

## MODÈLES CANONIQUES PLONGÉS I

Dédié au Professeur Heisuke Hironaka pour son 60<sup>e</sup> anniversaire

BY GÉRARD GONZALEZ-SPRINBERG ET MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Como una figura de tarot, algo que tiene que resolverse, un poliedro donde cada arista y cada cara tiene su sentido inmediato, el falso, hasta integrar el sentido mediato...

Rayuela J. Cortázar

### 1. Introduction

Soit  $S$  une variété algébrique de dimension  $d$  avec un point singulier isolé  $O$ , définie sur un corps de base  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle.

Une *désingularisation* de  $S$  est un morphisme propre birationnel  $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ , isomorphisme en dehors de  $\pi^{-1}(O)$ , avec  $\tilde{S}$  une variété lisse. Etant donné un plongement de  $S$  dans une variété lisse  $V$  de dimension  $d+1$ , on appelle *désingularisation plongée* de  $S \hookrightarrow V$  un morphisme propre birationnel  $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ , isomorphisme en dehors de  $\pi^{-1}(O)$ , où  $\tilde{V}$  est lisse, la restriction de  $\pi$  à la transformée stricte  $\tilde{S}$  de  $S$  est une désingularisation de  $S$ , et  $\pi^{-1}(S)$  est un diviseur à croisements normaux. L'existence de désingularisations (resp. de désingularisations plongées) a été démontrée par H. Hironaka.

Les résultats classiques sur la structure des morphismes birationnels des surfaces lisses et sur les diviseurs de première espèce (lemme de Castelnuovo) ont permis de démontrer l'existence d'une *désingularisation minimum* pour les surfaces.

Par ailleurs, il existe une *désingularisation plongée standard* pour les courbes planes, obtenue par des éclatements de points.

La réalité est loin d'être aussi simple en dimension plus grande, en ce qui concerne l'unicité de désingularisations (plongées ou non) ayant des propriétés de minimalité, ou de constructibilité standard.

On doit se résigner à la "prolifération" de désingularisations plongées de surfaces et à la non unicité d'une désingularisation minimale des variétés de dimension trois.

Dans la théorie birationnelle des variétés de dimension trois développée principalement par S. Mori [M], on a été amené à considérer des variétés ayant des singularités appelées canoniques (étudiées par M. Reid) qui généralisent les

---

Mots-clés: Surfaces, Singularités.

Classification A.M.S.: 14B05, 14E15, 32C45.

Received October 3, 1990.

points doubles rationnels des surfaces. Les variétés considérées dans cette théorie qui n'ont que des singularités canoniques sont appelées modèles canoniques.

Dans ce travail, nous considérons des *modèles canoniques plongés* de surfaces dans un espace ambiant de dimension trois qui admet des singularités canoniques.

Plus précisément, nous utilisons une structure supplémentaire, celle des variétés toriques, qui permet pour une classe nombreuse d'hypersurfaces (à savoir les hypersurfaces non dégénérées pour leur polyèdre de Newton) l'obtention de désingularisations plongées en utilisant les éventails (méthode due à Hovansky et Varchenko).

On fait d'abord une traduction de la première partie de cette méthode en termes d'un éclatement normalisé équivariant, appelé *éclatement de Newton*. Ensuite, on construit un modèle canonique plongé dans une variété torique n'ayant que des singularités canoniques, tel que la surface n'a que des singularités de type  $A_n$  (qui sont les seules singularités toriques canoniques de surfaces). Ce modèle canonique plongé ainsi construit possède des propriétés de minimalité parmi les modèles obtenus à partir de l'éclatement de Newton.

Dans le §2, on fait des rappels et on donne des résultats préliminaires sur les éventails, les éclatements équivariants et les singularités canoniques toriques.

La description détaillée d'un exemple est fait au §3.

La construction des modèles canoniques plongés des surfaces hypersurfaces non dégénérées pour leur polyèdre de Newton, l'étude des singularités de l'espace ambiant et de la transformée stricte de la surface, et les propriétés de transversalité constituent le §4. Certains de ces résultats sont facilement généralisables en dimension supérieure à trois. Nous nous sommes bornés à la dimension trois car les énoncés sont plus précis et plus simples.

## 2. Rappels et résultats préliminaires

2.1.—Nous rappelons d'abord, en dimension quelconque, les notations et les définitions de base concernant les plongements toriques et les éventails. La théorie est développée par exemple dans [T-E], [O 1], [O 2], [D] auxquels on pourra se reporter pour plus de détails.

Soit  $L$  un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $d$ . On désigne par *cône convexe rationnel polyédral* ou plus simplement *cône* tout sous-ensemble  $C$  de  $L_{\mathbf{R}} = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  tel qu'il existe une famille finie  $v_i, 1 \leq i \leq p$ , d'éléments de  $L$  telle que :

$$C = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbf{R}, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

On dit que  $C$  est *régulier* s'il peut être engendré par une partie d'une base de  $L$ . La dimension du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel engendré par  $C$  sera appelée la dimension de  $C$ .

Soit  $L^* = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{Z})$  le dual de  $L$ . C'est un  $\mathbf{Z}$ -module libre et  $L_{\mathbf{R}}^* = L^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$

s'identifie naturellement à  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(L_{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$ . Un hyperplan d'appui à  $C$  est l'ensemble des zéros dans  $L_{\mathbf{R}}$  d'une forme linéaire  $l \in L^*$  telle que  $l|_C \geq 0$ . Une face  $F$  de  $C$  est l'intersection de  $C$  avec un hyperplan d'appui; c'est un cône. On dit que  $c \in F$  est dans l'intérieur de  $F$  si  $c$  n'appartient à aucune face stricte de  $F$ .

Soient  $M$  et  $N$  deux  $\mathbf{Z}$ -modules libres de rang  $d$  duaux l'un de l'autre. Un cône  $\sigma$  de  $N_{\mathbf{R}}$  détermine un cône  $\check{\sigma}$  (resp. un sous-espace vectoriel  $\sigma^{\perp}$ ) de  $M_{\mathbf{R}}$  en posant  $\check{\sigma}$  (resp.  $\sigma^{\perp}$ ) =  $\{m \in M_{\mathbf{R}} \mid m|_{\sigma} \geq 0$  (resp.  $= 0\}$ ).

La correspondance  $\sigma \mapsto \check{\sigma}$  établit une bijection des cônes de  $N_{\mathbf{R}}$  dans ceux de  $M_{\mathbf{R}}$  puisque  $\sigma = \{n \in N_{\mathbf{R}} \mid n|_{\check{\sigma}} \geq 0\}$ .

Soit  $k$  un corps,  $k^*$  son groupe multiplicatif.  $T := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, k^*) = N \otimes_{\mathbf{Z}} k^*$  est un tore algébrique sur  $k$  de dimension  $d$ .

$M$  s'identifie aux caractères de  $T$  en faisant correspondre à  $m \in M$  le caractère  $\chi^m : T \rightarrow k^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(m)$ . On a canoniquement  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T) = k[M]$  l'algèbre du groupe  $M$  sur le corps  $k$ .  $N$  s'identifie aux sous-groupes à un paramètre de  $T$  en faisant correspondre à  $n \in N$ ,  $\lambda_n : k^* \rightarrow T$  défini par :

$$\lambda_n(t)(m) = t^{\langle m, n \rangle}, \quad t \in k^*, m \in M.$$

Etant donné un tore algébrique sur  $k$ , une variété torique  $V$  est une variété algébrique contenant  $T$  comme ouvert de Zariski dense et munie d'une action de  $T$ ,  $T \times V \rightarrow V$ , prolongeant  $T \times T \rightarrow T$ . Toutes les variétés toriques que nous considérerons dans la suite seront normales. Soit  $\sigma$  un cône fortement convexe de  $N_{\mathbf{R}}$ , i.e. ne contenant pas de sous-espace vectoriel  $\neq (0)$  de  $N_{\mathbf{R}}$ .  $\check{\sigma}$  est alors un cône de dimension  $d$  de  $M_{\mathbf{R}}$ ,  $\check{\sigma} \cap M$  est un sous-groupe de  $M$  et  $V_{\sigma} = \text{Spec } k[\check{\sigma} \cap M]$  est une variété torique affine normale sur laquelle le tore obtenu précédemment à partir de  $(M, N)$  agit.  $V_{\sigma}$  est non singulière si et seulement si  $\sigma$  est régulier. On sait que si  $n \in N$ ,  $n$  est dans  $\sigma$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n(t) \in V_{\sigma}$ .

