J. Math. Kyoto Univ.
9-2 (1969) 275-335

Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré

Par

Norio SHIMAKURA

(Reçu le 25 fevrier, 1969)

§0. Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ à frontière Γ une hypersurface de classe C^∞. Supposons que Ω soit situé localement à un seul côté de Γ. Nous considérons, dans Ω, un opérateur différentiel elliptique $L(x;\, D_x)$ dégénéré au bord ayant l'expression

$$(0.1)\qquad Lu(x) \equiv L(x;\, D_x)u(x) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h(x;\, D_x)\{\rho(x)^{k-h}u(x)\},$$

où $\rho(x)$ désigne la distance du point $x \in \bar{\Omega}$ jusqu'à la frontière Γ, et pour chaque h $(0 \leqq h \leqq k)$, $P^h(x;\, D_x)$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leqq (m-h)$ à coefficients de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, et en particulier, soit $P^0(x;\, D_x)$ elliptique d'ordre m (au sens ordinaire) uniformément sur $\bar{\Omega}$. *Donc, cet opérateur L est d'ordre m de la différentiation, et d'ordre k de la dégénéressance, où les m et k sont supposés deux entiers tels que*

$$(0.2)\qquad 0 < k \leqq m = 2b \quad \textit{avec } b : \textit{entier} \geqq 1.$$

Tout d'abord, nous avons besoin d'éclaircir la partie principale de cet opérateur L. Dans un compact fixe quelconque dans l'intérieur de Ω, L est évidemment elliptique d'ordre m non dégénéré, donc sa partie principale est

$$(0.3)\qquad L^0_{\text{int.}}\, u(x) = \rho(x)^k P^0_m(x;\, D_x)u(x),$$

tandis qu'au bord, il serait mieux de penser que sa partie principale est

$$L^0_{\mathrm{bord}}u(x)=\sum_{h=0}^{k}P^h_{m-h}(x;\,D_x)\{\rho(x)^{k-h}u(x)\},\tag{0.4}$$

où les $P^h_{m-h}(x;\,D_x)$ $(0\leq h\leq k)$ désignent les sommes des termes d'order exactement $=(m-h)$ dans les opérateurs $P^h(x;\,D_x)$.

Etant donné un opérateur L *de la forme* (0.1), *qu'est ce que nous avons comme problèmes bien posés dans le cadre de* $L^2(\Omega)$? C'est une question, encore vague, qui nous intéresse.

Voici un problème bien posé traité par Monsieur M. S. Baouendi ([2] et [3]). Il a considéré un opérateur

$$Lu(x)\equiv-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{a_{ij}(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right\}+c(x)u(x),\tag{0.5}$$

où il a supposé que les $a_{ij}(x)(\in C^\infty(\bar{\Omega}))$ forment une matrice réelle hermitienne strictement définie positive sur $\bar{\Omega}$, et que $c(x)$ (à valeurs réelles) satisfasse aussi à une certaine hypothèse de la positivité. Dans ces conditions, il a défini un espace hilbertien

$$V=\left\{u(x)\in L^2(\Omega);\ \sqrt{\rho(x)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2(\Omega),\ 1\leq j\leq n\right\},\tag{0.6}$$

et une forme sesquilinéaire sur $V\times V$

$$L[u,v]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}dx+\int_\Omega c(x)u(x)\cdot\overline{v(x)}dx.\tag{0.7}$$

Alors, cette forme sesquilinéaire $L[u,v]$ devient V-coercitive, et l'on voit que l'opérateur L défini par (0.5) est un isomorphisme de V sur son dual V'. Le théorème d'existence et d'unicité lui-même étant ainsi simple, M. Baouendi a conentré ses efforts à démontrer l'hypoellipticité de L. Dans cet exemple, la situation que $(m,k)=(2,1)$ n'a pas d'importance. Pour un (m,k) général (avec m: pair), nous pouvons considérer le même genre d'opérateurs en y attachant une forme sesquilinéaire analogue à (0.7), et, nous obtenons un théorème d'existence et d'unicité (sauf l'hypoellipticité).

Ceux qui étaient importants dans le travail de M. Baouendi se résument en deux points suivants: Premièrement, sa position du problème était variationnelle, et ceci était même essentielle pour avoir la régularité. Et, deuxièmement, aucune condition aux limites n'intervenait dans le théorème d'existence et d'unicité. C'est-à-dire, selon la première étape de son résultat sur la régularité, L'opérateur L défini par (0. 5) était un isomorphisme de l'espace hilbertien

$$W=\{u(x)\in H^1(\Omega);\ \rho(x)u(x)\in H^1(\Omega)\}$$

sur $L^2(\Omega)$.

Maintenant, nous nous demandons si les problèmes variationnels sont-ils seuls problèmes bien posés par rapport aux opérateurs elliptiques dégénérés.

Comme il est connu, dans la théorie des opérateurs non dégénérés, il y a deux catégories des théories: l'une est celle des problèmes variationnels (de Vishik-Sobolev), et l'autre est celle des problèmes aux limites généraux (d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1] et de Schechter [7]). En revenant aux opérateurs dégénérés, le résultat cité plus haut de M. Baouendi appartient à la première catégorie.

Alors, existe-t-il une analogie avec les problèmes aux limites générax aussi pour les opérateurs elliptiques dégénérés?

Nous pourrions chercher une telle analogie même dans le cadre de L^p avec $1<p<\infty$. Mais comme la première étape, nous en cherchons une dans le cas $p=2$. Pour fixer les idées, nous écrivons l'équation

$$L(x;\ D_x)u(x)=f(x), \tag{0. 8}$$

où L a été défini par (0. 1). Quand on donne une fonction $f(x)$ du deuxième membre dans la classe $L^2(\Omega)$, il sera raisonnable, pour le moment, de chercher une solution $u(x)$ dans l'espace fonctionnel

$$W_k^m(\Omega)=\{u(x)\in H^{m-k}(\Omega);\ \rho(x)^k u(x)\in H^m(\Omega)\}. \tag{0. 9}$$

La première difficulté que nous rencontrons, c'est *la question des traces.* Etant donnée une $u(x)\in W_k^m(\Omega)$, nous n'avons que $(m-k)$

traces $\{\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{m-k-1} u\}$ au sens ordinaire (si $m=k$, il n'existe rien). La deuxième difficulté est *de déterminer le nombre des conditions aux limites.* Dans le cas non dégénéré ($k=0$), nous avons pu poser exactement $b=m/2$ conditions. Mais, dans le cas présent (dégénéré), nous ne pouvons plus copier une telle formulation à cause du nombre des traces qui existent. Ces deux difficultés ont donc des rapports intimes l'une l'autre. Pour éliminer ces difficultés, nous allons faire une simplification brutale de l'opérateur L.

D'abord, nous écrivons $n+1$ au lieu de n (donc $n \geqq 0$ dès maintenant). Remplaçons Ω par le demi-espace

$$(0.10) \qquad \boldsymbol{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \in \boldsymbol{R}^{n+1};\ t>0\}.$$

Alors, la fonction $\rho(x)$ ci-dessus devient maintenant t. Et, nous supposons que les P^h $(0 \leqq h \leqq k)$ dans la formule (0.1) soient à coefficients constants. En somme, nous obtenons un opérateur L simplifié comme suit:

$$(0.11) \quad Lu(x, t) = L(t;\ D_x, D_t) u(x, t) = \sum_{h=0}^{k} P^h(D_x, D_t)(t^{k-h} u(x, t)).$$

Bien que l'opérateur réduit (0.11) soit "proche" de celui général (0.1) dans un certain sens au voisinage de la frontière, nous ne pouvors faire autrement que d'admettre que nous ayons perdu beaucoup de généralités. Mais cette réduction a été nécessaire pour l'auteur qui a désiré utiliser la transformation de Fourier non seulement en x mais aussi en t. Donc, dès maintenant, nous nous concentrons à l'opérateur L du type (0.11) en pensant qu'il montre *une modèle* de l'opérateur général défini par (0.1).

Maintenant, la réponse à la question des traces est bien claire. Nous écrivons W_k^m au lieu d'écrire $W_k^m(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$. Alors, chaque élément u de W_k^m a exactement m traces $\{\gamma_q u(x)\}_{q=-k}^{m-k-1}$, où les $\gamma_q u(x)$ avec $0 \leqq q \leqq m-k-1$ sont ordinaires, mais les $\gamma_q u(x)$ avec $-k \leqq q \leqq -1$ sont des quantités globales:

$$(0.12) \qquad \gamma_q u(x) = \begin{cases} D_t^q u(x, +0), & \text{si } -k \leqq q \leqq m-k-1; \\ (-1)^{q-1} \displaystyle\int_0^\infty t^{-q-1} u(x, t)\, dt, & \text{si } -k \leqq q \leqq -1. \end{cases}$$

Et nous voyons facilement que

(0. 13) $\gamma_q u(x) \in H^{m-k-q-(1/2)}(\boldsymbol{R}^n)$, pour $-k \leqq q \leqq m-k-1$.

Ce qui demeure encore difficile est la question des conditions à poser sur ces traces $\{\gamma_{-k}u(x), \cdots, \gamma_{m-k-1}u(x)\}$ (notons son transposé par $\vec{u}(x)$). Dans la théorie d'Amon-Douglis-Nirenberg et de Schechter, il s'agissait d'une condition algébrique qui s'exprimait, "Les opérateurs au bord, qui définissent les conditions aux limites, *recouvrent* L". Nous appelons cette condition celle de Shapiro-Lopatinski (en bref, de (S.L.)). Dans le cas présent (dégénéré), nous pouvons enfin formuler une condition analogue, appelée aussi celle de (S. L.), en utilisant la théorie de Fuchs pour les opérateurs différentiels ordinaires. Et, comme conséquence, nous verrons que le nombre des conditions aux limites à poser est aussi égal à $b=m/2$. Mais la détermination de ce nombre n'était pas banale, au moins pour l'auteur. Le tiers de ce mémoire y est consacré.

Le résultat principal de ce mémoire est l'estimation a priori énoncé comme le Théorème 2 dans le paragraphe 6 (voir l'inégalité (6. 20)), où nous trouvons une analogie visible avec l'estimation a priori connue dans le cas non dégénéré (on peut poser $k=0$ dans (6. 20)). Nous pouvons en tirer la conclusion suivante: Autant que nous nous bornions aux opérateurs du type (0. 11), nous avons l'estimation a priori et un certain théorème d'existence et d'unicité des solutions sous certaines conditions en plus. Et, même la représentation des solutions par des noyaux est possible. Ce sont tout à fait analogues au cas non dégénéré.

Ce qui reste à faire est de généraliser cette estimation a priori au cas d'opérateurs généraux du type (0. 1) définis dans un ouvert quelconque Ω de $\boldsymbol{R}^n$. Apparemment, nous ne pouvons plus traduire l'inégalitée (6. 20) mot à mot au cas général, parce que nous devons changer la définition (0. 12) des traces d'ordre négatif. Alors, dans ce mémoire, nous ne discutons rien sur cette généralisation.

Nous expliquons la relation entre les paragraphes de ce mémoire.

Le §1 a pour but de définir l'espace fonctionnel W_k^m. Dans le §2, nous traitons les opérateurs du type (0. 11) mais d'une seule variable t, et nous posons la condition "indicielle" sur L et la condition (S.L.) sur les conditions aux limites. Le Théorème 1 énoncé dans ce §2 est le plus fondamental. Nous démontrons le Théorème 1 dans le §3 sous la réserve des trois propositions importantes. Nous traitons, dans le §6, les opérateurs du type (0. 11) de $(n+1)$ variables (x, t), où le Théorème 2 est le plus important dans ce mémoire comme nous avons déjà expliqué. Le Théorème 3 n'est qu'un corollaire du Théorème 1. Donc, ces §§1, 2, 3 et 6 forment la ligne principale. Les autres paragraphes, §4, §5 et § Appendice, sont auxiliaires. Ce sont consacrés à démontrer les trois propositions utilisées dans le §3.

$$\begin{tikzcd} \S 1 \arrow[r] & \S 2 \arrow[r] & \S 3 \arrow[r] & \S 6 \\ & \S 4 \arrow[ur] \arrow[r] & \S 5 \arrow[u] & \S A \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Le présent mémoire a été écrit pendant le séjour de l'auteur à la Faculté des Sciences de Paris sous la direction de Monsieur le Professeur J. L. Lions. L'auteur désire lui exprimer sa reconnairrance profonde pour son encouragement. L'auteur remercie aussi à Monsieur D. Fujiwara qui a minutieusement examiné le manuscrit au prix de beaucoup de temps.

