie des variebles X_i du polynôme $P=960\left(\sum_{i=1}^{5}X_i^3\right)-656\left(\sum_{i=1}^{5}X_i^2\right)+100$, il suffit de montrer que P est positif sur l'ensemble défini par

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}&\sum X_i=1\\ &0\leqq \alpha X_5\leqq X_j\leqq X_5 \qquad \text{pour tout } j\in\{1, 2, 3, 4\},\end{aligned}$$

où l'on note $\alpha=0,233$.

Nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On introduira les variables $Z_{\pm1}, \cdots, Z_{\pm4}, Z_5$ pour éliminer les inégalités en (1). Soient

$$\begin{aligned}
g_0&=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5-1\\
g_1&=X_1-\alpha X_5-Z_1^2\\
g_2&=X_2-\alpha X_5-Z_2^2\\
g_3&=X_3-\alpha X_5-Z_3^2\\
g_4&=X_4-\alpha X_5-Z_4^2\\
g_5&=\alpha X_5-Z_5^2\\
g_{-1}&=X_5-X_1-Z_{-1}^2\\
g_{-2}&=X_5-X_2-Z_{-2}^2\\
g_{-3}&=X_5-X_3-Z_{-3}^2\\
g_{-4}&=X_5-X_4-Z_{-4}^2
\end{aligned}$$

Désignons par $G: R^{14}\to \boldsymbol{R}^{10}$ la fonction dont les composantes sont les fonctions g_i Il est aisé de montrer que 0 est une valeur régulière de G. Ainsi, les extrema de P sur la sous-variété compacte de dimension 4 de $\boldsymbol{R}^{14}$ définie par $G=0$ apparaissent parmi les solutions du système

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases}
2880\,X_1^2-1312\,X_1=\mu+\lambda_1 \qquad\qquad -\lambda_{-1}\\
2880\,X_2^2-1312\,X_2=\mu \qquad +\lambda_2 \qquad\qquad -\lambda_{-2}\\
2880\,X_3^2-1312\,X_3=\mu \qquad\qquad +\lambda_3 \qquad\qquad -\lambda_{-3}\\
2880\,X_4^2-1312\,X_4=\mu \qquad\qquad\qquad +\lambda_4 \qquad\qquad -\lambda_4\\
2880\,X_5^2-1312\,X_5=\mu-\alpha\lambda_1-\alpha\lambda_2-\alpha\lambda_3-\alpha\lambda_4+\lambda_{-1}+\lambda_{-3}+\lambda_{-4}+\lambda_5
\end{cases}$$

$$\text{(3)}\qquad 0=\lambda_5 Z_5$$

$$\text{(4)}\qquad 0=\lambda_i Z_i, \qquad i=\pm1\cdots\pm4$$

$$0=G. \tag{5}$$

Nous allons montrer que P est positif sur toutes les solutions du système *ci*-dessus et le lemme en découlera.

Remarquons que (3) et (5) impliquent $\lambda_5=0$. D'autre part, on peut réduire toutes les possibilités données par (4) aux cas suivants:

Cas 1.1 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-1}, λ_{-2}, λ_{-3} et λ_{-4}
Cas 1.2 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4
Cas 1.3 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-2}, λ_{-3}, λ_{-4} et λ_1
Cas 1.4 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1, λ_2, λ_3 et λ_{-4}
Cas 1.5 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1, λ_2, λ_{-3} et λ_{-4}
Cas 2.1 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-2}, λ_{-3} et λ_{-4}
Cas 2.2 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1, λ_2 et λ_3
Cas 2.3 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-3}, λ_{-4} et λ_1
Cas 2.4 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1, λ_2 et λ_{-4}
Cas 3.1 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-3} et λ_{-4}
Cas 3.2 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1 et λ_2
Cas 3.3 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-4} et λ_1
Cas 4.1 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_{-4}
Cas 4.2 Tous les λ_i sont nuls sauf λ_1
Cas 5 Tous les λ_i sont nuls.

Etudions maintenant chaque cas (rappelons que $\alpha\equiv 0{,}233$):

Cas 1.1 Notre hypothèse et (4) impliquent $Z_1=Z_{-2}=Z_{-3}=Z_{-4}=0$. Or, $G=0$ détermine alors que $X_1=X_2=X_3=X_4=X_5=1/5$; le polynôme P est positif sur cette valeur.