En effet l'existence de cette limite équivaut à la possibilité de factoriser par  $k[t]$  le morphisme composé :

$$\Gamma(V_{\sigma}, \mathcal{O}_{V_{\sigma}}) = k[\check{\sigma} \cap M] \hookrightarrow k[M] \rightarrow k[t, t^{-1}]$$

$$\chi^m \mapsto t^{\langle m, n \rangle}.$$

Or il en est ainsi si et seulement si  $\langle m, n \rangle \geq 0, \forall m \in \check{\sigma} \cap M$ . Ceci montre qu'alors  $\lambda_n(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n(t) \in V_{\sigma}$  est donné par le morphisme :

$$k[\check{\sigma} \cap M] \longrightarrow k; \chi^m \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \langle m, n \rangle = 0 \\ 0 & \text{si } \langle m, n \rangle > 0. \end{cases}$$

Il en résulte alors facilement que si  $n_1$  et  $n_2$  appartiennent à l'intérieur d'une même face de  $\sigma$ ,  $\lambda_{n_1}(0) = \lambda_{n_2}(0)$  et que dans toute orbite de  $V_{\sigma}$ , il existe un unique point de la forme  $\lambda_n(0)$ . La correspondance qui, à une face  $\tau$  de  $\sigma$  associe l'orbite  $\mathcal{O}_{\tau}$  de  $\lambda_n(0)$ ,  $n$  étant un point quelconque de  $N$  choisi dans l'intérieur de

cette face, est donc une bijection de l'ensemble des faces de  $\sigma$  dans celui des orbites de  $T$  dans  $V_\sigma$ . On a :  $\dim \tau + \dim \mathbf{O}_\tau = d$  et  $\tau_1 \subset \tau_2$  si et seulement si  $\mathbf{O}_{\tau_2}$  est contenue dans l'adhérence de  $\mathbf{O}_{\tau_1}$ .

2.2.—On considère maintenant une face  $\tau$  de dimension  $d-1$  de  $\sigma$ . On va montrer que  $V_\sigma$  s'identifie au voisinage de  $\mathbf{O}_\tau$  au produit de  $\mathbf{O}_\tau$  par une variété torique affine.

*Notations.*—Soit  $U_\tau = \bigcup_{\tau' \subset \tau} \mathbf{O}_{\tau'}$ . C'est la réunion des orbites de  $T$  dans  $V_\sigma$  qui contiennent  $\mathbf{O}_\tau$  dans leur adhérence.

Soit  $E_\tau$  le sous  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de  $N_{\mathbf{R}}$  engendré par  $\tau$ .  $N_\tau := N \cap E_\tau$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $d-1$ . La suite :

$$0 \longrightarrow N_\tau \longrightarrow N \longrightarrow N/N_\tau \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée car  $N/N_\tau$  étant sans torsion est un  $\mathbf{Z}$ -module libre. Soit  $N^* = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$  (égal à  $M$ ),  $N_\tau^* = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N_\tau, \mathbf{Z})$ . La projection canonique  $\pi : N^* \rightarrow N_\tau^*$  définie par  $\pi(m) = m|_{N_\tau}$  est donc surjective et son noyau  $\text{Ker } \pi$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang un. Dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \pi & \longrightarrow & N^* & \xrightarrow{\pi} & N_\tau^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Ker } \pi)_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & N_{\mathbf{R}}^* & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{R}}} & N_{\tau_{\mathbf{R}}}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

les deux suites horizontales sont exactes et scindées. On constate que  $\tau^\perp = \text{Ker } \pi_{\mathbf{R}} = (\text{Ker } \pi)_{\mathbf{R}}$  et que  $\text{Ker } \pi = \tau^\perp \cap M$ . Or  $\tau$  étant une face de  $\sigma$ , il existe  $m \in M$ ,  $m \neq 0$  tel que  $m|_\sigma \geq 0$  et  $\tau = \{n \in \sigma \mid \langle m, n \rangle = 0\}$ .  $m$  appartient donc à  $\text{Ker } \pi$ . Nous désignerons par  $m_0$  le générateur de  $\text{Ker } \pi$  dont  $m$  est un multiple positif. Ainsi  $m_0 \in \check{\sigma} \cap M$ .

LEMMA 1.— $U_\tau = \text{Spec } k[\check{\sigma} \cap M]_{\chi m_0} = \text{Spec } k[\check{\tau} \cap M]$ .  
Si  $\tau'$  est une face de  $\tau$ ,

$$\overline{\mathbf{O}}_{\tau'} = \text{Spec } k[\tau'^\perp \cap \check{\sigma} \cap M]$$

$$\overline{\mathbf{O}}_{\tau'} \cap U_\tau = \text{Spec } k[\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M].$$

En particulier,  $\overline{\mathbf{O}}_\tau \cap U_\tau = \mathbf{O}_\tau = \text{Spec } k[\tau^\perp \cap M] = \text{Spec } k[\chi^{m_0}, \chi^{-m_0}]$ .

*Démonstration.*—Soit  $\tau''$  une face quelconque de  $\sigma$ . Pour montrer la première égalité, il suffit de montrer que  $\tau'' \subset \tau$  si et seulement si  $\chi^{m_0}$  ne s'annule pas sur  $\mathbf{O}_{\tau''}$ . Or  $n$  étant quelconque dans l'intérieur de  $\tau''$ , il en est ainsi si et seulement si  $\chi^{m_0}(\lambda_n(0)) \neq 0$  donc encore  $\langle m_0, n \rangle = 0$ . Or  $\tau = \{n \in \sigma \mid \langle m_0, n \rangle = 0\}$ .  
 $k[\check{\sigma} \cap M]_{\chi m_0}$  est l'algèbre du semi-groupe engendré par  $\check{\sigma} \cap M$  et  $-m_0$ . Or

$m_0 \in \tau^\perp \cap M \subset \check{\tau} \cap M$  et  $\check{\sigma} \cap M \subset \check{\tau} \cap M$ , puisque  $\tau \subset \sigma$ . C'est donc un sous semi-groupe de  $\check{\tau} \cap M$ . D'autre part, soit  $m \in \check{\tau} \cap M$ . Soit  $n_1, \dots, n_p \in N$  des générateurs de  $\sigma$ . Puisque  $m_0 \in \check{\sigma}$  et  $n_i \in \sigma$ , alors  $\langle m_0, n_i \rangle \geq 0$ . Si  $\langle m_0, n_i \rangle = 0$ , alors  $n_i \in \tau$ , d'où  $\langle m, n_i \rangle \geq 0$ . Par suite, si  $\langle m, n_i \rangle < 0$ , on a  $\langle m_0, n_i \rangle \neq 0$ . Il existe donc un entier  $s$  positif tel que  $\langle m + sm_0, n_i \rangle \geq 0, 1 \leq i \leq p$ , et  $m + sm_0 \in \check{\sigma} \cap M$ .

Soit  $I$  l'idéal de  $k[\check{\sigma} \cap M]$  définissant  $\bar{\mathcal{O}}_{\tau'} \cdot \mathcal{X}^m \in I$  si et seulement si :

$\forall n \in \text{Intérieur } \tau', \mathcal{X}^m(\lambda_n(0)) = 0$  ou  $\langle m, n \rangle > 0$ . Mais pour  $m \in \check{\sigma} \cap M$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\forall n \in \text{Intérieur } \tau', \langle m, n \rangle > 0$
- ii)  $\exists n \in \text{Intérieur } \tau', \langle m, n \rangle > 0$
- iii)  $\exists n \in \tau', \langle m, n \rangle > 0$ .

