Sur le développement d'une courbe dans un espace à connexion projective

Par

Jōyō Kanitani

(Reçu, le 15, Décembre, 1949)

I. Soit R un espace à connexion projective $\Gamma_{\beta i}^{\alpha} dx^{\beta}$ ($\alpha, \beta=0, 1, \dots, n$; $\Gamma_{0i}^{\alpha} = \delta_i^{\alpha}$ ($i=1, \dots, n$); $\Gamma_{ii}^i = 0$). Considérons un point x^i de R . Menons par ce point une courbe C définie par $\xi^j = \varphi^j(t)$. Prenons sur C un point $x^i + \Delta x^i$ voisin de x^i . Supposons que $x^i = \varphi^i(0)$, $x^i + \Delta x^i = \varphi^i(h)$. Posons

$$\frac{d^{\alpha} \varphi^i}{dt^{\alpha}} = \varphi^{(\alpha)i}.$$

Soient $[A, A_1, \dots, A_n]$, $[A', A'_1, \dots, A'_n]$ les repères associés respectivement au point x^i et au point $x^i + \Delta x^i$. Nous démontrons d'abord que

$$\begin{aligned} A'_{\alpha} = A_{\alpha} & \left[\delta_{\alpha}^{\alpha} + D_i \delta_{(\alpha)}^{\alpha} \Delta x^i + \frac{1}{2!} D_j D_{(i)} \delta_{(\alpha)}^{\alpha} \Delta x^i \Delta x^j + \dots \right. \\ & + \frac{1}{p!} D_{i_p} D_{(i_{p-1})} \dots D_{(i_1)} \delta_{(\alpha)}^{\alpha} \Delta x^{i_1} \Delta x^{i_2} \dots \Delta x^{i_p} + \dots \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} R_{\alpha i_j}^{\alpha} \varphi_m^{i_j} \\ & + \sum_{m=4}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \left\{ D_j R_{(\alpha); (i) (k)}^{\alpha} (\varphi_m^{i; k/j} + \varphi_m^{ij; k}) \right. \\ & \quad \left. + 2R_{\beta j k}^{\alpha} D_i \delta_{(\alpha)}^{\beta} \varphi_m^{ij; k} \right\} \\ & + \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{p-1} \sum_{k=\tau+1}^p \frac{\tau h^m}{m!} D_{i_{p-1}} D_{(i_{p-1})} \dots D_{(i_{\tau+1})} \\ & \quad R_{\beta (i_{\tau}) (i_p)}^{\alpha} D_{(i_{\tau-1})} \dots D_{(i_1)} \delta_{(\alpha)}^{\beta} \\ & \quad \times \varphi^{i_1 \dots i_{k-1}; i_p / i_k \dots i_{p-1}} \\ & + \dots \end{aligned}$$

où (i), par exemple, désigne que la défférentiation absolue n'est pas effectuée par rapport à i, et

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \varphi_m^{i_1 \dots i_{k-1}; i_k / i_{k+1} \dots i_p} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{a_1=1}^{m-p+1} \sum_{a_2=1}^{m-p+2-a_1} \dots \sum_{a_{p-k}=1}^{m-k-a_1-\dots-a_{p-k-1}} \\
 & \quad \sum_{b_1=1}^{m-k+1-a_1-\dots-a_{p-k}} \dots \sum_{b_{k-1}=1}^{m-i-a_1-\dots-a_{p-k}-b_1-\dots-b_{k-2}} \\
 & \quad \frac{m!}{(a_1-1)!(a_2-1)! \dots (a_{p-k}-1)! b_1! b_2! \dots b_{k-1}!} \\
 & \quad \times \frac{1}{a_1(a_1+a_2) \dots (a_1+a_2+\dots+a_{p-k})} \\
 & \quad \times \frac{\Psi(k-1, m, b_1, \dots, b_{k-1})}{(m-1-a_1-\dots-a_{p-k}-b_1-\dots-b_{k-1})!} \\
 & \quad \times \varphi^{(a_1)i_p} \varphi^{(a_2)i_{p-1}} \dots \varphi^{(a_{p-k})i_{k+1}} \\
 & \quad \times \varphi^{(b_1)i_1} \varphi^{(b_2)i_2} \dots \varphi^{(b_{k-1})i_{k-1}} \\
 & \quad \times \varphi^{(m-a_1-\dots-a_{p-k}-b_1-\dots-b_{k-1})i_k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \Psi(l, m, b_1, \dots, b_l) = \frac{1}{m-b_1 \dots - b_l} \\
 & - \frac{1}{m-b_1-\dots-b_{l-1}} - \dots - \frac{1}{m-b_2-\dots-b_l} \\
 & + \frac{1}{m-b_1-\dots-b_{l-2}} + \dots + \frac{1}{m-b_3-\dots-b_l} \\
 & - \dots \\
 & + (-1)^{l-1} \left(\frac{1}{m-b_1} + \frac{1}{m-b_2} + \dots + \frac{1}{m-b_l} \right) + (-1)^l \frac{1}{m},
 \end{aligned}$$