Le résultat concernant des opérateurs d'une seule variable a été annoncé dans [9].

§1. Espaces de Sobolev avec poids W_μ^λ

Désignons $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}_+$ les ensembles des nombres complexes, réels et positifs respectivement. Etant donné un entier positif n, notons par $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ le demi-espace de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ défini par

$$(1.1) \qquad \boldsymbol{R}_+^{n+1} = \{(x, t) = (x_1, \cdots, x_n, t) \in \boldsymbol{R}^{n+1};\ t > 0\}.$$

Soient $L^2(\boldsymbol{R}^{n+1})$, $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ et $H^r(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ (r: entier$\geqq 0$) l'espace des fonctions $u(x, t)$ de carrée sommable sur $\boldsymbol{R}^{n+1}$, celui sur $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ et l'espace de Sobolev habituel d'ordre r sur $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ respaectivement. Ce sont tous espaces hilbertiens sur $\boldsymbol{C}$. Le complété de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ dans $H^r(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ est noté par $H_0^r(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$. La transformation de Fourier $\mathscr{F}$: $L^2(\boldsymbol{R})\to L^2(\boldsymbol{R})$ en une seule variable est définie par

$$f(t)\to\mathscr{F}f(\tau)=\mathscr{F}_{t\to\tau}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\tau}dt, \tag{1.2}$$

et celle en plusieurs variables est définie analoguement.

Etant donnés, en général, deux entiers λ et μ tels que $0\leqq\mu\leqq\lambda$, nous définissons un espace vectoriel complexe W_μ^λ par

$$W_\mu^\lambda=\{u=u(x,t)\in H^{\lambda-\mu}(\boldsymbol{R}_+^{n+1});\ t^\mu u(x,t)\in H^\lambda(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\}. \tag{1.3}$$

W_μ^λ est un espace hilbertien muni de la norme suivante

$$\|u\|_{W_\mu^\lambda}=\{\|u(x,t)\|^2_{H^{\lambda-\mu}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})}+\|t^\mu u(x,t)\|^2_{H^\lambda(\boldsymbol{R}_+^{n+1})}\}^{1/2} \tag{1.4}$$

Soit $u=u(x,t)$ un élément quelconque de W_μ^λ. Il existe alors les λ fonctions en x que nous appelons les traces de u

$$\gamma_j u(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\downarrow 0}D_t^j u(x,t), & \text{pour } 0\leqq j\leqq\lambda-\mu-1, \text{ si } \lambda>\mu,\\ (-1)^{-j-1}\displaystyle\int_0^\infty t^{-j-1}u(x,t)dt, & \text{pour } -\mu\leqq j\leqq -1, \text{ si } \mu\geqq 1,\end{cases} \tag{1.5}$$

où $D_t=i^{-1}\partial/\partial t$. Ce sont des fonctions en x définies presque partout dans $\boldsymbol{R}^n$. Nous écrivons par $\vec{u}(x)$ le λ-vecteur formé par ces traces:

$$\vec{u}(x)\equiv\begin{pmatrix}\gamma_{-\mu}u(x)\\ \cdots\\ \gamma_{-1}u(x)\\ \gamma_0 u(x)\\ \cdots\\ \gamma_{\lambda-\mu-1}u(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u_{-\mu}(x)\\ \cdots\\ u_{-1}(x)\\ u_0(x)\\ \cdots\\ u_{\lambda-\mu-1}(x)\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Nous voyons facilement que l'application $u(x,t)\to\vec{u}(x)$ est linéaire et continue de l'espace W_μ^λ sur le produit des λ espaces comme suit

$$\prod_{j=-\mu}^{\lambda-\mu-1}H^{\lambda-\mu-j-1/2}(\boldsymbol{R}^n)=H^{\lambda-1/2}(\boldsymbol{R}^n)\times\cdots\times H^{1/2}(\boldsymbol{R}^n). \tag{1.7}$$

D'autre part, nous pouvons démontrer la caractérisation suivante de l'espace W_μ^λ plus précise que la définition (1.3):

(1. 8) $\quad W_\mu^\lambda = \{u(x,t) \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\,;\; t^\mu u(x,t) \in H^\lambda(\boldsymbol{R}_+^{n+1}) \cap H_0^\mu(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\}.$

Il est aussi facile à voir la continuité de l'inclusion $W_\mu^\lambda \subset W_{\mu-1}^{\lambda-1}$ lorsque $\mu > 0$. Nous remarquons encore que l'espace $\mathcal{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^{n+1}})$ est dense dans W_μ^λ.

Ensuite, l'espace $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ (a fortiori l'espace W_μ^λ) s'identifie avec un sous-espace vectoriel de $L^2(\boldsymbol{R}^{n+1})$ par le prolongenent par 0 en dehors de $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ de chaque élément. Nous écrivons cette identification par $u(x,t) \to \tilde{u}(x,t)$:

(1. 9) $\quad u(x,t) \in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}) \to \tilde{u}(x,t)\,(\in L^2(\boldsymbol{R}^{n+1})) = \begin{cases} u(x,t), & \text{si } t>0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit donc $u(x,t)$ un élément de W_μ^λ avec $\mu \geqq 1$. Alors, les traces $\gamma_{-h} u(x)$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ d'indices négatives s'écrivent encore

(1. 10) $\quad \gamma_{-h} u(x) = D_\tau^{h-1} \{\underset{t\to\tau}{\mathcal{F}}[\tilde{u}(x,t)]\}\,|_{\tau=0}, \quad$ pour $1 \leqq h \leqq \mu$, si $\mu \geqq 1$.

Nous pouvons également considérer les mêmes espaces W_μ^λ lorsque $n=0$. Dans ce cas, la variable x n'intervient plus. Ce sont des fonctions $u(t)$ d'une seule variable t définis analoguement à (1. 3). Leurs propriétés sont aussi analogues à celles en plusieurs variables, la seule différence est que les traces $\gamma_j u$ sont tous nombres complexes, donc que l'application $u(t) \to \vec{u}$ est linéaire et continue de W_μ^λ dans $\boldsymbol{C}^\lambda$.

Les propriétés des W_μ^λ énumérées dans ce paragraphe sont presque toutes faciles à vérifier sauf la caractérisation (1. 8). Pour voir celle-ci, il suffira de nous rappler, par exemple, le fait suivant: Dans le cas d'une seule variable t, l'application $v(t) \to t^{-1} v(t)$ est linéaire et continue de $H_0^r(\boldsymbol{R}_+)$ dans $H_0^{r-1}(\boldsymbol{R}_+)$, où r est un entier positif quelconque. Pour le démontrer, nous pouvons référer l'inégalité n^0 330 de Hardy-Littlewood-Polya [5].

§2. Résultat pour les opérateurs d'une seule variable t

Les opératures L que nous traitons dans ce mémoire sont d'une seule variable t sauf dans le paragraphe 6. Nous nous trouvons, dans ce paragraphe, dans la situation suivante. Nous considérons un opérateur différentiel ordinaire $L=L(t;\, D_t)$ defini sur la demi-droite $\boldsymbol{R}_+$ ayant la forme

$$(2.1)\qquad Lu(t)\equiv L(t;\, D_t)u(t)\equiv\sum_{h=0}^{k} P^h(D_t)\{t^{k-h}u(t)\},$$

où $D_t=i^{-1}d/dt$, et

(i) *Les* $P^h(D_t)\,(0\leqq h\leqq k)$ *sont des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre* $\leqq(m-h)$ *à coefficients constants complexes*:

$$(2.2)\qquad P^h(D_t)=\sum_{j=0}^{m-h} p_j^h D_t^j,\ (p_j^h\in \boldsymbol{C}\ \textit{pour}\ 0\leqq h\leqq k\ \textit{et}\ 0\leqq j\leqq m-h),$$

et les m *et* k *sont deux entiers donnés tels que*

$$(2.3)\qquad 0<k\leqq m\ (\textit{avec}\ m:\textit{pair ou impair});$$

(ii) *Parmi eux,* $P^0(D_t)$ *est un opérateur elliptique d'ordre* m *avec* $p_m^0=1$, *donc, le polynôme* $P^0(\tau)$ *ne s'annule jamais sur* $\boldsymbol{R}$;

(iii) *Soient* m_+ *et* m_- *les nombres des zéros du polynôme* $P^0(\tau)$ *situés dans les demi-plans* $Im.\,\tau>0$ *et* $Im.\,\tau<0$ *respectivement. On a alors* $m=m_++m_-$. *Le cas* $m_+=0$ *ou* $m_-=0$ *est permis.*

Dans ces conditions, nous pouvons regarder l'opérateur L comme une application linéaire continue de W_k^m dans $W_0^0=L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Et, de plus, l'application $u(t)\to\vec{u}$ est linéaire continue de W_k^m dans $\boldsymbol{C}^m$, où $\vec{u}$ a été défini par (1.6), c'est-à-dire,

$$(2.4)\qquad \vec{u}\equiv\begin{pmatrix}\gamma_{-k}u\\ \cdots\\ \gamma_{-1}u\\ \gamma_0 u\\ \cdots\\ \gamma_{m-k-1}u\end{pmatrix},\ \text{si}\ 0<k<m;\ \text{et}\ \equiv\begin{pmatrix}\gamma_{-k}u\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ \gamma_{-1}u\end{pmatrix},\ \text{si}\ 0<k=m.$$

Deuxièmement, nous pouvons considérer la transformée de Fourier $\widehat{L}\equiv\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)$ de l'opérateur L:

$$(2.5)\qquad \widehat{L}\equiv\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)\equiv\sum_{h=0}^{k} P^h(\tau)(-D_\tau)^{k-h},\quad \text{où}\ D_\tau=i^{-1}d/d\tau.$$

Si $k>m$, nous introduisons, de plus, $(m-k)$ polynômes $\{Q_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$:

$$(2.6)\qquad Q_q(\tau)=\sum_{h=0}^{k}\sum_{j=h+q+1}^{m+h-k} h!\, i^{-h-1}\binom{h+q}{h} p^{k-h}{}_j\tau^{j-h-q-1},\ 0\leqq q\leqq m-k-1.$$

Les $Q_q(\tau)$ sont d'ordre $\leqq(m-k-1-q)$ $(0\leqq q\leqq m-k-1)$.

Le lemme suivant est facile à vérifier, par un calcul direct pour $u(t)\in\mathcal{D}(\overline{R_+})$, et par passage à la limite pour $u(t)\in W_k^m$ quelconque.

Lemme 2.1: *Si* $u(t)\in W_k^m$, *nous avons alors*

$$(2.7)\qquad \hat{L}(\tau;\ D_\tau)\mathcal{F}\tilde{u}(\tau)-\mathcal{F}(Lu)^\sim(\tau)=\begin{cases}\sum_{q=0}^{m-k-1}\gamma_q u\cdot Q_q(\tau), & \text{si } 0<k<m;\\ 0, & \text{si } 0<k=m.\end{cases}$$

Nous pouvons maintenant poser un problème aux limites que nous allons résoudre dans la suite. Il s'agit de trouver des solutions $u(t)\in W_k^m$ de l'équation différentielle

$$(2.8)\qquad Lu(t)=g(t),\ \text{pour } g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)\ \text{donnée.}$$

Lorsque $m_+=0$, c'est de rechercher si l'opérateur L applique W_k^m *sur* $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ ou non. Mais si $m_+>0$, l'opérateur L seul ne suffit pas pour déterminer la solution unique de l'équation (2.8) dans l'espace W_k^m. Dans ce cas, on se donne encore une application linéaire $\mathcal{B}$ de $\boldsymbol{C}^m$ sur $\boldsymbol{C}^{m_+}$ (c'est-à-dire, une $(m_+\times m)$-matrice), et un problème se pose par (2.8) et par une condition linéaire sur $\vec{u}$:

$$(2.9)\qquad \mathcal{B}\vec{u}=\boldsymbol{b},\ \text{pour } \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m_+}\ \text{donné.}$$

Autrement dit, lorsque $m_+>0$, le problème est posé par le couple $\{L, \mathfrak{B}\}$.

Voici le problème aux limites exact:

Probleme aux limites:

Cas $m_+=0$: *Etant donnée une fonction* $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$, *chercher une solution* $u(t)\in W_k^m$ *de l'équation* (2.8);

Cas $m_+>0$: *Etant donnés une fonction* $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ *et un* m_+-*vecteur* $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m_+}$, *chercher une solution* $u(t)\in W_k^m$ *satisfaisant à* (2·8) *et à* (2.9).