Par suite,  $k[\check{\sigma} \cap M] = I \oplus k[\tau'^\perp \cap \check{\sigma} \cap M]$ .

L'anneau des fonctions régulières sur  $\bar{\mathcal{O}}_{\tau'} \cap U_\tau$  est le localisé en  $\mathcal{X}^{m_0}$  de  $k[\tau'^\perp \cap \check{\sigma} \cap M]$  donc l'algèbre du semi-groupe engendré par  $\tau'^\perp \cap \check{\sigma} \cap M$  et  $-m_0$ . On vérifie que c'est  $\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M$ . Comme précédemment  $J$  étant l'idéal de  $k[\check{\tau} \cap M]$  définissant  $\bar{\mathcal{O}}_{\tau'} \cap U_\tau$  dans  $U_\tau$ ,  $k[\check{\tau} \cap M] = J \oplus k[\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M]$ .

LEMME 2. Soit  $\alpha$  une section de  $\pi : N^* \rightarrow N_\tau^*$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tau^\perp \cap M & \longrightarrow & N^* = M & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\alpha} \end{array} & N_\tau^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \tau^\perp \cap M & \longrightarrow & \tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M & \longrightarrow & \pi(\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M) & & 
 \end{array}$$

possède les propriétés suivantes :

- i) si  $m_1 \in \tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M$  et  $m_2 \in \tau^\perp \cap M$ , alors  $m_1 + m_2 \in \tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M$
- ii)  $\alpha \circ \pi(\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M) \subset \tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M$
- iii)  $\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M = \alpha \circ \pi(\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M) \oplus \tau^\perp \cap M$
- iv)  $\pi(\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M) = N_\tau^* \cap \pi_R(\tau'^\perp \cap \check{\tau})$ .

$N_\tau^*, N_\tau$  détermine un tore algébrique de dimension  $d-1$ .  $\tau$  qui est un cône fortement convexe de  $(N_\tau)_R$  détermine une variété torique affine  $v_\tau$  de dimension  $d-1$ ,  $\tau'$  qui est une face de  $\tau$  détermine une orbite  $\mathcal{O}_{\tau'}$  du tore dans  $v_\tau$ . L'inclusion  $k[\tau^\perp \cap M] \rightarrow k[\check{\tau} \cap M]$  définit une rétraction  $U_\tau \rightarrow \mathcal{O}_{\tau'}$ .

PROPOSITION.— $\alpha$  détermine un  $\mathcal{O}_{\tau'}$ -isomorphisme équivariant :

$$U_\tau \longrightarrow \mathcal{O}_{\tau'} \times v_\tau$$

identifiant  $\mathcal{O}_{\tau'} \cap U_\tau$  avec  $\mathcal{O}_{\tau'} \times \bar{\mathcal{O}}_{\tau'}$ .

Démonstration.—C'est une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2 après avoir vérifié que  $\pi(\check{\tau} \cap M) = \{m \in N_\tau^* \mid m_{1\tau} \geq 0\}$  et que  $\pi(\tau'^\perp \cap \check{\tau} \cap M) = \{m \in N_{\tau^*} \mid m_{1\tau} \geq 0, m_{1\tau'} = 0\}$ .

2.3.—On appelle *éventail* une famille finie  $\Sigma$  de cônes rationnels fortement convexes de  $N_{\mathbf{R}}$  satisfaisant

- (i) si  $\tau$  est une face d'un cône  $\sigma \in \Sigma$ , alors  $\tau \in \Sigma$
- (ii) si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , alors  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  est une face de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ .

Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , l'inclusion  $k[\check{\sigma} \cap M] \subset k[\check{\tau} \cap M]$  induit l'identification de  $V_{\tau}$  avec un ouvert de  $V_{\sigma}$ . On associe à un éventail  $\Sigma$  la variété algébrique  $V_{\Sigma}$  obtenue en recollant les  $V_{\sigma}$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , par les identifications précédentes. Une *subdivision* de  $\Sigma$  est un éventail  $\Sigma'$  tel que pour chaque  $\sigma' \in \Sigma'$  il existe  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\sigma' \subset \sigma$ , et les *supports*  $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$  et  $|\Sigma'| = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'} \sigma'$  coïncident.

Si  $\Sigma'$  est une subdivision de  $\Sigma$ , il existe un morphisme propre birationnel équivariant  $\pi: V_{\Sigma'} \rightarrow V_{\Sigma}$  induit par les inclusions  $k[\check{\sigma} \cap M] \subset k[\check{\sigma}' \cap M]$  pour  $\sigma' \subset \sigma$ ,  $\sigma' \in \Sigma'$ ,  $\sigma \in \Sigma$ .

La *fibres exceptionnelles*  $E$  de  $\pi$  est le lieu (réduit) dans  $V_{\Sigma'}$  où  $\pi$  n'est pas un isomorphisme.

PROPOSITION.—*La fibres exceptionnelles  $E$  de  $\pi$  est la réunion des orbites  $O_{\sigma'}$  de  $T$  dans  $V_{\Sigma'}$ , pour  $\sigma' \in \Sigma'$  et  $\sigma' \notin \Sigma$ .*

En effet,  $\pi$  est équivariant, donc  $E$  est réunion d'orbites de  $T$  dans  $V_{\Sigma'}$ . Pour chaque  $\sigma' \in \Sigma'$ , notons  $\pi(\sigma')$  le cône de dimension minimum appartenant à  $\Sigma$  tel que  $\sigma' \subset \pi(\sigma')$ ;  $\pi(\sigma')$  est unique car s'il y en a deux, leur intersection appartient à  $\Sigma$  et contient  $\sigma$ , donc la dimension n'était pas minimum. On a  $\pi(O_{\sigma'}) = O_{\pi(\sigma')}$ .

Par suite, si  $\dim \sigma' < \dim \pi(\sigma')$ , alors  $\dim O_{\sigma'} > \dim \pi(O_{\sigma'})$  et  $O_{\sigma'} \subset E$ , d'où  $\overline{O_{\sigma'}} \subset E$  car  $\pi$  est propre. Si  $\sigma' \notin \Sigma$ , alors il existe une face  $\tau'$  de  $\sigma'$  telle que  $\dim \tau' < \dim \pi(\tau')$ , d'où  $O_{\sigma'} \subset \overline{O_{\tau'}} \subset E$ .

Inversement, si  $O_{\sigma'} \subset E$ , alors  $O_{\sigma'}$  est contenue dans une composante irréductible de  $E$  qui est adhérence d'une orbite  $\overline{O_{\tau'}}$ , d'où  $O_{\sigma'} \subset \overline{O_{\tau'}}$  et  $\tau'$  est une face de  $\sigma'$ ; par suite  $\dim \pi(O_{\sigma'}) < \dim O_{\tau'}$ , d'où  $\dim \tau' < \dim \pi(\tau')$  et  $\sigma' \notin \Sigma$ . ■

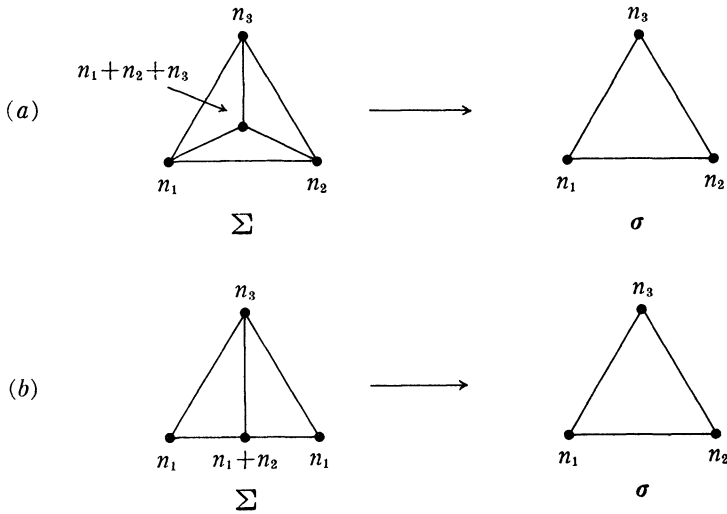
Si  $I$  est un idéal monomial d'une variété torique affine  $V_{\sigma}$ , on a la description suivante de l'*éclatement normalisé* de  $V_{\sigma}$  de centre  $I$  en termes d'une subdivision de l'éventail des faces de  $\sigma$  (noté aussi  $\sigma$  par abus de notation). Soit  $\eta$  un idéal du semi-groupe  $\check{\sigma} \cap M$ , i.e.  $\eta \subset \check{\sigma} \cap M$ , tel que  $\eta + (\check{\sigma} \cap M) \subset \eta$ . Soit  $I = k[\eta]$  l'idéal (monomial) de  $k[\check{\sigma} \cap M]$  associé à  $\eta$ .

