J. Math. Kyoto Univ.
9-1 (1969) 1-4

Une remarque sur le deuxième Mémoire de M. K. Oka

Par

Akira TAKEUCHI

(Reçu le 15 Octobre, 1968)

Dans sa deuxième Mémoire[1], M. K. Oka a montré que le premier problème de Cousin et le problème d'approximation sont toujours résolubles pour les domaines d'holomorphie (univalents et finis), en réduisant ces problèmes aux problèmes pour les domaines convexes par rapport aux polynomes. Cette réduction se fonde sur le fait, qu'une certaine variété caractéristique peut s'approcher, de l'extérieur, d'une suite décroissante de domaines convexes par rapport aux polynomes[2]. Mais, la démonstration originale de ce fait est assez compliquée. On peut aussi le démontrer en employant la théorie des faisceaux analytiques, mais, il n'est pas élémentaire. Nous nous proposons ici de la simplifier directement. Notre démonstration élémentaire permet d'écourter la description du mémoire original. Nous l'exposerons ici parce que notre méthode est applicable à un autre problème[3].

1. Nous conserverons les définitions et les notations du mémoire original. Nous désignerons par $\varDelta$ un ensemble fermé dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$, donné par les conditions;

1) Journal of Science of the Hirosima University. Series A. vol. **7**, 1937, pp. 115-130.

2) Théorème 1 du mémoire cité dans la note 1).

3) E. Hirai; Domaines d'holomorphie dans l'espace projectif.

$$(\Delta) \qquad |x_i| \leqq r_i, \ |f_j(x)| \leqq 1, \ (x) \in \mathfrak{D}, \quad (i=1, \cdots, n; \ j=1, \cdots, \nu),$$

ou r_i sont des constantes positives, $f_j(x)$ des fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$ dans l'espace (x). En introduisant de nouveau ν variables complexes $y_1, \cdots, y_\nu$, construisons, dans l'espace (x, y), l'ensemble fermé Σ de la forme;

$$(\Sigma) \qquad y_j = f_j(x) \quad (x) \in \Delta, \qquad (j=1, \cdots, \nu).$$

Dans cette configuration, voici le théorème suivant, que nous allons démontrer:

Théorème. *L'ensemble caractèristique Σ est extèrieurement holomorphe-convexe par rapport aux polynomes; c'est à dire que Σ est la limite d'une suite dècroissante de domaines convexes par rapport aux polynomes*[4].

2. Désignons par A le plus petit ensemble fermé, contenant Σ et extérieurement holomorphe-convexe par rapport aux polynomes dans l'espace supérieur (x, y)[5]. Alors, l'assersion du théorème n'est pas autre chose que l'identité $\Sigma = A$.

Pour le démontrer, nous appliquerons, d'après M. Oka[6], le lemme utile, disant *qu'il n'existe jamais une famille de surfaces caractèristiques* (σ_t), $0 \leqq t \leqq 1$, *dèpendant analytiquement d'un paramètre rèel, et possèdant les propriètès suivantes*;

1) *aucune des surfaces de la famille ne passe par Σ;*
2) *pour toute surface σ_t, sa frontière n'intervient pas dans un voisinage V de A;*
3) *σ_0 passe par un point de A, tandis que σ_1 reste à l'extèrieur de V.*

---

4) voir 2).

5) loc. cit. 1), p. 116. Pour un ensemble borné quelconque, un tel ensemble est toujours défini.

6) loc. cit. 1), p. 117.

3. Pour chaque point (x^0) de l'espace (x), nous dénotons Σ_{x^0} (resp. A_{x^0}) l'ensemble des points (y) tels que (x^0, y) appartiennent à Σ (resp. A). Remarquons que, pour un point (x^0) de D, $\Sigma_{x^0}=A_{x^0}$ équivaut à dire que si $(x^0, y)\in A$, alors $(x^0)\in\Delta$ et $y_j=f_j(x^0)$, $(j=1, \cdots, \nu)$. Mais, puisque A évidemment contenu dans le polycylindre $|x_i|\leqq r_i$, $|y_j|\leqq 1$, $(i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, \nu)$, cela équivaut encore à dire que $y_j=f_j(x^0)$ $(j=1, \cdots, \nu)$, si $(x^0, y)\in A$.

Décrivons une boule fermée S; $|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\leqq r^2$, et supposons que la condition suivante (Ω) soit remplie pour S;

(Ω) $\qquad \Sigma_x=A_x$ pour tout point (x) extérieur à S.

Cette condition est évidemment remplie pour le rayon r suffisamment grand.

Envisageons un voisinage de chaque point frontière (ξ) de cette boule, il y a deux cas à considérer:

α) Quand (ξ) n'appartient pas à Δ, il existe un voisinage V de (ξ), qui est tout en dehors de Δ. D'après l'hypothèse, l'ensemble A_x est vide pour $(x)\in V-S$. Alors en vertu du lemme dit plus haut (§2), A_x est vide pour tout (x) dans un petit voisinage de (ξ).

β) Considérons le cas où $(\xi)\in\Delta$. Puisque $\Delta\subset D$, il existe une boule fermée S_0 de centre (ξ), contenue dans D. Choisissons S_0 suffisamment petite pour que l'ensemble $\partial S_0\cap\partial S$ ne soit ni vide ni un point, où ∂S_0 (resp. ∂S) est la frontière de S_0 (resp. S). $\partial S_0\cap\partial S$ est, alors, situé sur un hyperplan L. Désignons par H le demi-espace (ouvert) ayant L pour sa frontière et contenant le point (ξ). Par l'hypothèse, pour tout $(x)\in S_0-S$, on a $\Sigma_x=A_x$, donc la relation $(x, y)\in A$ entraine les égalités $y_j=f_j(x)$, $(j=1, \cdots, \nu)$. Ici, nous montrons que c'est encore vrai pour les points de $H\cap S$. En effet, supposons qu'il existe, par l'absurde, un point (x', y') de A tel que (x') appartienne à $H\cap S$ et que l'une au moins de ses coordonnées y'_j ne coïncide pas avec $f_j(x')$; soit $y'_1\neq f_1(x')$, pour fixer l'idée. Construisons une fonction $\psi(x)$, holomorphe dans un voisinage de

S_0, jouissant des propriétés suivantes:

1) $\psi(x)$ ne s'annule pas sur S_0,

2) $|\psi(x)|>\max|y_1-f_1(x)|$; $(y)\in A_x$ sur $\partial S_0\cap S$,

3) $\psi(x')=y_1'-f_1(x')$.

On peut aisément trouver une telle fonction, par exemple, en une puissance d'un polynome linéaire en $x_1, \cdots, x_n$. Avec cette fonction $\psi(x)$, on peut former la famille de surfaces caractéristiques

$$(\sigma_t) \qquad y_1-f_1(x)=\psi(x)(1+t),\ (x)\in S_0,\ 0\leqq t<+\infty,$$

dans l'espace supérieur (x, y). Or, cette famille (σ_t) possède évidemment les propriétés interdites par le lemme au §2. En consequence, dans le cas où $(\xi)\in\varDelta$, on peut aussi trouver un voisinage de (ξ) dans lequel $\Sigma_x=A_x$.

D'après α) et β), la condition (Ω) est remplie pour une boule concentrique, plus ptite que S. De cette manière, la boule S se réduit à l'origine, sans cesser de satisfaire à la condition (Ω). En répétant le même raisonnement après avoir changé l'origine, on a bien $\Sigma_x=A_x$ pour tout (x); ce qui démontre le théorème.

KYOTO UNIVERSITY