et puis nous donnons quelque applications de cette formule.

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \Delta x^i &= h \varphi^{(1)i}(0) + \frac{1}{2!} h^2 \varphi^{(2)i}(0) + \dots + \frac{1}{m!} h^m \varphi^{(m)i}(0) + \dots \\
 \Delta x^{i_1} \Delta x^{i_2} \dots \Delta x^{i_p} &= \varphi^{(1)i_1} \varphi^{(1)i_2} \dots \varphi^{(1)i_p} h^p + \dots + \frac{p!}{m!} h^m U_m^{i_1 \dots i_p} + \dots,
 \end{aligned}$$

où

$$(4) \quad U_m^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{s_1=1}^{m-p+1} \sum_{s_2=1}^{m-p+2-s_1} \dots \sum_{s_{p-1}=1}^{m-1-s_1-\dots-s_{p-2}}$$

$$\binom{m}{s_1} \binom{m-s_1}{s_2} \dots \binom{m-s_1-\dots-s_{p-2}}{s_{p-1}}$$

$$\times \varphi^{(m-s_1-\dots-s_{p-1})i_1} \varphi^{(s_{p-1})i_2} \dots \varphi^{(s_1)i_p};$$

$$A_\alpha = \delta_\alpha^\sigma A_\sigma,$$

$$\frac{dA_\alpha}{dt} = D_i \delta_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(1)i} A_\sigma,$$

$$\frac{d^2 A_\alpha}{dt^2} = (D_i \delta_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(2)i} + D_j D_{(i)} \delta_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(1)i} \varphi^{(1)j}) A_\sigma,$$

$$(5) \quad \frac{d^m A_\alpha}{dt^m} = (D_i \delta_{(\alpha)}^\sigma P_m^i + D_j D_{(i)} \delta_{(\alpha)}^\sigma P_m^{ij} + \dots$$

$$+ D_i D_{(i_1)} \dots D_{(i_{m-1})} \delta_{(\alpha)}^\sigma P_m^{i_1 \dots i_m}) A_\sigma$$

où $P_m^{i_1 \dots i_p}$ est un polynôme des dérivées de φ jusqu'à l'ordre $m-p+1$, déterminé par la formule de récurrence :

$$P_m^i = \varphi^{(m)i} \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$P_2^{ij} = \varphi^{(1)i} \varphi^{(1)j},$$

$$P_m^{ij} = \frac{dP_{m-1}^{ij}}{dt} + \varphi^{(m-1)i} \varphi^{(1)j} \quad (m=3, \dots)$$

$$P_p^{i_1 \dots i_p} = \varphi^{(1)i_1} \varphi^{(1)i_2} \dots \varphi^{(1)i_p},$$

$$P_m^{i_1 \dots i_p} = \frac{dP_{m-1}^{i_1 \dots i_p}}{dt} + P_{m-1}^{i_1 \dots i_p} \varphi^{(1)i_p} \quad (m=p+1, \dots).$$

3. Posons

$$P_m^{i_1 \dots i_p} = F_m^{i_1 \dots i_p} + U_m^{i_1 \dots i_p}.$$

Il vient alors

$$F_m^i = 0 \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$F_p^{i_1 \dots i_p} = 0,$$

$$F_m^{i_1 \dots i_p} = \frac{dF_{m-1}^{i_1 \dots i_p}}{dt} + \varphi^{(1)i_p} F_{m-1}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} V_{m,\alpha}^{i_1 \dots i_p} \quad (m=p+1, \dots),$$