Soit  $h_{\eta}: \sigma \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $h_{\eta}(n) = \min\{\langle m, n \rangle \mid m \in \eta\}$ ;  $h_{\eta}$  est continue et linéaire par morceaux.

Soit  $\Sigma$  la subdivision la moins fine de  $\sigma$  telle que la restriction de  $h$  à chaque cône de  $\Sigma$  soit linéaire. Le morphisme canonique  $\pi: V_{\Sigma} \rightarrow V_{\sigma}$  est l'éclatement normalisé de  $V_{\sigma}$  de centre  $I$ .

Par exemple, on peut décrire de cette façon les éclatements des adhérences d'orbites. En particulier, voici la description des subdivisions correspondantes aux éclatements de l'origine ou d'un axe de  $k^3$ , par les dessins (a) et (b) sui-

vants, où on a représenté l'intersection de l'éventail avec une sphère  $S^2$  centrée à l'origine de  $\mathbf{R}^3$  (identifié avec  $N_R$  en ayant choisi une base  $n_1, n_2, n_3$  de  $N$ ).



Un autre exemple d'éclatement normalisé que nous utiliserons dans la suite est celui que l'on peut appeler *éclatement de Newton*; c'est une traduction, en termes d'éclatements normalisés équivariants d'éventails, d'une partie de la construction utilisée pour désingulariser des hypersurfaces ([V], voir aussi [L] et [O 3]). Soit  $\check{\sigma}$  un cône régulier de dimension maximum de  $M_R$  et  $\varepsilon$  un sous-ensemble de  $\check{\sigma} \cap M$ . On peut considérer  $\varepsilon$  comme les exposants d'une famille de monômes de  $k[\check{\sigma} \cap M]$ . On associe à  $\varepsilon$  l'idéal  $\eta$  du semi-groupe  $\check{\sigma} \cap M$  engendré par  $\varepsilon$ , i. e.  $\eta = \varepsilon + (\check{\sigma} \cap M)$ . On appelle éclatement de Newton l'éclatement normalisé de centre l'idéal  $k[\eta]$  de  $k[\check{\sigma} \cap M]$ . En fait la fonction  $h_\eta$  est déterminée par le bord  $\mathcal{N}$  (polyèdre de Newton) de l'enveloppe convexe de  $\eta$  dans  $M_R$ , car on a  $h_\eta(n) = \min\{\langle m, n \rangle, m \in \mathcal{N}\}$ .

**2.4.**—On rappelle la définition des singularités canoniques et terminales ([R]). Soit  $X$  une variété normale quasi-projective de dimension  $d$ ,  $\omega_X$  le bidual du faisceau des  $d$ -différentielles de  $X$ ,  $K_X$  un diviseur (de Weil) tel que  $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ . Si  $rK_X$  est un diviseur de Cartier pour un entier  $r > 0$ , on appelle indice de  $X$  un tel  $r$  qui soit minimum.  $X$  a des singularités *canoniques* (resp. *terminales*), si  $X$  est d'indice fini et si  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  étant une désingularisation de  $X$ , on a  $rK_{\tilde{X}} = \pi^*(rK_X) + \sum a_i E_i$ , avec  $a_i \geq 0$  (resp. avec  $a_i > 0$ ), où  $\{E_i\}$  est la famille des diviseurs irréductibles exceptionnels de  $\pi$ .

En dimension deux, les singularités canoniques sont les points doubles rationnels, et terminal implique lisse (Duval).

Une variété torique affine  $V_\sigma$  associée à un cône fortement convexe  $\sigma \in N_R$

est d'indice  $r$  s'il existe  $m \in M$  et un entier  $r > 0$  tels que  $\langle m, n_i \rangle = r$  pour les points primitifs  $n_i \in N$  des faces de dimension un de  $\sigma$ ,  $1 \leq i \leq s$ ; et  $V_\sigma$  est canonique (resp. terminale) si de plus on a  $\langle m, n \rangle \geq r$  pour tout  $n \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$  (resp. si de plus  $\langle m, n \rangle > r$  pour tout  $n \in \sigma \cap N \setminus \{0, n_1, \dots, n_s\}$ ).

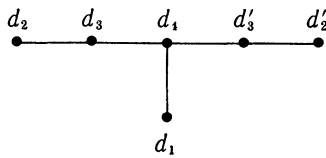
On dit qu'un cône  $\sigma$  est canonique (resp. terminal) si  $V_\sigma$  est canonique (resp. terminal).

Les singularités toriques canoniques de surfaces sont celles de type  $A_n$ , i.e. telles que la fibre exceptionnelle de la désingularisation minimale est une chaîne de courbes rationnelles lisses avec auto-intersections  $-2$ .

On dit qu'une subdivision  $\Sigma'$  d'un éventail  $\Sigma$  est canonique (resp. terminale) si tout  $\sigma' \in \Sigma'$  est canonique (resp. terminal). Etant donné un cône fortement convexe  $\sigma$ , on appelle *subdivision canonique minimale* celle induite par les faces du bord de l'enveloppe convexe de  $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ , que l'on notera  $\Sigma_c$ ; chaque cône de dimension positive de  $\Sigma_c$  est la réunion des demi-droites de  $N_R$  d'origine  $O$  qui portent les points d'une face de ce bord.

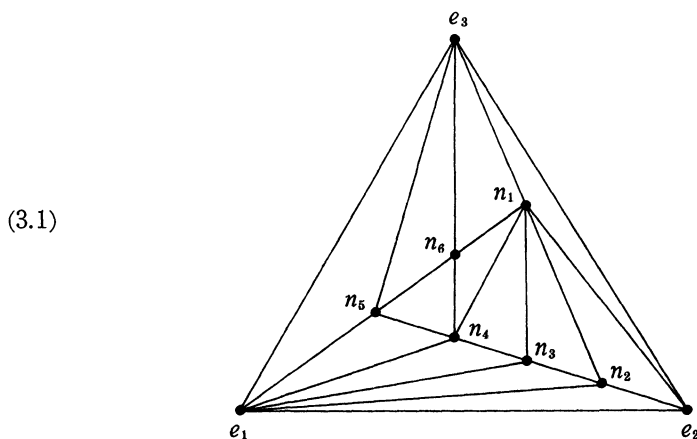
### 3. Example

Soit  $S$  l'hypersurface de  $V = k^3$  d'équation  $X^2 + Y^3 + Z^4 = 0$ . Le graphe dual de la désingularisation minimale de  $S$  est  $E_c$ :



Chaque sommet représente une composante irréductible (courbe rationnelle lisse) de la fibre exceptionnelle, et chaque arête un point d'intersection des composantes correspondant aux extrémités. Cette désingularisation est obtenue par quatre éclatements de points et les indices indiquent l'ordre d'apparition des composantes; on obtient successivement des singularités de type  $A_5$ ,  $A_3$  et  $A_1$ . Pour obtenir une désingularisation plongée à partir de cette désingularisation de  $S$  il faut éclater la courbe  $d_1$  deux fois dans la variété ambiante de dimension trois [G]. On peut représenter la variété ambiante obtenue par ces éclatements par un éventail, car en ce cas ce sont des éclatements d'adhérences d'orbites du tore standard  $k^{*3}$ .