Cas 1.2 Maintenant $Z_1=Z_2=Z_3=Z_4=0$ et il résulte de $G=0$ que $X_1=X_2=X_3=X_4=\alpha X_5$ et $X_5=1/4\alpha+1$. Sur ce point $P=1/(4\alpha+1)^3\ [-256\alpha^3+2176\alpha^2-1424\alpha+404]>0$.

Cas 1.3 Comme $Z_1=Z_{-2}=Z_{-3}=Z_{-4}=0$, on a $X_1=\alpha X_5$ et $X_2=X_3=X_4=X_5=1/\alpha+4$. En conséquence, $P=+1/(\alpha+4)^3\ [404\alpha^3-1424\alpha^2+2176\alpha-256]>0$.

Cas 1.4 Maintenant $Z_1=Z_2=Z_3=Z_{-4}=0$, donc $X_1=X_2=X_3=\alpha X_5$ et $X_4=X_5=1/3\alpha+2$. On obtient $P=1/(3\alpha+2)^3\ [-324\alpha^3+1464\alpha^2-336\alpha+96]>0$.

Cas 1.5 Il résulte de notre hypothèse que $Z_1=Z_2=Z_{-3}=Z_{-4}=0$. En conséquence $X_1=X_2=\alpha X_5$ et $X_3=X_4=X_5=1/2\alpha+3$. Alors $P=1/(2\alpha+3)^3\ [96\alpha^3+336\alpha^2+1464\alpha-324]>0$. L'examen des valeurs de P sur toutes les solutions du système (après avoir étudié tous les cas) montre que P atteint son minimum (sur $G=0$) en ce point.

Notations. Introduisons les notations suivantes: $\sqrt{\ }\equiv\sqrt{(1312)^2+4\mu 2880}$, $r_\pm\equiv 1312\pm\sqrt{\ }/5760$. C'est-à-dire que $r_\pm$ sont les solutions de $2880\,X^2-1312X-\mu=0$.

Cas 2.1 Comme $Z_{-2}=Z_{-3}=Z_{-4}=0$ on a $X_2=X_3=X_4=X_5$ et (2) s'écrit

$$2880\,X_1^2-1312\,X_1=\mu$$

$$2880\,X_5^2-1312\,X_5=\mu.$$

Comme $X_1 \leqq X_5$ (car $G=0$) et $X_1=X_5$ est le cas 1.1, on a $X_1<X_5$. Alors $X_1=r_-$, $X_2=X_3=X_4=X_5=r_+$ ce qui implique (compte tenu de $\sum X_i=1$) $5760=5\times 1312 +3\sqrt{\ }$. En résumé $3\sqrt{\ }=-800$ et il n'y a pas de solution dans ce cas.

Cas 2.2 Maintenant $Z_1=Z_2=Z_3=0$, donc $X_1=X_2=X_3=\alpha X_5$. D'après notre hypothèse, (2) s'écrit

$$2880\, X_4^2-1312\, X_4=\mu \tag{6}$$

$$2880(3\alpha^3+1)X_5^2-1312(3\alpha^2+1)X_5=(3\alpha+1)\mu \tag{7}$$

De (6) il vient $X_4=r_\pm$. D'autre part

$$X_4=1-(3\alpha+1)X_5, \quad \text{car } \sum X_i=1. \tag{8}$$

En donséquence $\pm\sqrt{\ }=4448-5760(3\alpha+1)X_5$ et on obtient $\mu=2880(3\alpha+1)^2X_5^2-4448(3\alpha+1)X_5+1568$. Ce qui, avec (7), implique

$$0=[2160\alpha^3+2430\alpha^2+810\alpha]X_5^2+[-1128\alpha^2-834\alpha-98]X_5+49(3\alpha+1).$$

Les racines de cette équation sont $X_5^+=0{,}6453038$ et $X_5^-=0{,}3707468$. Pour la valeur X_5^+ on obtient, d'après (8), $X_4<0$ donc il n'y a pas de solution vérifiant $G=0$. La solution correspondante à X_5^- vérifie $G=0$ et on a $P>0$.