Cette formulation du problème aux limites est déjà classique dans la théorie des équations elliptiques non-dégénérées (Voir, par exemple, Schechter [7], Agmon-Douglis-Nirenberg [1], et Hörmander

[6]). Dans cette théorie classique, il s'agissait d'une condition sur $\mathscr{B}$ (lorsque $m_+>0$), dit de Shapiro-Lopatinski. Pour le problème présent, nous pouvons également formuler une condition analogue que nous appelons aussi celle de Shapiro-Lopatinski. Nous allons éclaircir cette analogie sous une condition supplémentaire sur L. Mais, avant de le faire, il sera probablement utile de nous retourner un peu sur ce que nous avons fait dans la théorie classique.

Un opérateur elliptique non dégénéré correspond à notre L avec $k=0$. Alors, sa transformée de Fourier $\widehat{L}$ n'est qu'un polynôme $P^0(\tau)$. Regardons la formule (2. 7) et détournons, pour le moment, les mêmes notations en pensant que $k=0$. Les équations (2. 7) et (2. 8) nous donnent tout de suite

$$\text{(a)} \qquad \mathscr{F}\tilde{u}(\tau)=P^0(\tau)^{-1}\{\mathscr{F}\tilde{g}(\tau)+\sum_{q=0}^{m-1}\gamma_q u\cdot Q_q(\tau)\}.$$

Dans cette formule (a), le premier membre se prolonge comme une fonction holomorphe dans le demi-plan inférieur Im. $\tau<0$. Donc, pour que l'équation (a) soit vraie, il faut et il suffit que son deuxième membre soit aussi holomorphe dans Im. $\tau<0$, plus précisément, holomorphe à chaque zéro du polynôme $P^0(\tau)$ situé dans le demi-plan inférieur Im. $\tau<0$. Pour fixer les idées, nous posons $g=0$ dans la formule (a). Et designons par E le sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{C}^m$ formé par les vecteurs $\vec{U}={}^T\{u_0,\cdots,u_{m-1}\}$ (T se lit "le transposé de $\cdots$") tels que

$$\text{(b)} \qquad P^0(\tau)^{-1}\sum_{q=0}^{m-1}u_q\cdot Q_q(\tau) \text{ soit holomorphe dans Im. } \tau<0.$$

Nous voyons que l'espace E est de dimension m_+. Alors, pour avoir une solution de l'équation $Lu=0$ et de $\mathscr{B}\vec{u}=\boldsymbol{b}$ pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m_+}$, il faut et il suffit que l'application $\mathscr{B}$ restreinte à E soit du rang exactement m_+, c'est-à-dire, que

$$\text{(c)} \qquad \mathscr{B}E=\boldsymbol{C}^{m_+}.$$

Cette dernière condition (c) était manifestement la condition de Shapiro-Lopatinski sur $\mathscr{B}$ dans le cas non dégénéré.

Nous revenons maintenant au cas $k>0$ qui nous intéresse. L'opérateur $\widehat{L}$ n'est plus polynôme, mais un opérateur différentiel d'ordre k à coefficients polynômes. Regardons encore la formule (2. 7) et considérons la fonction $\mathcal{F}\tilde{u}(\tau)$ comme une solution de cette équation différentielle par rapport à τ. La recherche sur l'holomorphie de $\mathcal{F}\tilde{u}(\tau)$ dans $\mathrm{Im}.\,\tau<0$ n'est autre chose que l'étude de l'opérateur $\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)$ au point de vue de la théorie de Fuchs. Sous cet aspect, il faut remarquer tout d'abord que *les points singuliers de* $\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)$ *sont tous les zêros du polynôme* $P^0(\tau)$ *et* $\tau=\infty$.

Nous commençons par définir un polynôme $\Phi_0(\rho)$ d'ordre k en ρ:

(2. 10) $$\Phi_0(\rho)\equiv\sum_{h=0}^{k} p^{k-h}{}_{m+h-k}\, i^h \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-h+1)}\,.$$

Alors, l'équation

(2. 11) $$\Phi_0(\rho)=0$$

peut être nommée *l'équation indicielle de l'opérateur* $\widehat{L}$ *au point* $\tau=\infty$. La condition suivante posée sur ses racines est naturellement une hypothèse sur les coefficients de L:

Condition (I) sur L: *Les racines* $\{\rho_j\}_{j=1}^{k}$ *de l'équation* $\Phi_0(\rho)=0$ *satisfont aux deux conditions suivantes*:

(I–1) *Les parties réelles des* ρ_j *sont toutes* $<(k-m-\frac{1}{2})$;

(I–2) *Si* $k\geqq 2$, *aucune des différences* $\rho_l-\rho_j$ $(1\leqq l<j\leqq k)$ *n'est entier (en particulier, chaque racine* ρ_j *est simple).*

Sous cette condition, en correspondant à chacune ρ_j $(1\leqq j\leqq k)$ des racines, nous pouvons chercher une solution de l'équation

(2. 12) $$\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)u(\tau)=0$$

ayant la forme suivante dans un voisinage de $\tau=\infty$:

(2·13) $$\mathcal{U}_j^\infty(\tau)=\tau^{\rho_j}\mathcal{W}_j^\infty(1/\tau), \quad \text{pour } 1\leqq j\leqq k,$$

où $\mathcal{W}_j^\infty(\zeta)$ est une certaine fonction de ζ holomorphe au point $\zeta=0$ avec $\mathcal{W}_j^\infty(0)=1$. Et le système formé par ces k solutions de l'équation (2. 12) est un système des solutions linéairement indépendantes (au sens wronskien). De plus, la Condition (I-1) ci-dessus garantit un bon comportement de ces solutions et de leurs dérivées au point $\tau=\infty$.

Sous cette Condition (I) sur L, nous pouvons démontrer l'existence d'une application linéaire $\mathcal{R}$ de $\boldsymbol{C}^m$ dans lui-même (c'est-à-dire, une matrice carrée d'ordre m) déterminée par L. Nous verrons, dans le paragraphe 3, *que $\mathcal{R}$ est une projection ($\mathcal{R}^2=\mathcal{R}$) du rang m_+, et dans le paragraphe* 5, *qu'elle joue un rôle essentiel dans l'étude d'holomorphie des solutions de l'équation* (2.12) *à chaque zéro du polynôme $P^0(\tau)$.* Mais, pour le moment, nous admettons l'existence et ces propriétés de la matrice $\mathcal{R}$. Ceci nous permet enfin de formula la condition de Shapiro-Lopatinski sur $\mathcal{B}$, lorsque $m_+>0$:

Condition (S.L.) sur $\mathcal{B}$, lorsque $m_+>0$: *Il existe une application linéaire $\mathcal{D}$ de $\boldsymbol{C}^{m_+}$ dans $\boldsymbol{C}^m$ (c'est-à-dire, une ($m\times m_+$)-matrice) telle que*

(S.L.-1) $\mathcal{B}\mathcal{D}=$ *l'identité sur* $\boldsymbol{C}^{m_+}$, *et que*

(S.L.-2) $\mathcal{R}\mathcal{D}=\mathcal{D}$.

Cela posé, nous énonçons le theorème d'existence et d'unicité qui sera démontré dans le paragraphe 3:

Theoreme 1: *Supposons la Condition (I) sur L. Alors,*

Cas $m_+=0$: *L'application $u(t)\to Lu(t)$ est un isomorphisme de W_k^m sur $L^2(\boldsymbol{R}_+)$;*

Cas $m_+>0$: *L'application $u(t)\to\{Lu(t), \mathcal{B}\vec{u}\}$ est un isomorphisme de W_k^m sur $L^2(\boldsymbol{R}_+)\times\boldsymbol{C}^{m_+}$, si la matrice $\mathcal{B}$ satisfait à la condition (S.L.).*

Remarque 2.1: Le mot "isomorphisme" signifie celui algébrique et topologique. Donc, sous les hypothèses du Théorème 1; il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que l'on ait

(2.14) $$C_1\|u\|_{W_k^m}\leqq\|Lu\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+)}\leqq C_2\|u\|_{W_k^m}, \quad \text{si } m_+=0;$$

(2.15) $$C_1\|u\|_{W_k^m}\leqq\|Lu\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+)}+\|\mathcal{B}\vec{u}\|_{\boldsymbol{C}^{m_+}}\leqq C_2\|u\|_{W_k^m}, \quad \text{si } m_+>0,$$

quel que soit $u\in W_k^m$. Ces inégalités correspondent naturellement à l'estimation a priori dans la théorie classique sur les problèmes aux limites généraux elliptiques non dégénérés.

Remarque 2.2: Nous notons une propriété de l'opérateur L concernant l'homothétie par rapport à la variable t. Nous écrivons L sous la forme suivante:

$$Lu(t)=\sum_{j=0}^{m}L^j(t;\ D_t)u(t), \tag{2.16}$$

où les L^j $(0\leqq j\leqq m)$ sont définis comme suit en utilisant la formule (2.2):

$$L^j(t;\ D_t)u(t)\equiv\sum_{h=0}^{\min.(k,m-j)}p^h{}_{m-j-h}D_t^{m-j-h}\{t^{k-h}u(t)\},\ \text{pour}\ 0\leqq j\leqq m. \tag{2.17}$$

Maintenant, nous effectuons une homothétie $t\rightarrow s$:

$$s=\lambda t,\ \text{où}\ \lambda>0\ \text{est une constante fixe quelconque.} \tag{2.18}$$

Etant donnée une fonction quelconque $u(t)$ définie sur $\boldsymbol{R}_+$, nous l'écrivons par $v(s)$ comme la fonction en s: $u(t)=v(s)$. Nous avons alors

$$L^j(s;\ D_s)v(s)=\lambda^{k+j-m}L^j(t;\ D_t)u(t),\quad \text{pour}\ 0\leqq j\leqq m. \tag{2.19}$$

Ceci nous éclaircit que la Condition (I) sur L est invariante par l'homothétie en t, car elle est une hypothèse posée seulement sur L^0 (voir la formule (2.10)). Cette petite remarque est très importante et utile, lorsque nous étudions des opérateurs en plusieurs variables au moyen de la transformation de Fourier par rapport aux variables tangentielles. Cette étude sera faite dans le paragraphe 6. Nous pouvons dire que le Théorème 3 dans le paragraphe 6 n'est qu'un corollaire du Théorème 1 ci-dessus.

Exemple 2.1: Il sera mieux de citer un exemple le plus simple possible. Considérons le cas où $m=2$, $k=1$, $m_+=m_-=1$ et l'opérateur L est défini par

$$\begin{aligned}L(t;\ D_t)u(t)&\equiv(D_t^2+1)(tu(t))+2iD_tu(t)\\&\equiv t\{-u''(t)+u(t)\}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dans ce cas, nous voyons que $P^0(\tau)=\tau^2+1$ et que $\Phi_0(\rho)\equiv i(\rho+2)$. Donc, la Condition (I) sur L est satisfaite. Si l'on calcule la matrice $\mathscr{R}$ suivant la construction dans le paragraphe 3, nous aurons sa forme concrète:

$$\mathscr{R}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

$\mathscr{R}$ est évidemment du rang 1. Alors, il fait et il suffit de poser une seule condition aux limites sur $\vec{u}$ qui s'écrit

$$\mathscr{B}\vec{u}\equiv\alpha\int_0^\infty u(t)dt+\beta u(0)=\text{un nombre donné}, \tag{2.22}$$

où les α et β sont des constantes complexes sur lesquelles la Condition (S.L.) se traduit

$$\alpha+\beta\neq 0. \tag{2.23}$$

Et, le problème aux limites se pose comme suit: Etant donnés une fonction $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ et un nombre complexe b quelconques, chercher une solution $u(t)\in W_1^2$ vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} t\{-u''(t)+u(t)\}=g(t) \quad \text{sur } \boldsymbol{R}_+, \text{ et} \\ \alpha\int_0^\infty u(t)dt+\beta u(0)=b. \end{cases} \tag{2.24}$$

Alors, il existe la solution unique qui s'écrit

$$u(t)=\int_0^\infty G(t, s)g(s)ds+b\cdot K(t), \quad \text{où} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} G(t, s)=\{2s(\alpha+\beta)\}^{-1}\{(\alpha+\beta)e^{-|t-s|}+(\alpha-\beta)e^{-t-s}-2\alpha e^{-t}\}, \text{ et,} \\ K(t)=\dfrac{1}{\alpha+\beta}e^{-t}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Nous reprendrons le même exemple à la fin du paragraphe 5.