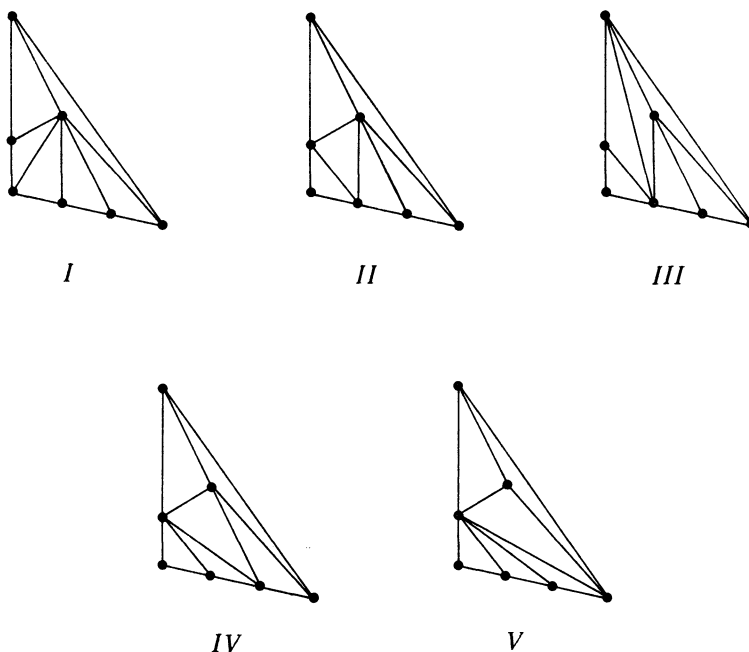


(Le diagramme est déformé mais respecte les alignements des sommets). Les quatre éclatements de points donnent lieu à des subdivisions de type (a), les deux derniers à celles de type (b) de 2.3. Les sommets sont:  $e_1=(1, 0, 0)$ ,  $e_2=(0, 1, 0)$ ,  $e_3=(0, 0, 1)$ ,  $n_1=(1, 1, 1)$ ,  $n_2=(2, 2, 1)$ ,  $n_3=(4, 3, 2)$ ,  $n_4=(6, 4, 3)$ ,  $n_5=(2, 1, 1)$ ,  $n_6=(3, 2, 2)$ .

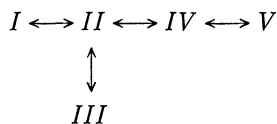
Cette désingularisation plongée de  $S$  est obtenue en suivant la méthode de Hironaka. Elle peut être obtenue aussi par la méthode de Hovansky et Varchenko.

Si on fait l'éclatement de Newton on obtient la subdivision  $\Sigma_{\mathcal{N}}$  où le seul sommet ajouté dans l'intersection avec la sphère est  $n_4$ , car l'équation de  $S$  est quasi-homogène de poids les coordonnées de  $n_4$ .

Soient  $\sigma_1=\langle n_4, e_2, e_3 \rangle$ ,  $\sigma_2=\langle n_4, e_1, e_3 \rangle$ ,  $\sigma_3=\langle n_4, e_1, e_2 \rangle$  les trois cônes de dimension maximum de  $\Sigma_{\mathcal{N}}$ . Pour  $\sigma_2$  (resp. pour  $\sigma_3$ ) il existe une seule subdivision terminale minimale qui est en fait régulière; c'est celle indiquée dans (3.1). Mais pour  $\sigma_1$  il y a cinq subdivisions terminales minimales, qui sont toutes régulières:



Ces cinq subdivisions régulières de  $\sigma_1$  sont reliées par des flips symétriques (ou flops, voir des références dans [M]), représentés par le diagramme suivant :



La subdivision  $I$  de  $\sigma_1$  avec celles de  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  donnent l'éventail représenté en (3.1).

Toutes ces désingularisations plongées de  $E_6$  sont minimales car on ne peut pas contracter un diviseur exceptionnel sans détruire la lissité de l'espace ambiant, ou celle de la surface, ou les croisements normaux.

La variété obtenue par l'éclatement de Newton est canonique (ainsi que la transformée stricte de la surface) et elle est dominée par les cinq désingularisations plongées minimales. C'est un modèle canonique plongé au sens du paragraphe suivant.

**4. Modèles canoniques plongés**

Soit  $M = \mathbb{Z}^3$  muni de sa base standard  $e_1, e_2, e_3$ . On identifie  $M$  avec son dual  $N$  par la forme bilinéaire standard  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ . Si  $\Delta := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

est le cône simplicial standard de  $\mathbf{R}^3$  et par extension l'éventail associé, on a  $V := V_{\mathcal{A}} = k^3$ . Soit  $S$  une hypersurface de  $V$ , ayant en 0 une singularité isolée,  $f = \sum_{r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} c_r x^r \in k[x_1, x_2, x_3]$  une équation de  $S$ . La construction qui suit s'étend au cadre formel ou analytique complexe. Soient  $\varepsilon(f) := \{r \mid c_r \neq 0\}$  et  $\Gamma_+(f)$  l'enveloppe convexe de  $\{r + \mathbf{R}_{\geq 0}^3 \mid r \in \varepsilon(f)\}$ . Si  $a \in \mathbf{N}^3$ , on désigne par  $\gamma(a)$  la face de  $\Gamma_+(f)$  contenue dans l'hyperplan d'appui à  $\Gamma_+(f)$  d'équation  $\langle r, a \rangle = h(a)$ . Elle est compacte. Soient  $\Sigma_{\eta}$  la subdivision de  $\mathcal{A}$  correspondant à l'éclatement de Newton de centre l'idéal  $I(f)$  associé à  $\varepsilon(f)$  (2.3),  $\Sigma_C$  la subdivision canonique minimale de  $\Sigma_{\eta}$ . Enfin, soit  $\pi: \hat{V} = V_{\Sigma_C} \rightarrow V$ .

On a la proposition suivante sur les singularités de l'espace ambiant  $\hat{V}$  et sur la fibre exceptionnelle du morphisme  $\pi$ :

PROPOSITION.—*Soit  $E$  la fibre exceptionnelle de  $\pi$ . Si  $I(f)$  est  $m$ -primaire où  $m = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $E = \pi^{-1}(0)$ .*

1)  *$\hat{V}$  n'a que des singularités canoniques.*

*Soient  $O_i$ ,  $i=0, 1$  la réunion des orbites de dimension  $i$  de  $T$  contenues dans le lieu singulier  $\text{Sing } \hat{V}$  de  $\hat{V}$ .*

$$\text{Sing } \hat{V} = O_0 \cup O_1 \subset E.$$

*Soit  $L$  une orbite de dimension un contenue dans  $O_1$ ,  $\hat{V}_L$  l'ouvert affine de  $\hat{V}$  réunion des orbites qui contiennent  $L$  dans leur adhérence. Il existe  $n \geq 1$  et un isomorphisme équivariant:*

$$\hat{V}_L \xrightarrow{\sim} L \times A_n.$$

2) *Soit  $D$  une composante irréductible de  $E$ .  $\text{Sing } D \subset O_0$ . Si  $L$  est contenue dans  $D$  et si  $D_L$  désigne la trace de  $D$  sur  $\hat{V}_L$ , l'isomorphisme ci-dessus induit un isomorphisme:*

$$D_L \xrightarrow{\sim} L \times k.$$

*$L$  est contenue dans au plus deux composantes irréductibles de  $E$  ayant le long de  $L$  des plans tangents distincts.*

*Démonstration.*—Tout d'abord,  $I(f)$  est  $m$ -primaire si et seulement si aucune arête de  $\Sigma_{\eta}$  n'est contenue dans l'intérieur d'une face de dimension deux de  $\mathcal{A}$ .  $\Sigma_C$  possède alors la même propriété et  $E = \pi^{-1}(0)$  (2.3).

$\text{Sing } \hat{V}$  est une réunion d'orbites de dimension zéro ou un, puisque  $\hat{V}$  est normal.