où

$$(6) \quad V_{m,a}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{s_1=1}^{m-p+1} \sum_{s_2=1}^{m-p+2-s_1} \dots \sum_{s_{p-1}=1}^{m-2-s_1-\dots-s_{p-2}}$$

$$\binom{m-1}{s_1} \binom{m-1-s_1}{s_2} \dots \binom{m-1-s_1-\dots-s_{p-3}}{s_{p-2}}$$

$$\times \varphi^{(s_{p-2})i_1} \dots \varphi^{(s_{p-1})i_{p-1}} \varphi^{(s_{p-1})i_p}$$

$$\times \{ \varphi^{(m-1-s_1-\dots-s_{p-2})i_p} \varphi^{(1)i_p} - \varphi^{(1)i_p} \varphi^{(m-1-s_1-\dots-s_{p-2})i_p} \},$$

ce qui nous donne

$$F_m^{i_1 \dots i_p} = \sum_{\sigma=0}^{p-2} \sum_{a_1=0}^{m-p} \sum_{a_2=0}^{m-p-a_1} \dots \sum_{a_{\sigma+1}=0}^{m-p-a_1-\dots-a_{\sigma}}$$

$$\frac{d^{a_1}}{dt^{a_1}} \left(\varphi^{(1)i_p} \frac{d^{a_2}}{dt^{a_2}} \left(\varphi^{(1)i_{p-1}} \dots \frac{d^{a_{\sigma}}}{dt^{a_{\sigma}}} \left(\varphi^{(1)i_{p+1-\sigma}} \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{d^{a_{\sigma+1}}}{dt^{a_{\sigma+1}}} \left(\sum_{\tau=1}^{p-\sigma-1} V_{m-\sigma-a_1-\dots-a_{\sigma+1}, \tau}^{i_1 \dots i_{p-\sigma}} \right) \right) \dots \right).$$

Celle-ci peut s'écrire .

$$(7) \quad F_m^{i_1 \dots i_p} = \sum_{\sigma=0}^{p-2} \sum_{s_1=1}^{m-p+1} \sum_{s_2=1}^{m-p+2-s_1} \dots \sum_{s_{\sigma}=1}^{m-p+\sigma-s_1-\dots-s_{\sigma-1}}$$

$$\sum_{a=0}^{m-p+\sigma-s_1-\dots-s_{\sigma}} \frac{1}{(s_1-1)!(s_2-1)!\dots(s_{\sigma}-1)!}$$

$$\times \frac{1}{s_1(s_1+s_2)\dots(s_1+s_2+\dots+s_{\sigma})}$$

$$\times \frac{(s_1+s_2+\dots+s_{\sigma}+a)!}{a!}$$

$$\times \varphi^{(s_1)i_p} \varphi^{(s_2)i_{p-1}} \dots \varphi^{(s_{\sigma})i_{p+1-\sigma}}$$

$$\times \frac{d^a}{dt^a} \left(\sum_{\tau=1}^{p-\sigma-1} V_{m-s_1-s_2-\dots-s_{\sigma}-a, \tau}^{i_1 \dots i_{p-\sigma}} \right)$$

d'après la relation

$$\sum_{l=0}^h \frac{(a+l)!}{l!a!} = \frac{(a+h+1)!}{h!(a+1)!}.$$

4. Posons

$$k=p-\sigma, \quad S=s_1+s_2+\dots+s_{\sigma}, \quad l=m-S.$$

Nous avons d'après (6)

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{l-k} \frac{(S+a)!}{a!} \frac{d^a}{dt^a} V_{l-a, 1}^{i_1 \dots i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{a=0}^{l-k} \sum_{b_1=1}^{l-a-k+1} \sum_{b_2=1}^{l-a-k+2-b_1} \dots \sum_{b_{k-2}=1}^{l-a-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \\ & \quad \frac{(l-a-1)!}{b_1! b_2! \dots b_{k-2}! (l-a-1-b_1-\dots-b_{k-2})!} \\ & \quad \frac{\sum_{r_1=0}^a \sum_{r_2=0}^{a-r_1} \dots \sum_{r_{k-2}=0}^{a-r_1-\dots-r_{k-3}} \sum_{r=1}^{a-r_1-\dots-r_{k-2}+1}}{(S+a)!} \\ & \quad \frac{r_1! r_2! \dots r_{k-2}! (r-1)! (a-r_1-\dots-r_{k-2}-r+1)!}{r_1! r_2! \dots r_{k-2}! (r-1)! (a-r_1-\dots-r_{k-2}-r+1)!} \\ & \quad \times \varphi^{(c_1) i_1} \varphi^{(c_2) i_2} \dots \varphi^{(c_{k-2}) i_{k-2}} \\ & \quad \times \{ \varphi^{(l-r-c_1-\dots-c_{k-2}) i_1} \varphi^{(r) i_2} - \varphi^{(r) i_1} \varphi^{(l-r-c_1-\dots-c_{k-2}) i_2} \}, \end{aligned}$$