Cas 2.3 Comme $Z_{-3}=Z_{-4}=Z_1=0$, on a $X_3=X_4=X_5$ et $X_1=\alpha X_5$. D'autre part (2) s'écrit

$$\begin{aligned} &2880\, X_2^2-1312\, X_2=\mu \\ &2880(\alpha^3+3)X_5^2-1312(\alpha^2+3)X_5=(\alpha+3)\mu \end{aligned} \tag{9}$$

De $X_2=r_\pm$ et $X_2=1-(\alpha+3)X_5$ il résulte $\mu=2880(\alpha+3)^2X_5^2-4448(\alpha+3)X_5+1568$ et, compte tenu de (9), on a

$$0=[810\alpha^2+2430\alpha+2160]X_5^2+[-98\alpha^2-834\alpha-1128]X_5+49(\alpha+3).$$

Les racines sont $X_5^+=0{,}2550219$, $X_5^-=0{,}2242428$. Il n'y a pas de solution pour X_5^- car on obtient $X_2=1-(\alpha+3)X_5^->X_5^-$. La solution correspondante à X_5^+ vérifie $G=0$ et $P>0$.

Cas 2.4 Maintenant $Z_1=Z_2=Z_{-4}=0$, alors $X_1=X_2=\alpha X_5$ et $X_4=X_5$. Le système (2) s'écrit

$$\begin{aligned} &2880\, X_3^2-1312\, X_3=\mu \\ &2880(2\alpha^3+2)X_5^2-1312(2\alpha^2+2)X_5=(2\alpha+2)\mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Etant donné que $X_3=r_\pm$ et $X_3=1-(2\alpha+2)X_5$ on a $\mu=2880(2+2\alpha)^2X_5^2-4448(2+2\alpha)X_5 +1568$ et, d'après (10), on obtient

$$0=[270\alpha^3+1080\alpha^2+1080\alpha+270]X_5^2+[-237\alpha^2-556\alpha-237]X_5+49(\alpha+1)$$

Les racines sont $X_5^+=0{,}3711204$ et $X_5^-=0{,}2789102$.

Il n'y a pas de solution (vérifiant $G=0$) dans ce cas car, pour X_5^+, on obtient

$X_3 < \alpha X_5^+$ et, pour X_5^-, on a $X_3 > X_5^-$.

Cas 3.1 D'après notre hypothèse $Z_{-3} = Z_{-4} = 0$, alors $X_3 = X_4 = X_5$. De plus, (2) s'écrit

$$2880\, X_1^2 - 1312\, X_1 = \mu$$

$$2880\, X_2^2 - 1312\, X_2 = \mu$$

$$2880\, X_5^2 - 1312\, X_5 = \mu .$$

Compte tenu des 1.1 et 2.1, on peut supposer $X_1 < X_5$ et $X_2 < X_5$. En conséquence $X_1 = X_2 = r_-$ et $X_3 = X_4 = X_5 = r_+$. Or $\sum X_i = 1$ implique $\sqrt{} = -800$, il n'y a pas de solution dans ce cas.

Cas 3.2 Maintenant $Z_1 = Z_2 = 0$, donc $X_1 = X_2 = \alpha X_5$. D'autre part (2) s'écrit

$$2880\, X_3^2 - 1312\, X_3 = \mu$$

$$2880\, X_4^2 - 1312\, X_4 = \mu$$

$$2880(2\alpha^3 + 1) X_5^2 - 1312(2\alpha^2 + 1) X_5 = (2\alpha + 1)\mu . \tag{11}$$

Nous considérons deux possibilités:

a) $X_3 = r_-$ et $X_4 = r_+$

b) $X_3 = X_4$ $(= r_\pm)$.

Dans le cas a), $\sum X_i = 1$ s'écrit $(2\alpha + 1) X_5 + 1312/2880 = 1$. Ainsi $X_5 = 0{,}3713809$ et, d'après (11), $\mu = -90{,}646098$. Comme $X_3 = r_- = 0{,}0849198 < \alpha X_5$ il n'y a pas de solution vérifiant $G = 0$.