§3. Démonstration du Théorème 1

Dans ce paragraphe, nous introduisons d'abord un système fondamental $\{\hat{\xi}_j(\tau, \sigma)\}_{j=1}^k$ des solutions de l'équation (2.12). Ses propriétés, que nous allons utiliser pour démontrer le Théorème 1, se résument en Propositions 3.1 et 3.2 qui suivent. A l'aide de ces constructions préliminaires, nous pouvons résoudre l'équation (2. 7) par rapport à $\mathcal{F}\tilde{u}(\tau)$, et nous pouvons aussi définir la matrice $\mathcal{R}$ dont nous avons prévu l'existence dans le paragraphe 2. La Proposition 3. 3 est l'une des plus importantes dans ce mémoire, mais nous réservons sa preuve pour le paragraphe 5, parce qu'elle est très longue et qu'elle n'est pas le sujet principal du présent paragraphe. Et, nous passons directement à la démonstration du Théorème 1.

Nous commençons par définir le système des solutions fondamentales. Soit σ un paramètre réel. Désignons par $\{\hat{\xi}_j(\tau,\sigma)\}_{j=1}^k$ le système des solutions uniques des équations différentielles

$$(3.1)\qquad \left.\begin{cases}\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)\hat{\xi}_j(\tau,\sigma)=0, & \text{pour } \tau\in\boldsymbol{R},\\ D_\tau^{l-1}\hat{\xi}_j(\tau,\sigma)\,|_{\tau=\mu}=\delta_j^l, & \text{pour } 1\leqq l\leqq k,\end{cases}\right\}\ \text{pour } 1\leqq j\leqq k.$$

Comme $\widehat{L}(\tau;\,(D_\tau)$ est à coefficients polynômes et que tout point τ réel est point régulier (point d'holomorphie) de $\widehat{L}$, les fonctions $\hat{\xi}_j(\tau,\sigma)$ $(1\leqq j\leqq k)$ sont holomorphes en deux variables (τ,σ) dans un voisinage de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$.

Ensuite, étant donnée une fonction $\varphi(\tau)$ (polynôme ou de classe $L^2(\boldsymbol{R})$), notons par $\widehat{E}\varphi(\tau)$ la solution unique de l'équation

$$(3.2)\qquad \left.\begin{cases}\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)(\widehat{E}\varphi)(\tau)=\varphi(\tau), & \text{presque partout } \tau\in\boldsymbol{R},\\ D_\tau^{l-1}(\widehat{E}\varphi)(0)=0, & \text{pour } 1\leqq l\leqq k.\end{cases}\right\}$$

Cet opérateur $\varphi(\tau)\rightarrow\widehat{E}\varphi(\tau)$ est représenté par un noyau:

$$(3.3)\qquad \widehat{E}\varphi(\tau)=(-1)^k i\int_0^\tau\frac{\hat{\xi}_k(\tau,\sigma)}{P^0(\sigma)}\varphi(\sigma)d\sigma.$$

En utilisant ce système $\{\hat{\xi}_j(\tau,\sigma)\}_{j=1}^k$ et cet opérateur $\widehat{E}$, nous définissons ensuite m fonctions $\widehat{U}_q(\tau)$ $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$ en posant

$$(3.4)\qquad \widehat{U}_q(\tau)=\begin{cases}\hat{\xi}_{-q}(\tau,0), & \text{si } -k\leqq q\leqq -1;\\ \widehat{E}Q_q(\tau), & \text{si } 0\leqq q\leqq m-k-1, \text{ lorsque } k<m.\end{cases}$$

Et, nous définissons encore une fonction $\mathcal{C}\widehat{V}(\tau;\,\vec{F})$ dépendante linéairement à un m-vecteur $\vec{F}\in\boldsymbol{C}^m$ comme suit

(3. 5) $\quad \widehat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})=\sum_{q=-k}^{m-k-1} F_q \widehat{U}_q(\tau), \quad$ pour $\vec{F}={}^{T}\{F_{-k}, \cdots, F_{m-k-1}\}$.

Nous utilisons de plus des notations suivantes:

(3. 6) $\quad E=\mathcal{F}^{-1}\widehat{E}\mathcal{F}, \quad$ et, $\quad \mathcal{V}(t;\ \vec{F})=\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}[\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})]$,

où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier en t, et $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse.

Alors, l'équation (2. 7) se résoud tout simplement comme suit:

Lemme 3. 1: *Soit $u(t) \in W_k^m$ quelconque. Nous avons alors*

(3. 7) $\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}\tilde{u}(\tau)=\widehat{E}\{\mathcal{F}(Lu)^{\sim}\}(\tau)+\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{u}), \text{ ou encore,} \\ \tilde{u}(t)=E((Lu)^{\sim})(t)+\mathcal{V}(t;\ \vec{u}), \end{array}\right\}$

où le vecteur $\vec{u} \in \boldsymbol{C}^m$ est celui défini par (2. 4).

Maintenant, nous introduisons une convention. Etant donnée, en général, une fonction $f(t)$ définie sur $\boldsymbol{R}$, désignons par $f_+(t)$ sa restriction sur $\boldsymbol{R}_+$. Nous écrivons aussi par $f_+(t)$ le prolongement par 0 de $f_+(t)$ en dehors de $\boldsymbol{R}_+$ (ce prolongement a été écrit comme $(f_+(t))^{\sim}$ suivant la notation du paragraphe 1).

Cela posé, nous énonçons les deux propositions suivantes démontrées dans le paragraphe 4. Elles garantissent que chaque terme dans la formule (3. 7) restreint à $\boldsymbol{R}_+$ appartient à l'espace W_k^m.

Proposition 3. 1: *L'application $g(t) \to (E\tilde{g})_+(t)$ est linéaire continue de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ dans W_k^m.*

Proposition 3. 2: *L'application $\vec{F} \to \mathcal{V}_+(t; \vec{F})$ est linéaire continue de $\boldsymbol{C}^m$ dans W_k^m.*

Au cours des preuves de ces propositions, la Condition (I) sur L dans le paragraphe 2 sera utilisée comme une hypothèse essentielle pour obtenir une bonne estimation des $\widehat{U}_q(\tau)$ et de leurs dérivées, lorsque τ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dès lors que nous admettons la Proposition 3. 2, nous pouvons enfin définir la matrice $\mathcal{R}$ en posant

(3. 8) $\quad \mathcal{R}\vec{F}=(\mathcal{V}_+(\cdot\,;\ \vec{F}))^{\rightharpoonup}, \quad$ pour $\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m$ quelconque,

où l'opération $\rightarrow$ est celle définie par (2. 4). Nous allons voir tout d'abord que cette matrice $\mathcal{R}$ est une projection. Regardons les formules (3. 4) et (3. 5), d'où l'on voit que la fonction $\hat{L}\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ n'est qu'un polynôme pour tout $\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m$, donc que $L\mathcal{V}(t; \vec{F})$ est une distribution ponctuelle à support l'origine $t=0$. Ceci montre que

$$(3.9) \qquad (L\mathcal{V})_+(t; \vec{F})=0, \quad \text{pour tout } \vec{F} \in \boldsymbol{C}^m.$$

Et nous appliquons (3. 7) à $u(t)=\mathcal{V}_+(t; \vec{F}) \in W_k^m$ de sorte que nous avons

$$(3.10) \quad \mathcal{V}_+(t; \vec{F})=\mathcal{V}(t; \mathcal{R}\vec{F})=\mathcal{V}_+(t; \mathcal{R}\vec{F}), \quad \text{pour tout } \vec{F} \in \boldsymbol{C}^m.$$

Les deux extrémités de cette formule opérées par $\mathcal{R}$ sont égales. Donc, $\mathcal{R}^2=\mathcal{R}$, et la matrice $\mathcal{R}$ est une projection.

La proposition suivante sera démontrée dans le paragraphe 5 en utilisant le résultat du paragraphe Appendice.

Proposition 3. 3: *Le rang de la matrice $\mathcal{R}$ est égal à m_+, c'est-à-dire, au nombre des zéros du polynôme $P^0(\tau)$ situés dans le demi-plan supérieur $Im. \tau>0$.*

Ensuite, si l'on restreint chaque membre de la formule (3. 7) à $\boldsymbol{R}_+$, on voit facilement le lemme suivant grâce à (3. 10):

Lemme 3. 2: *Soit $u(t) \in W_k^m$ quelconque. Nous avons alors*

$$(3.11) \qquad \tilde{u}(t)=(E((Lu)^{\sim}))_+(t)+\mathcal{V}(t; \mathcal{R}\vec{u}).$$

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 1. Nous commençons par l'unicité.

Démonstration de l'unicité: Soit $u(t)$ une solution$\in W_k^m$ de l'équation (2. 8) avec $g(t)=0$, et de (2. 9) avec $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ lorsque $m_+>0$.

$$(a) \qquad \tilde{u}(t)=\mathcal{V}(t; \mathcal{R}\vec{u}).$$

Il suffit donc de voir que $\mathcal{R}\vec{u}=\vec{0}$.

Soit d'abord $m_+=0$. Alors, par la Proposition 3. 3, $\mathcal{R}=0$ (la matrice nulle), donc, évidemment $\mathcal{R}\vec{u}=\vec{0}$.

Soit ensuite $m_+>0$. Nous nous rappelons de la Condition (S.L.) supposée sur $\mathscr{B}$. Premièrement, $\mathscr{B}$ est du rang m_+, parce que, quel que soit $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^{m_+}$, $\boldsymbol{x}=\mathscr{B}\mathscr{D}\boldsymbol{x}$ appartient à l'image par $\mathscr{B}$ de $\boldsymbol{C}^m$. Deuxièmement, la matrice $\mathscr{D}\mathscr{B}$ est une projection: $(\mathscr{D}\mathscr{B})^2=(\mathscr{D}\mathscr{B})$. Troisièmement, l'image de $\boldsymbol{C}^m$ par $\mathscr{D}\mathscr{B}$ s'identifie avec $\mathscr{R}\boldsymbol{C}^m$. [En effet, on a d'abord, $\mathscr{D}\mathscr{B}\boldsymbol{C}^m\subset\mathscr{R}\boldsymbol{C}^m$, car $\mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{B}=\mathscr{D}\mathscr{B}$. Ensuite, d'une part, on a rang $(\mathscr{D}\mathscr{B})\leqq m_+$. D'autre part, $\mathscr{B}(\mathscr{D}\mathscr{B})=(\mathscr{B}\mathscr{D})\mathscr{B}=\mathscr{B}$, d'où l'on voit que $m_+=$rang $(\mathscr{B})\leqq$min.{rang $(\mathscr{B})$, rang $(\mathscr{D}\mathscr{B})$} $=$rang $(\mathscr{D}\mathscr{B})$. En somme, rang $(\mathscr{D}\mathscr{B})=m_+=$rang $(\mathscr{R})$, donc on sait que $\mathscr{D}\mathscr{B}\boldsymbol{C}^m=\mathscr{R}\boldsymbol{C}^m$.] Avec ces préparations, nous revenons à la formule (a). On a d'abord $\vec{u}=\mathscr{R}\vec{u}$, et celui-ci appartient à $\mathscr{D}\mathscr{B}\boldsymbol{C}^m$, il existe donc un $\vec{F}\in\boldsymbol{C}^m$ tel que $\vec{u}=\mathscr{R}\vec{u}=\mathscr{D}\mathscr{B}\vec{F}$. Effectuons $\mathscr{B}$ à chaque côté: $\mathscr{B}\vec{u}=\mathscr{B}\vec{F}$. Mais, $\mathscr{B}\vec{u}=\boldsymbol{0}$ par hypothèse. Donc, $\mathscr{B}\vec{F}=\boldsymbol{0}$. Ceci implique enfin que $\mathscr{R}\vec{u}=\vec{0}$.

La démonstration de l'unicité est ainsi terminée.

Démonstration de l'existence: Les équations (2. 8) et (2. 9) (seulement si $m_+>0$) se consistent des deux problèmes suivants. Le permier est de résoudre l'équation homogène

$$(3.12)\qquad \begin{cases} Lu(t)=g(t), \text{ pour } g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+) \text{ donnée quelconque,}\\ \text{avec la condition } \mathscr{B}\vec{u}=\boldsymbol{0} \text{ lorsque } m_+>0.\end{cases}$$

Et, le deuxième est de résoudre l'équation suivante seulement si $m_+>0$

$$(3.13)\qquad \begin{cases} Lu(t)=0, \text{ et,}\\ \mathscr{B}\vec{u}=\boldsymbol{b}, \text{ pour } \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m_+} \text{ donné quelconque.}\end{cases}$$

Si $m_+=0$, alors l'équation (3. 12) seule (sans condition sur $\vec{u}$) se suffit.