où

$$c_1 = b_{k-2} + r_1, \quad c_2 = b_{k-3} + r_2, \dots, \quad c_{k-2} = b_1 + r_{k-2}.$$

Échangeons l'ordre de sommation de sorte que la sommation par rapport à a veient à la fin. Posons

$$u = a - r_1 - \dots - r_{k-1} - r + 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{a=r_1+\dots+r_{k-2}+r-1}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-2}} \frac{(l-a+1)! (S+a)!}{(a-r_1-\dots-r_{k-2}-r+1)! (l-a-1-b_1-\dots-b_{k-2})!} \\ &= \sum_{u=0}^{l-1-c_1-\dots-c_{k-2}-r} \\ & \quad \times \frac{(u+S+r_1+\dots+r_{k-2}+r-1)! (l-r_1-\dots-r_{k-2}-r-u)!}{u! (l-c_1-\dots-c_{k-2}-r-u)!} \\ &= \frac{(S+r_1+\dots+r_{k-2}+r-1)! (b_1+\dots+b_{k-2})! m!}{(l-c_1-\dots-c_{k-2}-r)! (S+c_1+\dots+c_{k-2}+r)!} \\ & \quad - \frac{(m-1-b_1-\dots-b_{k-2})! (b_1+\dots+b_{k-2})!}{(l-c_1-\dots-c_{k-2}-r)!} \end{aligned}$$

d'après la relation

$$\sum_{u=0}^h \frac{h!}{u! (h-u)!} (u+a)! (\beta-u)! = \frac{a! (\beta-h)! (a+\beta+1)!}{(a+\beta+1-h)!}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=0}^{l-s} \frac{(S+a)!}{a!} \frac{d^a}{dt^a} V_{l-a,1}^{i_1, \dots, i_k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{b_1=1}^{l-k+1} \sum_{b_2=1}^{l-k+2-b_1} \dots \sum_{b_{k-2}=1}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \\
& \quad \sum_{r_1=0}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-2}} \sum_{r_2=0}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-2}-r_1} \dots \sum_{r_{k-2}=0}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-2}-r_1-\dots-r_{k-3}} \\
& \quad \sum_{c=1}^{l-1-c_1-\dots-c_{k-2}} \frac{(b_1 + \dots + b_{k-2})!}{b_1! \dots b_{k-2}! r_1! \dots r_{k-2}! c_1! (l-1-c-c_1-\dots-c_{k-2})!} \\
& \quad \times \left\{ \frac{m!(m-1-b_1-\dots-b_{k-2}-c)!}{(m-c)!} - (m-1-b_1-\dots-b_{k-2})! \right\} \\
& \quad \times \varphi^{(c_1)i_2} \varphi^{(c_2)i_3} \dots \varphi^{(c_{k-2})i_{k-1}} \\
& \quad \times \left\{ \varphi^{(c)i_1} \varphi^{(l-c-c_1-\dots-c_{k-2})i_k} - \varphi^{(l-c-c_1-\dots-c_{k-2})i_1} \varphi^{(c)i_k} \right\},
\end{aligned}$$

en posant

$$c = l - c_1 - \dots - c_{k-1} - r.$$

Faisons $r_1 = c_1 - b_{k-2}$ dans le coefficient numérique, et effectuons la sommation par rapport à b_{k-2} en remarquant que

$$\begin{aligned}
& \sum_{b_{k-2}=1}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \sum_{r_1=0}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}-b_{k-2}} \\
&= \sum_{b_{k-2}=1}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \sum_{c_1=b_{k-2}}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \\
&= \sum_{c_1=1}^{l-2-b_1-\dots-b_{k-3}} \sum_{b_{k-2}=1}^{c_1}.
\end{aligned}$$