Dans le cas b) la condition $\sum X_i = 1$ s'écrit $\pm 2\sqrt{} = 3136 - 5760(2\alpha + 1) X_5$. Alors $\mu = 720(2\alpha + 1)^2 X_5^2 - 784(2\alpha + 1) X_5 + 64$ et, d'après (11), on a

$$0 = [540\alpha^2 + 270\alpha - 135] X_5^2 + [-32\alpha^2 - 196\alpha + 33] X_5 + 4(2\alpha + 1) .$$

Il y a une seule racine positive ($X_5^+ = 0{,}238364$) mais la solution correspondante ne vérifie pas $G = 0$ car $(2\alpha + 1) X_5^+ + 2X_3 = 1$ implique $X_3 > X_5^+$.

Cas 3.3 Comme $Z_1 = Z_{-4} = 0$, il résulte que $X_1 = \alpha X_5$ et $X_4 = X_5$. De plus, (2) s'écrit

$$2880\, X_2^2 - 1312\, X_2 = \mu$$

$$2880\, X_3^2 - 1312\, X_3 = \mu$$

$$2880(\alpha^3 + 2) X_5^2 - 1312(\alpha^2 + 2) X_5 = (\alpha + 2)\mu . \tag{12}$$

Il faut considérer les possibilités suivantes

a) $X_2 = r_-$, $X_3 = r_+$.

b) $X_2 = X_3$ $(= r_\pm)$.

La condition $\sum X_i = 1$ implique, dans le cas a), que $(\alpha + 2) X_5 + 1312/2880 = 1$. En conséquence $X_5 = 0{,}2438175$ et, d'après (12), $\mu = -139{,}97488$. On obtient, pour cette valeur de μ, $X_3 = r_+ > X_5$. Il n'y a pas de solution de $G = 0$ dans ce cas.

Pour le cas b) on obtient à partir de la condition $\sum X_i = 1$ que $\pm 2\sqrt{} = 3136 - 5760(2 + \alpha) X_5$. En coséquence, $\mu = 720(2 + \alpha)^2 X_5^2 - 784(2 + \alpha) X_5 + 64$ et, d'après

(12), on a

$$0=[-135\alpha^3+270\alpha^2+540\alpha]X_5^2+[33\alpha^2-196\alpha-32]X_5+4(\alpha+2).$$

Les racines sont $X_5^+=0{,}375251$ et $X_5^-=0{,}171526$. Compte tenu de $(\alpha+2)X_5+2X_2=1$, on a $X_2<\alpha X_5^+$ et $X_2>X_5^-$. En conséquence il n'y a pas de solution de $G=0$ dans ce cas.

Cas 4.1 Maintenant $Z_{-4}=0$, c'est-à-dire que $X_4=X_5$. D'autre part (2) s'écrit

$$2880\, X_i^2-1312\, X_i=\mu \qquad \text{dour} \quad i=1,2,3,4,5.$$

Ainsi $X_i=r_\pm$ et, compte tenu des cas 1.1, 2.1 et 3.1, on peut supposer X_1, X_2, $X_3<X_5$. Alors $X_1=X_2=X_3=r_-$ et $X_4=X_5=r_+$, et $\sum X_i=1$ implique $\sqrt{\ }=800$. En conséquence $X_1=X_2=X_3=0{,}0\widehat{8}$ et $X_4=X_5=0{,}3\widehat{6}$, solution qui vérifie $G=0$ et $P>0$.

Cas 4.2 Etant donné que $Z_1=0$ on a $X_1=\alpha X_5$. De plus, (2) s'écrit

$$2880\, X_i^2-1312\, X_i=\mu \qquad \text{pour} \quad i=2,3,4$$

$$2880(\alpha^3+1)X_5^2-1312(\alpha^2+1)X_5=(\alpha+1)\mu \tag{13}$$

En conséquence $X_i=r_\pm$ pour $i=2,3,4$. Supposons qu'il ait p X_i $(i=2,3,4)$ égaux à r_+. Alors $\sum X_i=1$ s'écrit

$$(2p-3)\sqrt{\ }=1824-5760(\alpha+1)X_5. \tag{14}$$

Si $p=1,2$ on obtient, respectivement, $\mp\sqrt{\ }=1824-5760\,(\alpha+1)X_5$ et il en résulte que $\mu=2880(\alpha+1)^2X_5^2-1824(\alpha+1)X_5+6272/45$. Alors, d'après (13), on a $0=[135\alpha^2+135\alpha]X_5^2+[-8\alpha^2-57\alpha-8]X_5+(98/45)(\alpha+1)$. Les racines sont $X_5^+=0{,}3755463$ et $X_5^-=0{,}1843572$. Pour X_5^+ on a $r_-<\alpha X_5^+$. Pour X_5^- il résulte que $r_+>X_5^-$. En résumé, il n'y a pas de solution de $G=0$ si $p=1,2$.