Proposition 3. 4: *Posons, pour* $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ *quelconque,*

$$(3.14)\qquad Gg(t)=\begin{cases}(E\tilde{g})_+(t), & si\ m_+=0;\\ (E\tilde{g})_+(t)-\mathcal{V}(t;\ \mathscr{D}\mathscr{B}((E\tilde{g})_+)^{\rightarrow}), & si\ m_+>0.\end{cases}$$

Alors, la fonction $u(t)=Gg(t)$ *est la solution unique de l'équation*

(3. 12) *dans l'espace* W_k^m. *L'application* G *est linéaire continue de* $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ *dans* W_k^m *(et surgective lorsque* $m_+=0$).

Preuve: La continuité de $G: L^2(\boldsymbol{R}_+)\to W_k^m$ est évidente par les Proposition 3. 1 et 3. 2. La surjectivité dans le cas $m_+=0$ l'est aussi par la formule (3. 11), où $\mathcal{R}=0$. Comme nous avons déjà établi l'unicité, il suffit de vérifier l'équation (3. 12). D'abord, nous avons $L(Gg)(t)=g(t)$ presque partout $t\in\boldsymbol{R}_+$ grâce à la définition de l'opérateur E et à (3. 9) (remarquons que $\mathcal{D}=\mathcal{R}\mathcal{D}$). Ensuite, nous avons

$$(Gg)^{\rightarrow}=((E\tilde{g})_+)^{\rightarrow}-\mathcal{D}\mathcal{B}((E\tilde{g})_+)^{\rightarrow},$$

d'où l'on a $\mathcal{B}(Gg)^{\rightarrow}=\boldsymbol{0}$, parce que $\mathcal{B}\mathcal{D}=$l'identité sur $\boldsymbol{C}^{m_+}$. C.Q.F.D.

Proposition 3. 5: *Soit* $m_+>0$. *Etant donné* $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m_+}$ *quelconque, posons*

$$K(t;\ \boldsymbol{b})=\mathcal{V}(t;\ \mathcal{D}\boldsymbol{b}). \tag{3. 15}$$

Alors, la fonction $u(t)=K(t;\ \boldsymbol{b})$ *est la solution unique de l'équation* (3. 13) *dans l'espace* W_k^m. *L'application* $K(t;\ \cdot)$ *est linéaire continue de* $\boldsymbol{C}^{m_+}$ *dans* W_k^m.

Preuve: La continuité de K est dûe à la Proposition 3. 2. La nullité de $LK(t;\ \boldsymbol{b})$ sur $\boldsymbol{R}_+$ suite de (3. 9). Et de plus

$$(K(\cdot\,;\ b))^{\rightarrow}=\mathcal{R}\mathcal{D}\boldsymbol{b}=\mathcal{D}\boldsymbol{b},$$

d'où l'on a $\mathcal{B}(K(\cdot\,;\ \boldsymbol{b}))^{\rightarrow}=\boldsymbol{b}$. C.Q.F.D.

La démonstration de l'existence dans le Théorème 1 est déjà faite lorsque $m_+=0$ par la Proposition 3. 4. Lorsque $m_+>0$, nous avons également vu que la solution unique W_k^m des équations (2. 8) et (2. 9), c'est-à-dire, de

$$Lu(t)=g(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}\vec{u}=\boldsymbol{b} \tag{3. 16}$$

s'écrit brièvement comme suit

$$u(t)=Gg(t)+K(t;\ \boldsymbol{b}). \tag{3. 17}$$

Le Théorème 1 dans le paragraphe 2 est donc complètement établi.

Remarque 3. 1: Nous pouvons appeler les opérateurs G et K (lorsque $m_+>0$) *l'opérateur de Green* et *le noyau de Poisson* respectivement par l'analogie avec ceux correspondants dans la théorie classique des problèmes aux limites généraux du type elliptique non dégénéré. L'opérateur de Green G est un isomorphisme de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ sur W_k^m lorsque $m_+=0$. Si, par contre, $m_+>0$, l'opérateur de Green G est un isomorphisme de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ sur un sous-espace vectoriel fermé de W_k^m, dit *le domaine de* $\{L, \mathscr{B}\}$, défini par

$$\mathscr{D}\{L, \mathscr{B}\} = \{u(t) \in W_k^m;\ \mathscr{B}\vec{u} = \mathbf{0}\}. \tag{3·18}$$

§4. Démonstrations des Propositions 3. 1 et 3. 2

Il s'agit maintenant d'estimer les fonctions $\{\hat{\xi}_j(\tau, \sigma)\}_{j=1}^k$ définies par (3. 1) et leurs dérivées d'ordre$\leqq k$ par rapport à τ. Nous sommes intéressés surtout à leur comportement à $+\infty$ et à $-\infty$. Nous précisons d'abord ce que nous devons estimer. Posons

$$N_j^p(\tau, \sigma) = |D_\tau^p \hat{\xi}_j(\tau, \sigma)|, \quad \text{pour } 0\leqq p\leqq k-1 \text{ et } 1\leqq j\leqq k. \tag{4. 1}$$

(Les k-èmes dérivées $|D_\tau^k \hat{\xi}_j(\tau, \sigma)|$ sont estimées par ces $N_j^p(\tau, \sigma)$ avec $0\leqq p\leqq k-1$ à l'aide de l'équation (3. 1)). Alors, pour obtenir la Proposition 3. 1, nous devons estimer les $N_k^p(\tau, \sigma)$ $(0\leqq p\leqq k-1)$ pour (τ, σ) qui parcourt les ensembles Σ_+ et Σ_-, où

$$\begin{cases} \Sigma_+ = \{(\tau, \sigma) \in \boldsymbol{R}^2;\ 0\leqq \sigma \leqq \tau < \infty\}, \text{ et,} \\ \Sigma_- = \{(\tau, \sigma) \in \boldsymbol{R}^2;\ -\infty < \tau \leqq \sigma \leqq 0\}. \end{cases} \tag{4. 2}$$

(Voir la représentation par noyau (3. 3) de l'opérateur $\widehat{E}$). Et, pour établir la Proposition 3. 2, nous devons de plus estimer les $N_j^p(\tau, 0)$ (pour $0\leqq p\leqq k-1$ et $1\leqq j\leqq k$) lorsque τ parcourt $\boldsymbol{R}$. Pour effectuer ces estimations, nous allons tirer le meilleur parti possible de la Condition (I) sur L posée dans le paragraphe 2.

Comme nous avons déjà remarqué dans le paragraphe 2, $\tau=\infty$ *est un point singulier régulier de l'opérateur* $\widehat{L}(\tau;\, D_\tau)$, c'est-à-dire, il existe un système $\{\mathcal{U}_j^\infty(\tau)\}_{j=1}^k$ des solutions linéairement indépendantes (au sens wronskien) de l'équation $\widehat{L}u(\tau)=0$ ayant les formes

$$\mathcal{U}_j^\infty(\tau)=\tau^{\rho_j}\mathcal{W}_j^\infty(1/\tau),\quad \text{pour } 1\leqq j\leqq k \tag{4.3}$$

avec de certaines fonctions $\mathcal{W}_j^\infty(\zeta)$ holomorphes dans un voisinage de $\zeta=0$, disons $|\zeta|<1/R$ (avec un $R>0$ convenable). Les fonctions n'ont aucune singularité logarithmique grâce à la Condition (I–2).

Posons encore

$$\rho_j'=\mathrm{Re.}\,\rho_j(<(k-m-\tfrac{1}{2}),\ \text{grâce à la Condition (I–1)}),\quad \text{pour } 1\leqq j\leqq k. \tag{4.4}$$

Voici deux estimations fondamentales:

Lemme 4.1: *Il existe les deux constantes C_1 et C_2 positives indépendantes de (τ, σ) telles que l'on ait*

(1°) *Pour* $0\leqq p\leqq k-1$ *et pour tout* $(\tau, \sigma)\in\Sigma_+\cup\Sigma_-$,

$$N_k^p(\tau, \sigma)\leqq C_1\frac{(|\sigma|+1)^{k-1}}{(|\tau|+1)^p}\sum_{j=1}^k\left(\frac{|\tau|+1}{|\sigma|+1}\right)^{\rho_j'}; \tag{4.5}$$

(2°) *Pour* $0\leqq p\leqq k-1$, $1\leqq j\leqq k$ *et pour tout* $\tau\in\boldsymbol{R}$,

$$N_j^p(\tau, 0)\leqq C_2\sum_{l=1}^k(|\tau|+1)^{\rho_l'-p}. \tag{4.6}$$

Preuve: Soit $\sigma\in\boldsymbol{R}$ quelconque fixe. Nous avons alors un système des contantes $\{c_{jl}(\sigma)\}_{j,l=1}^k$ dépendantes à σ tel que, pour tout $1\leqq j\leqq k$,

$$\hat{\xi}_j(\tau, \sigma)=\sum_{l=1}^k c_{jl}(\sigma)\mathcal{U}_l^\infty(\tau),\quad \text{lorsque } \tau>R, \tag{4.7}$$

et nous avons une formule analogue également pour $\tau<-R$, mais avec des $c_{jl}(\sigma)$ problement différentes. L'inégalité (4.6) est une conséquence immédiate de cette expression. Soit ensuite $(\tau, \sigma)\in\Sigma_+\cup\Sigma_-$ quelconque tel que $|\sigma|>R$. Alors, les coefficients $c_{kl}(\sigma)$ $(1\leqq l\leqq k)$ dans (4.7) sont calculées par la formule de Cramer et par la condition initiale (3.1). Ce sont fonctions rationnelles des $\{\mathcal{U}_j^\infty(\sigma)\}_{j=1}^k$ et de leurs dérivées d'ordre$\leqq(k-1)$, et nous les estimons

$$|c_{kl}(\sigma)|\leqq\mathrm{Cte.}|\sigma|^{k-1-\rho_l'},\quad \text{pour } |\sigma|>R \text{ et } 1\leqq l\leqq k, \tag{4.8}$$

indépendamment de σ, d'où l'on a (4.5). C.Q.F.D.

Démonstration de la Proposition 3.1: Il suffit de démontrer les continuités au sens suivant:

$$\|(|\tau|+1)^{m+p-k}D_\tau^p(\widehat{E\varphi})(\tau)\|_{L^2(\boldsymbol{R})}\leqq C_3\|\varphi(\tau)\|_{L^2(\boldsymbol{R})}, \tag{4.9}$$

pour tout $\varphi(\tau)\in L^2(\boldsymbol{R})$ et pour $0\leqq p\leqq k-1$,

avec une constante indépendante de φ. En tenant compte de la formule (3.3), nous posons

$$N(\tau,\sigma)=\begin{cases}\max\limits_{0\leqq p\leqq k-1}\left\{\dfrac{(|\tau|+1)^{m+p-k}}{|P^0(\sigma)|}N_k^p(\tau,\sigma)\right\}, & \text{pour } (\tau,\sigma)\in\Sigma_+\cup\Sigma_-;\\ 0, & \text{pour } (\tau,\sigma)\notin\Sigma_+\cup\Sigma_-;\end{cases} \tag{4.10}$$

et définissons un opérateur N par

$$\varphi(\tau)\to N\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}N(\tau,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma. \tag{4.11}$$

Si, alors, le support de φ est contenu dans $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ ou bien dans $\overline{\boldsymbol{R}}_-=\{\tau\leqq 0\}$, le support de $N\varphi$ est aussi contenu dans $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ ou dans $\overline{\boldsymbol{R}}_-$ respectivement. Les situations étant les mêmes dans ces deux cas, nous allons voir seulement l'inégalité suivante:

$$\|N\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+)\to L^2(\boldsymbol{R}_+)}<+\infty. \tag{4.12}$$

Celle-ci et l'estimation analogue comme opérateur dans $L^2(\boldsymbol{R}_-)$ montrent la validité de (4.9). Posons maintenant

$$N_1(\tau,\sigma)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}\sigma^{-1}(\tau/\sigma)^{\rho'_j+m-k}, & \text{pour } (\tau,\sigma)\in\Sigma_+;\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases} \tag{4.13}$$

Alors, (4.5) dans le lemme précédent implique l'existence d'une constante C_4 telle que l'on ait

$$N(\tau,\sigma)\leqq C_4N_1(\tau+1,\sigma+1),\quad \text{pour tout } (\tau,\sigma)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}_+. \tag{4.14}$$

Et le noyau $N_1(\tau,\sigma)$ vérifie la condition de Hardy-Littlewood-Polya [5] n°319, c'est-à-dire,

$$\int_0^1 N_1(1,\sigma)\sigma^{-1/2}d\sigma<\infty$$

grâce à la Condition (I–1) (voir (4. 7) ci-dessus). Ainsi, nous avons démontré (4. 12), et donc, établi la Proposition 3. 1. C.Q.F.D.