Le coefficient numérique s'écrit alors

$$\begin{aligned}
& \frac{(b_1 + \dots + b_{k-3})!}{b_1! \dots b_{k-3}! r_2! \dots r_{k-2}! c! c_1! (l-1-c-c_1-\dots-c_{k-2})!} \\
& \times \left\{ \frac{m!(m-1-b_1-\dots-b_{k-3}-c-c_1)!}{(m-c-c_1)!} \right. \\
& \quad - \frac{m!(m-1-b_1-\dots-b_{k-3}-c)!}{(m-c)!} \\
& \quad - \frac{m!(m-1-b_1-\dots-b_{k-3}-c_1)!}{(m-c_1)!} \\
& \quad \left. + (m-1-b_1-\dots-b_{k-3})! \right\}.
\end{aligned}$$

Éeffectuons les sommations par rapport à $b_{k-3}, \dots, b_2$ de cette manière, et la sommation par rapport à r_{k-2} en remarquant que

$$\begin{aligned} & \sum_{b_1=1}^{l-2-c_1-\dots-c_{k-3}} \sum_{r_{k-2}=0}^{l-2-b_1-\dots-c_1-\dots-c_{k-3}} \\ &= \sum_{r_{k-2}=0}^{l-3-c_1-\dots-c_{k-3}} \sum_{b_1=1}^{l-2-c_1-\dots-c_{k-3}-r_{k-2}} \\ &= \sum_{r_{k-2}=0}^{l-3-c_1-\dots-c_{k-3}} \sum_{c_{k-2}=r_{k-2}+1}^{l-2-c_1-\dots-c_{k-3}} \\ &= \sum_{c_{k-2}=1}^{l-2-c_1-\dots-c_{k-3}} \sum_{r_{k-2}=0}^{c_{k-2}-1} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, en écrivant $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ à nouveau à la place de $c, c_1, \dots, c_{k-2}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{l-k} \frac{(S+a)!}{a!} \frac{d^a}{dt^a} V_{l-a,1}^{i_1, \dots, i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{b_1=1}^{l-k+1} \sum_{b_2=1}^{l-k+2-b_1} \dots \sum_{b_{k-1}=1}^{l-1-b_1-\dots-b_{k-2}} \\ & \frac{m! \Psi(k-1, m, b_1, \dots, b_{k-1})}{b_1! \dots b_{k-1}! (l-1-b_1-\dots-b_{k-1})!} \\ & \times \{ \varphi^{(b_1)i_1} \varphi^{(b_2)i_2} \dots \varphi^{(b_{k-1})i_{k-1}} \varphi^{(l-b_1-\dots-b_{k-1})i_k} \\ & \quad - \varphi^{(b_1)i_k} \varphi^{(b_2)i_2} \dots \varphi^{(b_{k-1})i_{k-1}} \varphi^{(l-b_1-\dots-b_{k-1})i_1} \} \end{aligned}$$

La même réduction peut se faire pour

$$\sum_{s=0}^{l-k} \frac{(S+a)!}{a!} \frac{d^a}{dt^a} V_{l-a,\tau}^{i_1, \dots, i_k} \quad (\tau=1, 2, \dots, k-1).$$

Portons ces valeurs dans (7). Il vient d'après (2)

$$F_m^{i_1, \dots, i_p} = \sum_{k=2}^p \sum_{\tau=1}^{k-1} (\Phi_m^{i_1, \dots, i_{k-1}; i_k / i_{k+1}, \dots, i_p} - \Phi_m^{i_1, \dots, i_{\tau-1}; i_{\tau+1}, \dots, i_k; i_{\tau} / i_{k+1}, \dots, i_p}).$$

5. Supposons que les Γ_{ij}^α ($\alpha=0, 1, \dots, n; i, j=1, \dots, n$) sont des fonctions analytique dans le domaine $|\hat{z}^i - x^j| < \rho$. Nous pouvons prendre un nombre positif M tel que

$$|D_r \delta_{(\alpha)}^\alpha| < M$$

dans ce domaine. Soient r un nombre positif moindre que ρ , et $r_1, r_2, \dots, r_n$ une suite de nombres tels que

$$\rho > r_1 > r_2 > \dots > r_n > \dots > r.$$

Il vient alors

$$|D_j D_{(i)} \delta_{(a)}^\sigma| < \frac{M}{r_1} + (n+1)M^2 < M \left(\frac{1}{r} + (n+1)M \right)$$

dans le domaine $|\xi^i - x^i| \leq r_1$, En général.

$$|D_{i_p} D_{(i_{p-1})} \dots D_{(i_1)} \delta_{(a)}^\sigma| < M \left(\frac{1}{r} + (n+1)M \right)^{p-1} < \left(\frac{1}{r} + (n+1)M \right)^p$$

dans le domaine $|\xi^i - x^i| < r$.