Si $p=0,3$ (14) s'écrit, respectivement, $\mp 3\sqrt{\ }=1824-5760(\alpha+1)X_5$. Alors $\mu=320(\alpha+1)^2X_5^2-(608/3)(\alpha+1)X_5-352/3$ et, d'après (13), il résulte

$$0=[-80\alpha^3+30\alpha^2+30\alpha-80]X_5^2+\left[\frac{104}{3}\alpha^2-\frac{38}{3}\alpha+\frac{104}{3}\right]X_5+\frac{11}{3}(\alpha+1).$$

Equation qui n'a pas des racines réelles.

Cas 5 D'après l'hypothèse, on a $2880\, X_i^2-1312\, X_i=\mu$ pour $i=1,2,\cdots,5$. Or, compte tenu des cas 1.1, 2.1, 3.1 et 4.1, on peut supposer X_1, X_2, X_3, $X_4<X_5$; c'est-à-dire que

$$X_1=X_2=X_3=X_4=r_- \quad \text{et} \quad X_5=r_+.$$

La condition $\sum X_i=1$ implique $\sqrt{\ }=800/3$ et on obtient alors $r_+=0{,}274074$, $r_-=0\text{-}1814814$. Cette solution vérifie $G=0$ et $P>0$.

RÉFÉRENCES

[1] J. P. BOURGUIGNON AND H. KARCHER, Curvature Operators: Pinching estimates and geometric examples, Ann. Sci, Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 71-92.

[2] J. P. BOURGUIGNON AND A. POLOMBO, Intégrants des nombres caractéristiques et courbure: rien ne va plus dès la dimension 6, J. Diff. Geom. **16** (1981), 537-550.

[3] S. S. CHERN, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math. **45** (1944), 747-752.

[4] S. S. CHERN, On curvature and charcteristic classes of a Riemannian manifold, Abb. Math. Univ. Hamburg **20** (1955), 117-126.

[5] R. GEROCH, Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 267-270.

[6] S. I. GOLDBERG, On conformally flat spaces with definite Ricci curvature, Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 226-232.

[7] N. HITCHIN, On compact four-dimensional Einstein Manifolds, J. Diff. Geom. **9** (1974), 435-442.

[8] C. C. HSIUNG AND K. M. SHISKOWSKI, Euler-Poincaré characteristic and higher order sectional curvature I, Trans. Amer. Math. Soc. 305, n° 1 (1988), 113-128.

[9] D. L. JOHNSON, Curvature and Euler characteristic for six-dimensional Kähler manifolds, Illinois J. Math. **28** (1984), 654-675.

[10] P. KLEMBECK, On Geroch's counterexample to the algebraic Hopf conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 334-336.

[11] A. LICHNEROWICZ, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).

[12] A. J. MONTESINOS, Sur la caractéristique d'Euler des variétés d'Einstein de dimension 6, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310. Série I, (1990), 283-286.

[13] T. SAKAI, On eigen-values of Laplacian and curvature of riemannian manifold. Tôhoku Math. J. **23** (1971), 589-603.

[14] I. M. SINGER AND J. A. THORPE, The curvature of 4-dimensional Einstein spaces, Global Analysis Papers in Honor of K. Kodaira (1969), 355-365.

[15] S. TANNO, Euler characteristics of some six-dimensional riemannian manifolds, Kodai Math. J. **7** (1984), 287-292.

[16] A. WEINSTEIN, A fixed point theorem for positively curved manifolds, J. Math. Mech. **18** (1968), 149-153.

UNIVERSITE DE PARIS SUD
MATHEMATIQUE BÂTIMENT 425
CENTRE D'ORSAY
91405 ORSAY CEDEX FRANCE