Maintenant, nous nous mettons à démontrer la Proposition 3. 2. Nous désirons la réduire à l'inégalité (4. 6) et à la Proposition 3. 1 justement établie. Pour faire cette réduction, nous avons besoin d'étudier quelques propriétés des polynômes $Q_q(\tau)$ $(0\leqq q\leqq m-k-1)$ définis par (2. 6) lorsque $0<k<m$. Ces propriétés sont elles-mêmes intéressentes, et, elles seront utiles dans le paragraphe 5.

Etude sur les polynômes $Q_q(\tau)$ $(0\leqq q\leqq m-k-1)$ lorsque $0<k<m$:

D'abord, nous introduisons de nouveau un opérateur $\widehat{M}(\tau;\,D_\tau)$ ayant la forme analogue à $\widehat{L}(\tau;\,D_\tau)$ comme suit

$$(4.15)\qquad \widehat{M}(\tau;\,D_\tau)=\sum_{h=0}^{k}\sum_{j=0}^{m+h-k} r_j^{k-h}\tau^j(-D_\tau)^h,$$

$$\text{où } r_j^h\in \boldsymbol{C} \text{ pour } 0\leqq h\leqq k \text{ et } 0\leqq j\leqq m-h.$$

Les r_j^h sont supposés constants. Si l'on compare cette (4. 14) avec les (2. 2) et (2. 5), on voit que les opérateurs $\widehat{L}$ et $\widehat{M}$ sont identiques, si $r_j^h=p_j^h$ pour tout (h, j) possible.

Analoguement aux $Q_q(\tau)$, nous définissons les $(m-k)$ polynômes $\{S_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$ en posant

$$(4.16)\qquad S_q(\tau)=\sum_{h=0}^{k}\sum_{j=h+q+1}^{m+h-k} h!\,i^{-h-1}\binom{h+q}{h} r_j^{k-h}\tau^{j-h-q-1},$$

$$\text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1,$$

(voir (2. 6)). Nous définissons encore $(m+1)$ polynômes en ρ par

$$(4.17)\qquad \Psi_j(\rho)=\sum_{h=\max.(0,\,k+j-m)}^{k} r_{m+h-k-j}^{k-h}\frac{i^h\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-h+1)},\quad \text{pour } 0\leqq j\leqq m.$$

Parmi eux, $\Psi_0(\rho)$ s'identifie à $\Phi_0(\rho)$, si la condition suivante a lieu:

$$(4.18)\qquad r_{m-h}^h=p_{m-h}^h,\quad \text{pour tout } 0\leqq h\leqq k.$$

Les deux formules suivantes se montrent par un calcul direct:

$$(4.19)\qquad \widehat{M}(\tau;\,D_\tau)\tau^\rho=\tau^{\rho+m-k}\sum_{j=0}^{m}\Psi_j(\rho)\tau^{-j},\quad \text{pour tout } \rho\in \boldsymbol{C}.$$

$$(4.20)\qquad \begin{aligned} S_q(\tau) &= i^{-1}\tau^{m-k-1-q}\sum_{j=0}^{m-k-1-q}\Psi_j(-1-q)\tau^{-j} \\ &= i^{-1}\hat{M}(\tau;\, D_\tau)\tau^{-1-q} + i^{-1}\sum_{\beta=0}^{k+q}\Psi_{m+\beta-k-q}(-1-q)\tau^{-1-\beta}, \\ &\text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1. \end{aligned}$$

Le lemme suivant sera utile dans le paragraphe 5:

Lemme 4.2: *Supposons la Condition (I) sur L et la condition (4.18) sur $\hat{M}$. Alors, le système $\{S_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$ engendre tous les polynômes d'ordre$\leqq(m-k-1)$ en τ. En particulier, le système $\{Q_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$ le fait aussi.*

Preuve: Soit $0\leqq q\leqq m-k-1$. Alors, $S_q(\tau)$ est d'ordre au plus $(m-k-1-q)$. Mais, par (4.20), le coefficient de $\tau^{m-k-1-q}$ dans le $S_q(\tau)$ est égal à $i^{-1}\Psi_0(-1-q)=i^{-1}\Phi_0(-1-q)$ qui n'est jamais nul grâce à la Condition (I–1) sur L. Donc, $(S_q(\tau)$ est exactement d'ordre $(m-k-1-q)$. C.Q.F.D.

Maintenant, nous prenons comme M un opérateur particulier tel que

$$(4.21)\qquad \hat{M}(\tau-i;\, D_\tau)=\hat{L}(\tau;\, D_\tau),$$
$$\text{c'est-à-dire, que } \hat{M}(\tau;\, D_\tau)=\hat{L}(\tau+i;\, D_\tau).$$

Alors, la condition (4.18) a lieu, et par conséquent, pour tout $0\leqq q \leqq m-k-1$, le polynôme $Q_q(\tau)-S_q(\tau-i)$ est d'ordre$<(m-k-1-q)$, donc nous avons

$$(4.22)\qquad \begin{cases} Q_q(\tau)=\sum_{s=q}^{m-k-1}\lambda_{qs}S_s(\tau-i), \quad \text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1, \\ \text{avec les constantes } \lambda_{qs}\ (0\leqq q,\ s\leqq m-k-1) \text{ telles que} \\ \lambda_{qs}\doteq\begin{cases}1, & \text{si } s=q, \\ 0, & \text{si } s<q.\end{cases} \end{cases}$$

En utilisant les formules (4.20) et (4.22), nous avons les suivantes:

$$(4.23)\qquad Q_q(\tau)=\hat{g}_q(\tau)+\hat{L}(\tau;\, D_\tau)\hat{w}_q(\tau), \quad \text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1,$$

où

$$(4.23)\quad \begin{cases} \hat{g}_q(\tau)=i^{-1}\sum_{s=q}^{m-k-1}\lambda_{qs}\sum_{\beta=0}^{k+s}\Psi_{m+\beta-k-s}(-1-s)(\tau-i)^{-1-\beta}, \\ \hat{w}_q(\tau)=\sum_{s=q}^{m-k-1}i^{-1}\lambda_{qs}(\tau-i)^{-1-s}, \quad \text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire encore

$$(4.25)\qquad \widehat{E}Q_q(\tau)=\widehat{E}\hat{g}_q(\tau)+\hat{w}_q(\tau)-\sum_{j=1}^{k}D_\tau^{j-1}\hat{w}_q(0)\cdot\hat{\xi}_j(\tau, 0),$$
$$\text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1.$$

Posons enfin

$$(4.26)\qquad g_q(t)=\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}[\hat{g}_q(\tau)] \quad \text{et} \quad w_q(t)=\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}[\hat{w}_q(\tau)],$$
$$\text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1.$$

Ce sont des fonctions à support $\overline{R_+}$ sur lequel elles sont des polynômes en t multipliés par e^{-t}. Donc, les g_q et les w_q appartiennent à W_k^m. (Nous nous rappelons du fait que

$$\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}[(\tau-i)^{-1-s}]=\frac{i^{s+1}}{s!}t^s e^{-t}Y(t), \quad \text{pour } s=\text{entier}\geqq 0,$$

où $Y(t)$ désigne la fonction de Heaviside.)

Ces considérations sur les $\{Q_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$ simplifient la preuve de la Proposition 3. 2 qui suit.

Démonstration la Proposition 3. 2: Soient $\widehat{U}_q(\tau)$ $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$ les fonctions définies par (3. 4), et posons

$$(4.27)\qquad U_q(t)=(\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}(\widehat{U}_q(\tau)])_+, \quad \text{pour } -k\leqq q\leqq m-k-1.$$

Soit d'abord $0<k<m$, et considérons les $U_q(t)$ pour $0\leqq q\leqq m-k-1$. Par (4. 25) que nous avons justement démontrée,

$$(4.28)\qquad U_q(t)=(Eg_q)_+(t)+w_q(t)-\sum_{j=1}^{k}D_\tau^{j-1}\hat{w}_q(0)\cdot U_{-j}(t),$$
$$\text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1,$$

où les $w_q(t)$ sont déjà dans W_k^m et les $(Eg_q)_+(t)$ le sont aussi grâce à la Proposition 3. 1. Donc, pour établir la Proposition 3. 2, il faut et il suffit de voir que les $U_q(t)$ avec $-k\leqq q\leqq -1$ appartiennent à W_k^m. Selon les notations au début de ce paragraphe, nous posons

(4.29) $$N_q(\tau) = \max.\{(|\tau|+1)^{m-k+p} N_j^p(\tau, 0);\ 0 \leqq p \leqq k-1\},$$ pour $1 \leqq j \leqq k$.

Alors, il ne reste qu'à démontrer que ces $N_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq k)$ appartiennent à $L^2(\boldsymbol{R})$. Mais, ceci est évident, parce que nous avons déjà la majoration (4.6) (voir aussi (4.4)).

Donc, la démonstration de la Proposition 3.2 est complètement terminée. C.Q.F.D.

Avant de quitter ce paragraphe, nous voulons ajouter encore une proposition qui sera utile dans les paragraphes 5 et 6. C'est un énoncé sur l'analyticité de la fonction $\mathcal{V}_+(t; \vec{F})$ par rapport aux coefficients p_j^h de l'opérateur $L(t; D_t)$ (voir quelques premières formules dans le paragraphe 2).

Parmi tous les p_j^h qui paraissent dans (2.2), nous avons posé d'abord $p_m^0 = 1$, donc celui-ci reste invariant. Nous laissons les p_{m-h}^h $(1 \leqq h \leqq k)$ également invariants, parce qu'ils paraissent dans le polynôme $\Phi_0(\rho)$. Ainsi, nous ne changeons pas la Condition (I) sur L pour éviter trop de complication. Nous partageons les autres p_j^h en deux groupes: Le premier groupe est celui des coefficients du polynôme $P^0(\tau)$, notons-le

(4.30) $$\overleftarrow{p}^0 = (p_0^0, \cdots, p_{m-1}^0) \in \boldsymbol{C}^m.$$

Le deuxième groupe est formé par tous ceux qui restent encore noté

(4.31) $$\overleftarrow{p}^* = (p_j^h;\ 1 \leqq h \leqq k \text{ et } 0 \leqq j \leqq m-h-1) \in \boldsymbol{C}^M,$$ où $M = k(2m-k-1)/2$.

Nous pouvons faire parcourir le deuxième vecteur $\overleftarrow{p}^*$ dans $\boldsymbol{C}^M$ tout entier, tandis que, lorsque nous faisons parcourir le premier vecteur $\overleftarrow{p}^0$ dans $\boldsymbol{C}^m$, nous devons faire attention de ne pas perdre l'ellipticité de $P^0(\tau)$, c'est-à-dire, il faut que les nombres m_+ et m_- restent invariants.

Alors, nous nous donnons deux entiers non négatifs m_+ et m_- tels que $m = (m_+) + (m_-)$. Et désignons par $\mathcal{O}$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{C}^m$ formé par tous les $\overleftarrow{p}^0$ tels que les m_+ et m_- soient égaux aux nombres des zeros du polynôme $P^0(\tau)$ situés dans les demi-plans $\mathrm{Im}.\tau>0$ et $\mathrm{Im}.\tau<0$ respectivement. $\mathcal{O}$ est donc un sous-ensemble ouvert connexe de $\boldsymbol{C}^m$.

Dès maintenant, $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ est considéré comme le couple de $(M+m)$ paramètres qui parcourt $\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$ $(\subset\boldsymbol{C}^{M+m})$. Comme nous avons vu, l'application $\overrightarrow{F}\to\mathcal{V}_+(t;\overrightarrow{F})$ est linéaire continue de $\boldsymbol{C}^m$ dans W_k^m, lorsque $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)\in\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$. Nous pouvons donc considérer cette application comme une fonction $\mathcal{V}_+$ en $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ définie sur $\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, W_k^m)$ (l'espace de Banach formé par toutes les applications linéaires continues de $\boldsymbol{C}^m$ dans W_k^m muni de la norme d'opérateurs). Alors, l'énoncé que nous allons démontrer sur l'analyticité est le suivant:

Proposition 4.1: *La fonction $\mathcal{V}_+$ en $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, W_k^m)$ est holomorphe, lorsque $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ varie dans $\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$.*

Preuve: Par la définition de $\mathcal{V}_+(t;\overrightarrow{F})$ (voir (3.4)~(3.6) et (4.27)), il faut et il suffit de démontrer que les $U_q(t)$ $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$ sont des fonctions holomorphes de $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ à valeurs dans W_k^m. Nous allons le voir.