$L$  est associée à un cône de dimension deux  $\tau$  de  $\Sigma_C$ ,  $D_L$  est l'adhérence d'une orbite de dimension deux associée à une arête  $a$  de  $\tau$ . Nous avons construit un isomorphisme équivariant:  $\hat{V}_L \xrightarrow{\sim} L \times v_{\tau}$  envoyant  $D_L$  sur  $L \times \bar{o}_a$  (2.2).  $\tau$  est canonique,  $v_{\tau}$  est donc un  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\bar{o}_a$  est l'adhérence de l'une des deux orbites de dimension un du tore dans  $v_{\tau}$ , donc la droite affine. ■

Rappelons ([V]) qu'on dit que  $f$  est *non-dégénérée* (relativement à son polyè-

dre de Newton) si pour toute face compacte  $\gamma$  de  $\Gamma_+(f)$ , le lieu singulier de la surface d'équation :

$$f_\gamma = \sum_{r \in \gamma} c_r x^r$$

ne rencontre pas le tore  $k^{*3}$  de  $k^3$ .

On va voir que cette hypothèse est nécessaire pour obtenir la transversalité de la transformée stricte  $\hat{S}$  de  $S$  dans  $\hat{V}$  avec  $E$ .

On a le théorème suivant sur les singularités de  $\hat{S}$  et sur ses propriétés de transversalité et de minimalité :

THÉORÈME.—*On suppose que  $I(f)$  est  $m$ -primaire et que  $f$  est non dégénérée. Soit  $O_{1\mathfrak{m}}$  la réunion des orbites de dimension un de  $T$  dans  $\hat{V}$  contenues dans  $\text{Sing } \hat{V}$  et dont l'image dans  $V_{\Sigma\mathfrak{m}}$  est de dimension un. On a les propriétés suivantes.*

1)  $\hat{S}$  n' a que des singularités canoniques, des  $A_n$ , et  $\text{Sing } \hat{S} \subset O_{1\mathfrak{m}}$ .

2) Soit  $\hat{O} \in E \cap \hat{S}$ . Alors  $\hat{O}$  est contenu dans une ou deux composantes irréductibles de  $E$ . Elles sont non singulières en  $\hat{O}$ .

(a) Si  $\hat{O} \notin \text{Sing } \hat{S}$ , alors  $\hat{O} \notin \text{Sing } \hat{V}$  et  $\pi^{-1}(S)$  est un diviseur à croisements normaux en  $\hat{O}$ .

(b) Si  $\hat{O} \in \text{Sing } \hat{S}$ , alors  $\hat{O}$  est un point non singulier de  $\text{Sing } \hat{V}$ . Les composantes irréductibles de  $E$  passant par  $\hat{O}$  contiennent localement  $\text{Sing } \hat{V}$ . S'il y en a deux,  $\text{Sing } \hat{V}$  est leur intersection et elles ont des plans tangents distincts. Soit  $D$  l'une d'elles.

Alors  $\hat{S}$  intersecte transversalement  $\text{Sing } \hat{V}$  et  $D$  en  $\hat{O}$ . Précisément, au voisinage de  $\hat{O}$ ,  $\hat{S} \cap \text{Sing } \hat{V}$  est schématiquement le point  $\hat{O}$  avec sa structure réduite et  $\hat{S} \cap D$  est une courbe non singulière.

$C$  et  $T$  désignant respectivement le cône tangent ou l'espace tangent à l'espace indiqué, on a :

$$T_{\hat{S} \cap D, \hat{O}} = C_{\hat{S}, \hat{O}} \cap T_{D, \hat{O}}.$$

3)  $\hat{V}$  a la propriété de minimalité suivante si  $V'$  est une variété torique n'ayant que des singularités canoniques telle que  $\hat{V} \rightarrow V' \rightarrow V_{\Sigma\mathfrak{m}}$  où les morphismes sont propres et équivariants, alors  $\hat{V} = V'$ .

On appelle  $\hat{S} \hookrightarrow \hat{V}$  le modèle canonique minimal plongé de  $S \hookrightarrow V$ .

On explique d'abord le plan de la démonstration.

La fibre exceptionnelle  $E$  étant une réunion d'orbites, on regardera l'intersection de  $\hat{S}$  avec chacune d'elles. Dans (i), on montre que  $\hat{S}$  ne contient aucune orbite de dimension 0. Les équations des intersections de  $\hat{S}$  avec les autres orbites sont déterminées dans (ii). Dans (iii), d'une part on étudie les intersections de  $\hat{S}$  avec les autres orbites, en utilisant (ii); d'autre part, on obtient la transversalité de ces intersections en utilisant l'hypothèse de non dégénérescence. On explique dans (iv) comment les résultats ci-dessus et ceux de la proposition impliquent 1) et 2) de l'énoncé du théorème. Enfin dans (v), on démontre l'assertion 3).

*Démonstration.*—L'idéal  $I(f)$  étant  $\mathfrak{m}$ -primaire,  $E = \pi^{-1}(O)$  est le réduit sous-jacent au diviseur de Cartier  $E(f)$  de  $\hat{V}$  tel que  $I(f)\mathcal{O}_{\hat{V}} = \mathcal{O}_{\hat{V}}(-E(f))$ . En dehors de  $E$ ,  $\hat{S}$  est non singulière.

(i)  $\hat{S}$  évite toutes les orbites de dimension zéro de  $T$  dans  $\hat{V}$  :

Soit  $\hat{O}$  l'une d'elles et  $\sigma$  le cône de dimension trois de  $\Sigma_C$  lui correspondant. Si  $\hat{O}$  était dans  $\hat{S}$ , on pourrait construire un germe de courbe formelle  $\tilde{h} : (k, 0) \rightarrow (\hat{V}_\sigma, \hat{O})$  tracée sur  $\hat{S}$ , *i.e.* un  $k$ -morphisme local :

$$\theta : k[\check{\sigma} \cap \mathbf{Z}^3] = k[\hat{V}_\sigma] \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{V}_\sigma, \hat{O}} \longrightarrow k[[t]]$$

se factorisant par  $\mathcal{O}_{\hat{S}, \hat{O}}$ .

Soit  $h := \pi_\sigma \circ \tilde{h} : (k, 0) \rightarrow (V, O)$ . Ce serait un germe de courbe tracée sur  $S$ . On peut supposer qu'il n'est contenu dans aucun hyperplan de coordonnées. On a alors  $x_i \circ h = u_i(t)t^{a_i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  où  $u_i(0) \neq 0$  et  $a_i \in \mathbf{N}$ . Soit  $a = (a_1, a_2, a_3)$  et soit  $r \in \check{\sigma} \cap \mathbf{Z}^3$ . Puisque  $\theta(x^r) = u^r t^{\langle r, a \rangle} \in k[[t]]$ , c'est que  $\langle r, a \rangle \geq 0$ , donc que  $a \in \sigma$ . D'autre part,  $K := (x^r)_{r \in \check{\sigma} \cap \mathbf{Z}^3 - 0}$  est l'idéal qui définit  $\hat{O}$  dans  $\hat{V}_\sigma$ . Comme  $\theta(K) \subset (t)k[[t]]$ , pour tout  $r \in \check{\sigma} \cap \mathbf{Z}^3$ ,  $r \neq 0$ ,  $\langle r, a \rangle > 0$ .  $a$  est donc dans l'intérieur de  $\sigma$  et a fortiori dans l'intérieur du cône de dimension minimum de  $\Sigma_\eta$  contenant  $\sigma$ .  $\gamma(a)$  contient alors un seul point  $r_0$ .

$$f(h(t)) = \sum_{r \in \check{\sigma}(f)} c_r u^r t^{\langle r, a \rangle} = c_{r_0} u(0)^r t^{h(a)} \pmod{(t)^{h(a)+1}}$$

n'est pas identiquement nulle.