Supposon ensuite que C est une courbe analytique de sort que

$$|\varphi^i(0)| < N, \quad |\varphi^{(c)^i}| < \frac{c! N}{s^c}$$

les nombres positifs N, s étant choisis convenablement.

Nous avons ainsi

$$|U_m^{i_1 \dots i_p}| < \frac{m!}{p!} \binom{m}{p} \frac{N^p}{s^m} < m! \binom{m}{p} \frac{N^p}{s^m},$$

$$|\varphi^{i_1 \dots i_{k-1}; i_k / i_{k+1} \dots i_p}| < \frac{m!}{k!} \binom{m}{p} 2^{k-1} \frac{N^p}{s^m}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} |F_m^{i_1 \dots i_p}| &< \sum_{k=2}^p \frac{m!}{k!} \binom{m}{p} (k-1) 2^k \frac{N^p}{s^m} \\ &< \sum_{k=2}^p \frac{2m!}{(k-1)!} \binom{m}{p} 2^{k-1} \frac{N^p}{s^m} \\ &< 2m! \binom{m}{p} e^2 \frac{N^p}{s^m} < 18m! \binom{m}{p} \frac{N^p}{s^m}, \end{aligned}$$

$$|P_m^{i_1 \dots i_p}| < 19m! \binom{m}{p} \frac{N^p}{s^m},$$

$$\begin{aligned} (8) \quad & \frac{|h|^m}{m!} \left(|D_i \delta_{(a)}^\sigma P_m^i| + \dots + |D_{i_m} \dots D_{(i_1)} \delta_{(a)}^\sigma P_m^{i_1 \dots i_m}| \right) \\ & < 19 \left(\frac{|h|}{s} \right)^m \sum_{p=1}^m \binom{m}{p} \left(\frac{N}{r} + (n+1)MN \right)^p \\ & < 19 \left\{ \frac{|h|}{s} \left(1 + \frac{N}{r} + (n+1)MN \right) \right\}^m \end{aligned}$$

6. Portant les valeurs des dérivées de A_α données par (4) dans l'équation

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{dA_\alpha}{dt}h + \dots + \frac{1}{m!}h^m \frac{d^m A_\alpha}{dt^m} + \dots,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} A'_\alpha = A_\alpha & \left[\partial_\alpha^\sigma \right. \\ & + \frac{h}{1!} D_i \partial_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(1)i} \\ & + \frac{h^2}{2!} (D_i \partial_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(2)i} + D_j D_{(i)} \partial_{(\alpha)}^\sigma \varphi^{(1)i} \varphi^{(1)j} \\ & + \dots \\ & + \frac{h^m}{m!} (D_i \partial_{(\alpha)}^\sigma P_m^i + \dots + D_{i_m} \dots D_{(i_1)} \partial_{(\alpha)}^\sigma P_m^{i_1 \dots i_m}) \\ & \left. + \dots \right] \end{aligned}$$

Si l'on regard l'expression dans le crochet [] comme une série double, la série horizontalale est absolument convergente d'après (8) lorsque

$$|h| < \frac{s}{1 + \frac{N}{r} + (n+1)MN}.$$

Il en est donc de même pour la série verticale. Nous obtnons ainsi l'équation (I), en tenant compte de la relation

$$\begin{aligned} & D_{i_p} D_{(i_{p-1})} \dots D_{(i_1)} \partial_{(\alpha)}^\sigma F_m^{i_1 \dots i_p} \\ & = \sum_{k=2}^p \sum_{\tau=1}^{k-1} \tau D_{i_p} D_{(i_{p-1})} \dots D_{(i_{k+1})} D_{(i_{k-1})} \dots D_{(i_{\tau+1})} \\ & \quad R_{\tau(i_\tau)(i_k)}^\sigma D_{(i_{\tau-1})} \dots D_{(i_1)} \partial_{(\alpha)}^\sigma \\ & \quad \times \varphi_m^{i_1 \dots i_{k-1} i_k / i_{k+1} \dots i_p}. \end{aligned}$$