D'abord, lorsqu'on fixe $\tau\in\boldsymbol{R}$, les $\widehat{U}_q(\tau)$ $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$ sont holomorphes par rapport aux paramètres $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)\in\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$ (Ceci est une conséquence facile d'unthéorème sur la dérivabilité par rapport aux paramètres dans la théorie des équations differentielles ordinaires). Ce que nous allons faire est d'élever cette analyticité ponctuelle jusqu'à l'analyticité vectorielle dans W_k^m.

Soit D une polydisque fermée quelconque dans $\mathcal{O}\times\boldsymbol{C}^M$ et nous fixons D une fois pour toute. Si l'on démontre l'analyticité des $U_q(t)\in W_k^m$, lorsque $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ varie dans D, ceci termine la démonstration. Pour la simplicité d'écriture, nous convenons $\overleftarrow{p}=(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ qui désigne la totalité des paramètres en question. Chaque composant de $\overleftarrow{p}$ est noté par p sans mettre aucune indice (donc p est le représentant des composants de $\overleftarrow{p}$). Nous écrivons brièvement "f. c. v. d."

au lieu d'écrire "une fonction continue à valeurs dans".

Nous allons voir, étape par étape, les continuités suivantes par rapport à $\overleftarrow{p}$ qui parcourt D: (les mots "par rapport à $\overleftarrow{p}$" sont aussi omis):

(1°) $\mathcal{F}^{-1}\hat{E}$ est f.c.v.d. $\mathcal{L}(L^2(\boldsymbol{R}), W_k^{m})$: Ceci est dû à l'uniformité de la constante C_4 dans l'inégalité (4.14) lorsque $\overleftarrow{p}$ varie dans D. De même,

(2°) $\dfrac{\partial\hat{L}}{\partial p}\hat{E}$ est f.c.v.d. $\mathcal{L}(L^2(\boldsymbol{R}), L^2(\boldsymbol{R}))$.

(3°) $U_q(t)$ est f.c.v.d. W_k^{m} $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$: Pour $-k\leqq q\leqq -1$, ceci est dû au fait que la fonction $N_j(\tau)$ dans (4.29) est majorée par une fonction fixe $L^2(\boldsymbol{R})$ uniformément dans D. Et pour $0\leqq q\leqq m-k-1$, ceci est le résultat de (1°), (3°) (pour $q<0$) et de (4.28), où les g_q et les w_q sont f.c.v.d. W_k^{m}.

(4°) Posons $E_p = -\left[\mathcal{F}^{-1}\hat{E}\dfrac{\partial\hat{L}}{\partial p}\hat{E}\mathcal{F}\right]_+$. Alors, E_p est f.c.v.d. $\mathcal{L}(L^2(\boldsymbol{R}), W_k^{m})$: grâce à (1°) et à (2°).

Posons maintenant

$$
(4.32)\quad \begin{cases} V_{q,p}(t) = -\left[\mathcal{F}^{-1}\hat{E}\dfrac{\partial\hat{L}}{\partial p}\hat{U}_q\right]_+(t), \quad \text{pour } -k\leqq q\leqq -1, \quad \text{et} \\ V_{q,p}(t) = E_p g_q(t) + \left(E\dfrac{\partial g_q}{\partial p}\right)_+(t) + \dfrac{\partial w_q}{\partial p}(t) \\ \qquad -\sum_{j=1}^{k}\left\{D_\tau^{j-1}\dfrac{\partial\hat{w}_q}{\partial p}(0)\cdot U_{-j}(t) + D_\tau^{j-1}\hat{w}_q(0)\cdot V_{-j,p}(t),\right. \\ \qquad \text{pour } 0\leqq q\leqq m-k-1. \end{cases}
$$

Alors, les (4.28), (4.29), (1°) et (4°) impliquent que

(5°) $V_{q,p}(t)$ est f.c.v.d. W_k^{m} (pour $-k\leqq q\leqq m-k-1$.

Evidemment, E_p et les $V_{q,p}$ sont les dérivées formelles (c'est-à-dire, les dérivées ponctuelles pour t fixe) de E et des U_q par rapport à la variable complexe p. Mais les (1°)$\sim$(5°) montrent qu'elles sont les dérivées au sens vectoriel. Surtout, les $V_{q,p}(t)$ sont les dérivées des $U_q(t)$ comme fonctions à valeurs dans W_k^{m}. Ceci signifie l'analyticité des $U_q(t)$ dans W_k^m. Donc, la preuve de la Proposition 4.1 est finie. C.Q.F.D.

Le corollaire suivant sera important dans les paragraphes 5 et 6. Et c'est pourquoi nous avons démontré la Proposition 4.1 ci-dessus.

Corollaire 4.1: *La matrice* $\mathcal{R}$ *est une fonction holomorphe en* $(\overleftarrow{p}^0, \overleftarrow{p}^*)$ *dans* $\mathcal{O}\times \boldsymbol{C}^M$.

Preuve: En effet, la matrice $\mathcal{R}$ est égale à l'application $\mathcal{V}_+ \in \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, W_k^m)$ suivie par l'opérateur $\rightarrow \in \mathcal{L}(W_k^m, \boldsymbol{C}^m)$. Donc, $\mathcal{R}$ est une fonction holomorphe en (p^0, p^*) à valeurs dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^m)$. C.Q.F.D.

§5. Démonstration de la Proposition 3.3

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié des propriétés de la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ lorsque τ varie tantôt sur l'axe réel tantôt dans un voisinage de $\tau=\infty$. Dans ce paragraphe, nous allons regarder la même fonction lorsque τ varie dans le plan complexe $\boldsymbol{C}$ tout entier. Mais, comme les singularités qui restent à analyser sont des zéros du polynôme $P^0(\tau)$. Ces zéros sont tous points singuliers réguliers de l'opérateur $\widehat{L}(\tau; D_\tau)$ au point de vue de la théorie de Fuchs.

Nous allons démontrer, au début, deux lemmes concernant l'injectivité de l'application $\vec{F}\rightarrow\mathcal{V}(t; \vec{F})$, et, la nullité de F lorsque $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ est une fonction entière. Ensuite, nous établissons la Proposition 3.3 sous l'hypothèse que tous les zéros du polynôme $P^0(\tau)$ soient simples, où nous utiliserons essentiellement la Proposition A.1 (voir le paragraphe Appendice) basée sur la théorie de Fuchs. Et enfin, nous débarrasserons cette hypothèse de la simplicité des zéros, et nous finirons la démonstration de la Proposition 3.3 en utilisant la Proposition 4.1. Donc, le raisonnement le plus compliqué est renvoyé au paragraphe Appendice.

Nous nous rappelons d'abord de plusieurs définitions dans le paragraphe 3. Premièrement, la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ est holomorphe en τ sur l'axe réel dans le τ-plan complexe. Deuxièmement, la fonction $\mathcal{V}(t, \vec{F})$ appartient à la classe $L^2(\boldsymbol{R})$. Nous avons les deux lemmes suivants:

Lemma 5.1: *Supposons que $\mathcal{V}(t; \vec{F})=0$ (comme élément de $L^2(\boldsymbol{R})$) pour un certain $\vec{F}\in \boldsymbol{C}^m$. Alors, on n'a que $\vec{F}=\vec{0}$.*

Preuve: Nous avons, par hypothèse, $\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})=0$. Cette nullité est vraie pour tout τ sur $\boldsymbol{R}$, à cause de la continuité de cette fonction. En opérant $\hat{L}(\tau; D_t)$, nous avons $\hat{L}\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})=0$ partout sur $\boldsymbol{R}$. Celle-ci signifie que $F_q=0$ pour tout q tel que $0\leqq q\leqq m-k-1$ à cause de l'indépendance des $Q_q(\tau)$ (voir le Lemme 4.2). En revenant à la nullité de $\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$, nous avons $F_q=0$ pour $-k\leqq q\leqq -1$, parce que les $\hat{\xi}_j(\tau, 0)$ $(1\leqq j\leqq k)$ sont indépendantes. C.Q.F.D.

Lemme 5.2: *Supposons que $\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ soit une fonction entière de τ pour un certain $\vec{F}\in \boldsymbol{C}^m$. Alors, on n'a que $\vec{F}=\vec{0}$.*

Preuve: En général, $\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ n'admet que les $(m+1)$ singularités au plus, les zéros du polynôme $P^0(\tau)$ et $\tau=\infty$. Mais maintenant, les zéros de $P^0(\tau)$ sont, par hypothèse, points d'holomorphie. Il s'agit seulement du comportement à l'infini. Supposons que nous ayons établi l'estimation

$$(5.1)\qquad |\hat{U}_q(\tau)|\leqq C|\tau|^{-1/2},\quad \text{pour tout } -k\leqq q\leqq m-k-1,\ \text{lorsque } |\tau|\geqq R,$$

où les C et R soient de certaines constantes positives suffisamment grandes. Alors, $\hat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ en question devient une fonction entiere qui tend vers 0 lorsque $\tau\to\infty$, donc, identiquement nulle. Ceci montre que $\vec{F}=\vec{0}$ grâce au Lemme 5.1. Il suffit donc de voir l'inégalité (5.1).

Choisissons un $R>1$ tel qu'il n'existe plus aucun zéro de $P^0(\tau)$ dans $|\tau|\geqq R$. Alors, (5.1) est vraie pour $-k\leqq q\leqq -1$ à cause de la Condition (I) sur L. Maintenant, nous allons vérifier (5.1) pour $0\leqq q\leqq m-k-1$.

Toujours grâce à la Condition (I) sur L, le polynôme $\Phi_0(\rho)$ n'admet qu'une seule racine intégrale au plus. Il faut distinguer les deux cas suivant s'il n'exite aucune racine intégrale ou s'il y en a une.

Supposons d'abord qu'il n'existe pas de racine intégrale de $\Phi_0(\rho)=0$. Alors, pour chaque q $(0\leqq q\leqq m-k-1)$ fixe, l'équation différentielle $\widehat{L}u(\tau)=Q_q(\tau)$ admet une solution de la forme

$$\tau^{-1-q}v_q(1/\tau) \tag{5.2}$$

où $v_q(\zeta)$ est une fonction holomorphe convenable au point $\zeta=0$, c'est-à-dire, $v_q(1/\tau)$ est holomorphe à $\tau=\infty$. La fonction de (5.2) est donc majorée par l'ordre de $|\tau|^{-1}$ à l'infini, et la différence entre elle et $\widehat{E}Q_q(\tau)$, qui est une solution de l'équation $\widehat{L}u(\tau)=0$, est majorée par l'ordre de $|\tau|^{-1/2}$ comme nous avons déjà vu. Par conséquent, (5.1) est vraie, dans ce cas, aussi pour $0\leqq q\leqq m-k-1$.

Supposons, au contaire, qu'il existe une racine intégrale, soit $\rho=-s$, où s soit un entier $\geqq(m-k+1)$ à cause de la Condition (I–1). Notons qu'aucun $-s+j$ n'est racine si j est entire positif ou négatif.

Donc, nous pouvons trouver une solution $u_s(\tau)$ de l'équation $\widehat{L}u(\tau)=0$ de la forme

$$u_s(\tau)=\tau^{-s}w(1/\tau), \tag{5.3}$$

avec une certaine fonction holomorphe $w(\zeta)$ en ζ au point $\zeta=0$ telle que $w(0)=1$. Fixons maintenant un q $(0\leqq m-k-1)$. Alors, nous pouvons trouver une fonction $v_q(\zeta)$, qui est holomorphe en ζ au point $\zeta=0$, et une constante complexe C_q telles que la fonction

$$\tau^{-1-q}v_q(1/\tau)+C_qu_s(\tau)\cdot\log\tau, \tag{5.4}$$

soit une solution de l'équation $\widehat{L}u(\tau)=Q_q(\tau)$. Cette fonction de (5.4) est d'ordre $|\tau|^{-1}$ à l'infini, et la différence entre elle et $\widehat{E}Q_q(\tau)$ est d'ordre $|\tau|^{-1/2}$. Enfin, l'estimation (5.1) est aussi vraie pour $0\leqq q\leqq m-k-1$. Le lemme est ainsi démontré. C.Q.F.D.

Nous avons besoin encore d'un lemme suivant qui est une interprétation de la Proposition A. 1 dans le paragraphe Appendice.