(ii) Il suffit donc de déterminer la trace de  $\hat{S}$  sur les ouverts affines  $U_\tau$  de  $\hat{V}$ ,  $\tau$  parcourant l'ensemble des cônes de dimension deux de  $\Sigma_C$  qui ne sont pas des faces de  $\mathcal{A}$ . Soient  $a_1, a_2$  les arêtes d'un tel cône.  $\gamma(a)$  ne dépend pas de  $a$  choisi à l'intérieur de  $\tau$ ; nous désignerons par  $\gamma(\tau)$  cette face de  $\Gamma_+(f)$ . Elle est compacte. On a :

$$\gamma(\tau) = \gamma(a_1) \cap \gamma(a_2).$$

Choisissons  $r_0 \in \gamma(\tau) \cap \varepsilon(f)$

$$I(f)\mathcal{O}_{\hat{V}|U_\tau} = I(f)k[\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3] = (x^{r_0})k[\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3].$$

En effet,  $\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3 = \{r \in \mathbf{Z}^3 \mid \langle r, a_i \rangle \geq 0, i=1, 2\}$ . Si  $r \in \varepsilon(f)$ ,  $\langle r, a_i \rangle \geq h(a_i) = \langle r_0, a_i \rangle$ ,  $i=1, 2$ . Donc  $r - r_0 \in k[\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3]$  et  $x^r = x^{r_0} x^{r-r_0}$ .

Soit  $\hat{f} := \sum_{r \in \varepsilon(f)} c_r x^{r-r_0}$ . On a, dans  $k[\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3]$ ,  $f = x^{r_0} \hat{f}$ .

On a vu (2.2) que  $O_\tau = \text{Spec } k[\tau^\perp \cap \mathbf{Z}^3]$ . Soit  $r \in \varepsilon(f)$ ;  $r \in \gamma(\tau)$  si et seulement si,  $a \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3$  étant dans l'intérieur de  $\tau$ ,  $\langle r, a \rangle = h(a) = \langle r_0, a \rangle$ .

La projection  $k[\check{\tau} \cap \mathbf{Z}^3] \rightarrow k[\tau^\perp \cap \mathbf{Z}^3]$  envoie donc  $\hat{f}$  sur  $\hat{f}_\tau := \sum_{r \in \gamma(\tau)} c_r x^{r-r_0}$ .

Puisque  $c_{r_0} \neq 0$ ,  $O_\tau$  n'est pas contenue dans la variété des zéros de  $\hat{f}$  dans  $U_\tau$ . Or  $O_\tau \subset E$  (2.3).  $\hat{f}$  est donc l'équation de la trace de  $\hat{S}$  sur  $U_\tau$ ,  $\hat{f}_\tau$  l'équation de l'intersection schématique de  $\hat{S}$  avec  $O_\tau$ .

Soit  $D_{a_i} = \overline{O}_{a_i}$ ,  $i=1, 2$ . C'est une composant irréductible de  $E$  si et seulement si  $a_i$  n'est pas une arête de  $\Delta$  et alors  $\gamma(a_i)$  est compacte. On a vu (2.2) que  $D_{a_i} \cap U_\tau = \text{Spec } k[a_i^\perp \cap \check{\tau} \cap Z^3]$ .  $r \in \gamma(a_i)$  si et seulement si,  $\langle r, a_i \rangle = h(a_i) = \langle r_0, a_i \rangle$ .

La projection  $k[\check{\tau} \cap Z^3] \rightarrow k[a_i^\perp \cap \check{\tau} \cap Z^3]$  envoie donc  $\hat{f}$  sur  $\hat{f}_{a_i} := \sum_{r \in \gamma(a_i)} c_r x^{r-r_0}$ .

C'est l'équation de l'intersection schématique de  $\hat{S}$  avec  $D_{a_i} \cap U_\tau = O_\tau \cup O_{a_i}$ .

Or, le morphisme  $k^{*3} \rightarrow \text{Spec } k[a_i^\perp \cap Z^3] = O_{a_i}$  induit par l'inclusion  $k[a_i^\perp \cap Z^3] \rightarrow k[Z^3]$  est la projection de  $k^{*3}$  sur son quotient par l'action de  $k^*$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda^{a_i} x$ . L'intersection schématique de  $\hat{S}$  avec  $O_{a_i}$  est donc isomorphe au quotient par l'action de  $k^*$  ci-dessus, de la trace sur  $k^{*3}$  de la surface d'équation  $f_{\gamma(a_i)}$ .

(iii) Soit  $\delta$  la dimension du plus petit cône  $\bar{\sigma}$  de  $\Sigma_{\mathfrak{M}}$  contenant  $\tau$ , une face exceptionnelle de dimension 2.

Si  $\delta=3$ , l'intérieur de  $\tau$  est inclus dans l'intérieur de  $\bar{\sigma}$ . Par suite,  $\gamma(\tau)$  contient un seul élément  $r_0$ , donc  $\hat{f}_\tau = c_{r_0} \neq 0$ , ce qui veut dire que  $\hat{S}$  ne rencontre pas  $O_\tau$ . Puisque  $D_{a_i} \cap U_\tau = O_{a_i} \cup O_\tau$ , on a  $\hat{S} \cap D_{a_i} \cap U_\tau \subset O_{a_i}$ .

Si  $a_i \notin \Delta$ , alors  $O_{a_i} \subset E$ . Si  $\hat{O} \in \hat{S} \cap O_{a_i}$ ,  $\hat{V}$  et  $D_{a_i}$  sont non singuliers en  $\hat{O}$ . Mais la surface d'équation  $f_{\gamma(a_i)}$  n'a pas de singularités dans  $k^{*3}$  et elle est stable par l'action de  $k^*$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda^{a_i} x$ . L'intersection schématique de  $\hat{S}$  avec  $O_{a_i}$  est donc une courbe non singulière. Par suite  $\hat{S}$  est non singulière en  $\hat{O}$ , transverse à  $O_{a_i}$ , i.e.  $\pi^{-1}(S)$  est un diviseur à croisements normaux dans  $\hat{V}$  en  $\hat{O}$ .

Si  $\delta=2$ ,  $\gamma(\tau)$  est une arête compacte de  $\Gamma_+(f)$ . Mais la surface d'équation  $f_{\gamma(\tau)}$  n'a pas de singularités dans  $k^{*3}$ . Elle est stable par l'action de  $k^* \times k^*$   $(\lambda_1, \lambda_2, x) \rightarrow \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} x$ . Le morphisme  $k^{*3} \rightarrow \text{Spec } k[\tau^\perp \cap Z^3] = O_\tau$  induit par l'inclusion  $k[\tau^\perp \cap Z^3] \rightarrow k[Z^3]$  est la projection de  $k^{*3}$  sur son quotient par cette action. L'intersection schématique de  $\hat{S}$  avec  $O_\tau$  est donc un ensemble fini de points simples de  $O_\tau$  (exactement la longueur de  $\gamma(\tau)$ , le vecteur unitaire sur  $\tau^\perp$  étant  $m_0$  tel que  $k[\tau^\perp \cap Z^3] = k[m_0 Z]$ ). Soit  $\hat{O}$  un de ces points. Le morphisme  $\mathcal{O}_{U_\tau, \hat{\sigma}} \rightarrow \mathcal{O}_{O_\tau, \hat{\sigma}}$  envoie  $\hat{f}$  sur un générateur  $u$  de l'idéal maximal. On peut alors identifier  $\hat{\mathcal{O}}_{O_\tau, \hat{\sigma}}$  le complété de  $\mathcal{O}_{O_\tau, \hat{\sigma}}$  pour la topologie définie par son idéal maximal à  $k[[u]]$ , l'anneau des séries formelles en la variable  $u$ . Le  $O_\tau$ -isomorphisme:  $U_\tau \rightarrow O_\tau \times v_\tau$  de 2.2 induit alors un isomorphisme:

$$\hat{\mathcal{O}}_{U_\tau, \hat{\sigma}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{v_\tau, 0}[[u]]$$

où 0 est l'orbite fermée de  $v_\tau$  et  $\hat{\phantom{x}}$  signifie le complété de l'anneau local concerné, isomorphisme qui envoie  $\hat{f}$  sur  $\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n u^n$  tel que  $h_n(0) = h_n \bmod \hat{m}_{v_\tau, 0} = 0$  si  $n \neq 1$ ,  $h_1(0) = 1$ . Le théorème de préparation de Weierstrass [B] permet de réécrire, à une unité près, cette série sous la forme  $u - g$  où  $g \in \hat{m}_{v_\tau, 0}$ .  $\hat{\mathcal{O}}_{\hat{S}, \hat{\sigma}}$  est donc isomorphe à  $\hat{\mathcal{O}}_{v_\tau, 0}[[u]] / (u - g) \cong \hat{\mathcal{O}}_{v_\tau, 0}$ . Puisque  $\tau$  est canonique,  $\hat{S}$  a en  $\hat{O}$  une singularité de type  $A_n$ . (Il se peut que  $\tau$  soit régulier,  $\hat{V}$  et  $\hat{S}$  sont alors non singuliers en  $\hat{O}$ ).