7. Suppons maintenant que la courbe $C(\xi^i = \varphi^i(t) \quad (0 \leq t \leq T))$ est une courbe fermée telle que $\varphi^i(0) = \varphi^i(T) = x^i$. Il en est alors ainsi pour la courbe

$$\gamma: \xi^i = x^i + \lambda(\varphi^i(t) - x^i)$$

indépendamment de la valeur du paramètre λ . Pour une valeur assez petite de $|\lambda|$, le repère associé au point $x^i + \lambda(\varphi^i(t) - x^i)$ est donné par

$$(9) \quad A'_\alpha = A_\alpha \left[\delta_\alpha^\sigma + \lambda D_i \delta_{(\alpha)}^\sigma \Delta x^i + \frac{\lambda^2}{2!} D_j D_{(i} \delta_{(\alpha)}^\sigma \Delta x^i \Delta x^j + \dots \right. \\ \left. + \lambda^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{t^m}{m!} R_{\alpha ij}^\sigma \varphi_m^{i;j} + \dots \right],$$

et celui associé au point de retour est donné par une prolongement analytique.

En particulier, si la fonction $\varphi(t)$ peut être développée en série suivant les puissances entières de t dans l'intervalle $|t| < s$ ($s > |T|$), on a le repère associé au point de retour en posant $t=T$ et, par suite, $\Delta x^i = 0$ dans (9) pour une courbe γ telle que $|\lambda| < \varepsilon$,

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{N}{r} + (n+1)MN}.$$

C'est-à-dire que nous avons

$$(10) \quad A'_\alpha = A_\alpha \left[\delta_\alpha^\sigma + \sum_{p=2}^{\infty} \lambda^p \theta_\alpha^\sigma(p) \right],$$

où

$$\theta_\alpha^\sigma(p) = \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{p-1} \sum_{k=\tau+1}^p \frac{\tau T^m}{m!} D_{i_{p-1}} D_{(i_{p-2}} \dots D_{(i_{\tau+1}} \\ R_{\beta(i_\tau)(i_p)}^\sigma D_{(i_{\tau-1}} \dots D_{(i_1)} \delta_{(\alpha)}^\beta \\ \times \varphi^{i_1 \dots i_{k-1}; i_p / i_k \dots i_{p-1}}$$

8. Des équations (1) et (10) nous pouvons déduire aisément des théorèmes fondamentaux concernant l'espace à connexion projective.

Nous démontrons, par exemple, que si toute courbe formée de R est développée en courbe formée, l'espace R est équivalent à un espace projectif.

Dans ce cas d'après (10) il faut que

$$\theta_0^h(2) = 0, \quad \theta_0^h(3) = 0 \quad (h=1, \dots, n).$$

En égalant à zéro le coefficient de $\varphi^{(1)p} \varphi^{(2)q}$, dans la première

équation, et les coefficients de $\varphi^{(2)p}\varphi^{(1)q}\varphi^{(1)r}$, $\varphi^{(1)p}\varphi^{(2)q}\varphi^{(2)r}$ dans la seconde équation, nous obtenons

$$(11) \quad \begin{aligned} R_{0ij}^h &= 0 \\ D_j R_{(0)(i)(k)}^h + D_k R_{(0)(i)(j)}^h &= 0, \\ R_{jik}^h + R_{kij}^h &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(12) \quad R_{0ij}^0 = 0.$$

On en tire au moyen de l'identité de Bianchi,

$$(13) \quad R_{ijk}^h = 0 \quad (h, i, j, k = 1, \dots, n).$$

Si $n > 2$, en faisant l'usage encore de l'identité de Bianchi on obtient

$$(14) \quad R_{ijk}^0 = 0.$$

Lorsque $n=2$, les équations (11), (12), (13) peuvent être vérifiées sans que l'équation (14) soit vérifiée. Cela arrive pour la connexion normale. Dans ce cas on tire (14) de $\theta_0^h(4) = 0$, en remarquant que

$$\Psi(h, m, 1, \dots, 1) = \frac{h!(m-h-1)!}{m!},$$

$$\Psi(h, m, b_1, \dots, b_n) = \Psi(h-1, m-b_1, b_2, \dots, b_n) - \Psi(h-1, m, b_2, \dots, b_n),$$

en particulier,

$$\begin{aligned} \Psi(h, m, 2, 1, \dots, 1) &= \Psi(h-1, m-2, 1, \dots, 1) - \Psi(h-1, m, 1, \dots, 1) \\ &= \frac{h!(m-2-h)!(2m-h-1)}{m!}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Psi(h, m, 2, 1, \dots, 1) - \Psi(h, m, 1, \dots, 1) = \frac{(h+1)!(m-2-h)!}{2m!}.$$

9. Nous démontrons ensuite que s'il existe, à tout point de $\mathbf{R}$, un espace projectif osculateur qui à un contact du quatrième ordre, et si $n > 2$, l'espace $\mathbf{R}$ doit être équivalent à un espace projectif.

Le second membre de l'équation (1) se consiste de deux parties, la première partie se détermine par la donation du point $x^i + 4x^i$, tandis que la deuxième partie dépend de la courbe $\mathbf{C}$

joignant les points $x^i, x^i + \Delta x^i$. Pour qu'il existe un espace projectif qui à un contact du quatrième ordre, il faut et il suffit que lorsqu'on exprime au moyen de (1) les coordonnées non homogènes de l'image du point $x^i + \Delta x^i$, rapportée au repère $[A, A_1, \dots, A]$, en série suivant les puissances entières de h , les termes dependant la courbe C , jusqu'à quatrième ordre, soient nulles. De la même manière que n° précédent on deduit les équations (11), (12), (13) pour cette condition.

Par ce raisonnement on peut démontrer que si un espace R à connexion projective normale, et à deux dimensions admet un espace projectif osculateur qui a un contact du cinquième ordre, l'espace R est équivalent à un espace projectif.

10. Nous démontrons enfin que si les transformations du groupe d'holonomie laisse fixe un hyperplan π , la connexion donnée est équivalent à une connexion affine.

Soit x^i un point quelconque de R , envisageons une courbe formée γ partant du point x^i , et y retournant. Développons-la en associant au point du départ un repère $[A, A_1, \dots, A_n]$ dont les sommets $A_1, \dots, A_n$ se trouvent dans l'hyperplan π .

Si les transformations du groupe d'holonomie laisse fixe l'hyperplan π , les points $A_i (i=1, \dots, n)$ définis par (10) se trouvent dans hyperplans π independamment des valeurs de λ . Nous avons donc

$$\theta_h^0(p) = 0 \quad (h=1, \dots, n; p=2, 3, \dots).$$

Par le raisonnement du n° 8, on tire de $\theta_h^0(2) = 0, \theta_h^0(3) = 0$

$$\begin{aligned} D_i R_{hjk}^0 &= 0, & R_{\alpha ij}^0 &= 0 \\ (\alpha &= 0, 1, \dots, n; h, i, j, k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma_{ii}^0 R_{hjk}^0 = 0.$$

Donc si la matrice

$$\begin{pmatrix} R_{hjk}^i \\ R_{jkh}^n \end{pmatrix}$$

est du rang n au point x^i et, par suite, dans le voisinage de ce point, les $\Gamma_{ii}^0(h, i=1, \dots, n)$ s'anullent dans ce domaine.

Au cas où les Γ_{ii}^0 ne sont pas tous nuls nous pouvons déduire de $\theta_h^0(p) = 0 (p=2, 3, \dots)$

$$D_{i_s} D_{i_{s-1}} \dots D_{i_1} R_{\alpha j k}^0 = 0 \quad (s=0, 1, \dots)$$

C'est-à-dire que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} R_{\alpha i j}^1 \dots & D_{h_p} D_{h_{p-1}} \dots D_{h_1} R_{\alpha i j}^1 \dots \\ \dots & \dots \\ R_{\alpha i j}^n \dots & D_{h_p} D_{h_{p-1}} \dots D_{h_1} R_{\alpha i j}^n \dots \end{pmatrix}$$

est égal à celui de la matrice qu'on obtient en la bordant avec la ligne

$$R_{\alpha i j}^0 \dots \quad D_{h_p} D_{h_{p-1}} \dots D_{h_1} R_{\alpha i j}^0 \dots$$

Nous voyons ainsi que la connexion donné est équivalente à une connexion affine.⁽¹⁾

1) J. Kanitani Tensor, 1941, No. 5 p. 1