Examinons maintenant les propriétés d'incidence de  $\hat{S}$  et  $D_{a_i}$  supposé con-

tenu dans  $E$ . Puisque  $\hat{S} \cap \mathcal{O}_\tau$  est non singulier en  $\hat{O}$ , a fortiori  $\hat{S} \cap D_{a_i}$  est non singulier en  $\hat{O}$ . On a, de plus, (schématiquement):

$$T_{\hat{S} \cap D_{a_i}, \hat{O}} = C_{\hat{S}, \hat{O}} \cap T_{D_{a_i}, \hat{O}}.$$

Il suffit en effet de vérifier que  $C_{\hat{S}, \hat{O}} \cap T_{D_{a_i}, \hat{O}}$  est une droite. Or dans  $C_{\hat{V}, \hat{O}} \cong T_{\mathcal{O}_\tau, \hat{O}} \times C_{v_\tau, 0}$ ,  $C_{\hat{S}, \hat{O}}$  est défini par l'équation  $u - g \bmod \hat{m}_{v_\tau, 0}^2$  et  $T_{D_{a_i}, \hat{O}} \cong T_{\mathcal{O}_\tau, \hat{O}} \times T_{\bar{O}_{a_i}, 0}$  par un idéal de formes indépendantes de  $u$ .

Si  $\tau$  est régulier,  $\pi^{-1}(S)$  est encore un diviseur à croisements normaux dans  $\hat{V}$  en  $\hat{O}$ .

(iv) La discussion précédente (iii) a montré que  $\hat{S}$  n'a que des singularités canoniques, des  $A_n$ , et que  $\text{Sing } \hat{S} \subset \mathcal{O}_{1\eta}$ , d'où 1).

La première remarque de 2) résulte de la proposition précédente.

Démontrons 2) (a). Si  $\hat{O}$  est un point singulier de  $\hat{V}$  appartenant à  $\hat{S}$ , alors  $\hat{O}$  est dans le cas  $\delta=2$  discuté en (iii). En effet,  $\hat{S}$  évite les orbites de dimension 0, par (i), et on ne peut pas avoir  $\delta=3$ , par (iii). Or, si  $\delta=2$ , on a un isomorphisme  $\hat{V} \cong k \times \hat{S}$  au voisinage de  $\hat{O}$ , par (iii), et par suite  $\hat{O}$  est un point singulier de  $\hat{S}$ . D'où l'implication  $\hat{O} \notin \text{Sing } \hat{S} \Rightarrow \hat{O} \notin \text{Sing } \hat{V}$ . La propriété des croisements normaux est démontrée dans (iii).

Finalement, les premières assertions de 2) b) résultent immédiatement de de l'inclusion  $\text{Sing } \hat{S} \subset \mathcal{O}_{1\eta}$ , et de la description des singularités de l'espace ambiant  $\hat{V}$  donnée dans la proposition; les suivantes sont dans (iii),

(v) Par construction de  $\Sigma_c$ , si  $\sigma'$  est un cône convexe qui est égal à une réunion de plusieurs cônes  $\hat{\sigma} \in \Sigma_c$ , avec  $\dim \hat{\sigma} = \dim \sigma'$ , alors  $\sigma'$  n'est pas canonique. Par suite, si  $\Sigma'$  est une subdivision canonique de  $\Sigma_\eta$  qui admet  $\Sigma_c$  comme subdivision, alors tout  $\sigma'$  qui appartient à  $\Sigma'$  appartient aussi à  $\Sigma_c$ , d'où l'égalité  $\Sigma' = \Sigma_c$ .

*Remarques.*—a) Les points 1) et 2) de la démonstration restent valables si  $\Sigma'$  est une subdivision canonique quelconque de  $\Sigma_\eta$ . A l'exception de la propriété de minimalité 3) le théorème reste donc valable pour  $S' \subset V_{\Sigma'}$ , où  $S'$  est la transformée stricte de  $S$ .  $S' \subset V_{\Sigma'}$  est un *modèle canonique plongé* de  $S \subset V$ .

b) Dans 2) b) l'hypothèse de canonicité n'est utilisée que pour déduire que  $\hat{S}$  a des singularités canoniques. En particulier, la transformée stricte de  $S$  dans  $V_{\Sigma_\eta}$  a des singularités toriques. (cf. [L] et [O 3], théorème 6.1).

c) On a une caractérisation des orbites de  $\hat{V}$  qui rencontrent la surfaces  $\hat{S}$ : en utilisant l'expression de l'équation  $\hat{f}$  de  $\hat{S}$  (voir (ii) de la démonstration du théorème), on voit que l'orbite  $\mathcal{O}_\tau$  associée à un cône  $\tau$  de l'éventail canonique  $\Sigma_c$  rencontre  $\hat{S}$ , si et seulement si

(i) la dimension de  $\tau$  est au plus 2

(ii) la dimension du plus petit cône de l'éventail de Newton  $\Sigma_\eta$  contenant  $\tau$ , est au plus 2.

Ces orbites sont donc, celles qui ne se contractent pas en un point de  $V_{\Sigma\eta}$ . L'ensemble des cônes de  $\Sigma_c$  ayant les propriétés (i) et (ii) est un éventail. La variété définie par cet éventail s'identifie naturellement à l'ouvert de  $\hat{V}$  obtenue en lui enlevant toutes les orbites qui ne rencontrent pas  $\hat{S}$ .

## RÉFÉRENCES

- [B] BOURBAKI, N., Algèbre commutative, chap. 7.
- [D] DANILOV V.I., The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys, **33** (1978), 97-154; Uspeki Mat. Nauk, **33** (1978), 85-134.
- [G] GONZÁLEZ-SPRINGER, G., Quelques descriptions de désingularisations plongées de surface, Prépublication de l'Institut Fourier n°123.
- [L] LEJEUNE-JALABERT, M., Désingularisation explicite des surfaces quasi-homogènes dans  $\mathbb{C}^3$ , Nova acta Leopoldina NF 52 Nr., **240** (1980), 139-160.
- [M] MORI, S., Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, Journal of the A.M.S., **1**, n°1 (1988), 117-253.
- [O1] ODA, T., Lectures on Torus Embeddings and Applications, Tata Inst. of Fund. Research, **58**, Springer, 1978.
- [O2] ODA, T., Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math., **15**, Springer Verlag, 1988.
- [O3] OKA, M., On the resolution of the hypersurface singularities in Complex Analytic Singularities, Adv. Studies in Pure Math., **8** (1986), 405-436.
- [R] REID, M., Canonical 3-folds, Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (1979), Noordhoff (1980), 273-310.
- [T-E] KEMPF, G., KNUDSEN, F., MUMFORD, D. AND SAINT DONAT, B., Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Mathematics, **339**, Springer, 1973.
- [V] VARCHENKO, A.N., Zeta function of monodromy and Newton's diagram, Invent. Math., **37** (1976), 253-262.

INSTITUT FOURIER  
 LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ASSOCIÉ AU C.N.R.S.  
 UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I  
 B.P. 74  
 38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX  
 (FRANCE)