Lemme 5. 3: *Supposons que les zéros de* $P^0(\tau)$ *soient tous simples. Il existe alors une* $(m_- \times m)$*-matrice* C_+ *et une autre* $(m_+ \times m)$*-matrice* C_- *satisfaisantes aux conditions suivantes*:

(α) $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ *est holomorphe dans le demi-plan* $\mathrm{Im.}\,\tau \leqq 0$, *si et seulement si* $C_+\vec{F} = \mathbf{0}$;

(β) $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; F)$ *est holomorphe dans le demi-plan* $\mathrm{Im.}\,\tau \geqq 0$, *si et seulement si* $C_-\vec{F} = \mathbf{0}$; *et,*

(γ) *rang* $(C_+) = m_-$, *et rang* $(C_-) = m_+$.

Preuve: Supposons d'abord l'existence de certaines matrices C_+ et C_- répondant aux (α) et (β) dans l'énoncé. Alors, nous avons automatiquement la condition (γ) remplie. [En effet, il est naturel que range $(C_+) \leqq m_-$ et que rang $(C_-) \leqq m_+$. Si la somme des rangs était au plus $(m-1)$, il existerait alors un vecteur $\vec{F}(\neq \vec{0}) \in \boldsymbol{C}^m$ tel que $C_+\vec{F} = \mathbf{0}$ et que $C_-\vec{F} = \mathbf{0}$. Donc, $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ serait une fonction entière. Ceci est impossible grâce au Lemme 5. 2.] Il suffit donc de voir l'existence et les conditions (α) et (β). Maintenant, nous allons le faire à l'aide de la Proposition A. 1.

Soient $\{\tau_\mu\}_{\mu=1}^m$ tous les zéros de $P^0(\tau)$, où l'on suppose que

$$\text{(5. 5)} \qquad \mathrm{Im.}\,\tau_\mu > 0, \text{ si } 1 \leqq \mu \leqq m_+, \text{ et que } \mathrm{Im.}\,\tau_\mu < 0, \text{ si } m_+ + 1 \leqq \mu \leqq m.$$

Pour μ fixe $(1 \leqq \mu \leqq m)$, désignons par $\#_\mu$ le nombre des solutions linéairement indépendantes et holomorphes au point $\tau = \tau_\mu$ de l'équation

$$\text{(5. 6)} \qquad \widehat{L}(\tau; D_\tau)u(\tau) = 0.$$

Ce nombre $\#_\mu$ est égal à $(k-1)$ ou bien à k selon la Proposition A. 1.

Nous nous rappelons de la définition de la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau; \vec{F})$ (la formule (3. 5)), où les $\widehat{U}_q(\tau)$ étaient de solutions de l'équation (5. 6) si $-k \leqq q \leqq -1$, et de solutions des équations

$$\text{(5. 7)} \qquad \widehat{L}(\tau; D_\tau)u(\tau) = Q_q(\tau) \quad \text{pour } 0 \leqq q \leqq m-k-1,$$
$$\text{lorsque } 0 < k < m.$$

Ce que nous allons faire, c'est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur $\vec{F}$ pour que $\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\vec{F})$ soit holomorphe au point $\tau=\tau_\mu$.

Soit d'abord $\#_\mu=k-1$. Dans ce cas, notons par $\mathcal{U}^\mu(\tau)$ une solution non nulle et non holomorphe de l'équation (5. 6) à $\tau=\tau_\mu$. D'autre part, pour tout q tel que $0\leqq q\leqq m-k-1$ (seulement si $k<m$), l'équation admet une solution holomorphe, notée par $u_q(\tau)$, à ce point. Alors, il existe de certaines m constantes $\{C_q^\mu\}_{q=-k}^{m-k-1}$ telles que la différence

$$(5.8)\qquad \widehat{\mathcal{V}}(\tau;\vec{F})-\sum_{q=0}^{m-k-1}F_q u_q(\tau)-\sum_{q=-k}^{m-k-1}C_q^\mu F_q\mathcal{U}^\mu(\tau)$$

soit toujours égale à une solution holomorphe de (5. 6) (à $\tau=\tau_\mu$) indépendamment de $\vec{F}\in\boldsymbol{C}^m$. Donc, la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\vec{F})$ est holomorphe à $\tau=\tau_\mu$, si et seulement si le vecteur $\vec{F}$ satisfait à une seule condition

$$(5.9)\qquad \sum_{q=-k}^{m-k-1}C_q^\mu F_q=0.$$

Soit ensuite $\#_\mu=k$. Dans ce cas, toutes les $\widehat{U}_q(\tau)$ $(-k\leqq q\leqq -1)$ sont holomorphes à $\tau=\tau_\mu$. D'autre part, il existe une fonction $\varphi(\tau)$ holomorphes à ce point telle que $\Gamma_\mu(\varphi)=1$ et que l'équation $\widehat{L}u(\tau)=\varphi(\tau)$ admette au moins une solution, notée par $\mathcal{W}^\mu(\tau)$, non holomorphe à ce point (où Γ_μ est la fonctionnelle linéaire qui paraît dans la Proposition A. 1). Alors, la différence

$$(5.10)\qquad \widehat{\mathcal{V}}(\tau;\vec{F})-\sum_{q=0}^{m-k-1}\Gamma_\mu(Q_q)F_q\mathcal{W}^\mu(\tau)$$

est toujours égale à une solution de (5. 6) donc holomorphe à $\tau=\tau_\mu$. Alors, si l'on pose

$$(5.11)\qquad C_q^\mu=\begin{cases}0, & \text{si } -k\leqq q\leqq -1;\\ \Gamma_\mu(Q_q), & \text{si } 0\leqq q\leqq m-k-1,\end{cases}$$

nous avons vu que la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\vec{F})$ est holomorphe à $\tau=\tau_\mu$ si et seulement si $\vec{F}$ satisfait à une seule condition (5. 9), où les C_q^μ sont définies, à cette fois, par (5. 11).

En utilisant ces constantes C_q^μ $(1\leqq\mu\leqq m$, et $-k\leqq q\leqq m-k-1)$, nous définissons les $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ comme suit

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} C_{-k}^{m_++1} & C_{-k+1}^{m_++1} & \cdots & \cdots & C_{m-k-1}^{m_++1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{-k}^{m} & C_{-k+1}^{m} & \cdots & \cdots & C_{m-k-1}^{m} \end{pmatrix}; \tag{5.12}$$

$$\mathcal{C}_- = \begin{pmatrix} C_{-k}^{1} & C_{-k+1}^{1} & \cdots & \cdots & C_{m-k-1}^{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{-k}^{m_+} & C_{-k+1}^{m_+} & \cdots & \cdots & C_{m-k-1}^{m_+} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Ces matrices vérifient les conditions (α) et (β) dans le lemme.

C.Q.E.D.

Démonstration de la Proposition. 3.3:

Dès lors que nous avons établi le Lemme 5.3, la démonstration est presque terminée dans le cas où ce lemme est utilisable. Nous commençons par ce cas.

Supposons que les zéros de $P^0(\tau)$ soient tous simples. Nous définissons les deux sous-espaces vectoriels E_+ et E_- de $\boldsymbol{C}^m$ en posant

$$\begin{cases} E_+ = \{\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m;\ \mathcal{C}_+\vec{F} = \boldsymbol{0}\}, \quad \text{et} \\ E_- = \{\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m;\ \mathcal{C}_-\vec{F} = \boldsymbol{0}\}. \end{cases} \tag{5.14}$$

Alors, nous avons vu juste maintenant que

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}^m = E_+ + E_- \ (\text{somme directe}), \\ \dim.(E_+) = m_+, \quad \text{et que } \dim.(E_-) = m_-. \end{cases} \tag{5.15}$$

Et de plus, nous avons une autre décomposition en somme directe

$$\boldsymbol{C}^m = \mathcal{R}\boldsymbol{C}^m + (I - \mathcal{R})\boldsymbol{C}^m, \text{ où } I \text{ désigne l'identité sur } \boldsymbol{C}^m, \tag{5.16}$$

car $\mathcal{R}$ est une projection. Donc, si l'on démontre que $\mathcal{R}\boldsymbol{C}^m \subseteq E_+$ et que $(I-\mathcal{R})\boldsymbol{C}^m \subseteq E_-$, ceci implique, en tenant compte de (5.14) et de (5.15), que

$$\mathcal{R}\boldsymbol{C}^m = E_+, \quad \text{et que } (I - \mathcal{R})\boldsymbol{C}^m = E_-. \tag{5.17}$$

Et cette dernière (5.17) termine la démonstration.

Soit maintenant $\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m$ quelconque. La fonction ${}^{C}V(t; \mathcal{R}\vec{F})$

(resp. $\mathcal{V}(t;\ \vec{F}-\mathcal{R}\vec{F})$) est un élément de $L^2(\boldsymbol{R})$ à support dans $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ (resp. $\overline{\boldsymbol{R}}_-$). Donc, la fonction $\hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \mathcal{R}\vec{F})$ (resp. $\hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F}-\mathcal{R}\vec{F})$) est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Im}.\tau<0$ (resp. $\mathrm{Im}.\tau>0$). Elle l'est aussi sur l'axe réel. On voit donc que $\mathcal{R}\vec{F}\in E_+$ et que $(I-\mathcal{R})\vec{F}\in E_-$ quel que soit $\vec{F}\in\boldsymbol{C}^m$. Nous avons ainsi les inclusions désirées $\mathcal{D}\boldsymbol{C}^m\subseteq E_+$ et $(I-\mathcal{R})\boldsymbol{C}^m\subseteq E_-$.

Supposons maintenant que les zéros de $P^0(\tau)$ ne soient pas nécessairement simples. C'est-à-dire, on suppose que le discriminant $d=d(\overleftarrow{p^0})$ de $P^0(\tau)$ soit nul par hasard, où l'on écrit $\overleftarrow{p^0}=(p_0^0,\cdots,p_{m-1}^0)$ comme à la fin du paragraphe 4. Le discriminant $d(\overleftarrow{p^0})$ est un polynôme en $\overleftarrow{p^0}$, donc, $\overleftarrow{p^0}$ appartient, par hypothèse, à la variété algébrique $V=\{\overleftarrow{p^0}\in\boldsymbol{C}^m;\ d(\overleftarrow{p^0})=0\}$. Evidemment, $\overleftarrow{p^0}$ est situé dans $\mathcal{O}$ défini aussi dans le paragraphe 4. Mais, comme V est une hypersurface dans $\boldsymbol{C}^m$, $V^c\cap\mathcal{O}$ est dense dans $\mathcal{O}$. Et sur $V^c\cap\mathcal{O}$, nous avons que rang $(\mathcal{R})=m_+$ et que rang $(I-\mathcal{R})=m_-$. Donc, par l'analyticité de la matrice $\mathcal{R}$ en $\overleftarrow{p^0}$ sur $\mathcal{O}$, nous avons que rang $(\mathcal{R})\leqq m_+$ et que rang $(I-\mathcal{R})\leqq m_-$ même sur $V\cap\mathcal{O}$. Et, en effet, on a les égalités, parce que la somme directe (5. 16) reste vraie aussi sur $V\cap\mathcal{O}$.

La démonstration de la Proposition 3. 3 est ainsi terminée.

C.Q.F.D.

Exemple 5. 1: Nous nous retournons sur ce que nous avons construits dans les paragraphes 3 et 5 dans le cas de l'opérateur L défini dans l'Exemple 2. 1 pour mieux comprendre le rôle de la matrice $\mathcal{R}$ (voir la formule (2. 20)). Nous avons d'abrod $Q_0(\tau)=Q_0=1$ et

$$\hat{\xi}_1(\tau,\sigma)=\frac{\sigma^2+1}{\tau^2+1}\,. \tag{5. 18}$$

Les fonctions $\hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})$ et $\mathcal{V}(t;\ \vec{F})$ s'écrivent précisément comme suit:

$$\hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})=(\tau^2+1)^{-1}(F_{-1}-iF_0\tau),\quad \text{et,} \tag{5. 19}$$

$$\mathcal{V}(t;\ \vec{F})=\begin{cases}\dfrac{e^{-t}}{2}(F_{-1}+F_0), & \text{si } t>0;\\[2mm] \dfrac{e^{t}}{2}(F_{-1}-F_0), & \text{si } t<0,\end{cases} \tag{5. 20}$$

d'où l'on voit la forme (2. 21) de la matrice $\mathcal{R}$. Les sous-espaces E_+ et E_- de $\boldsymbol{C}^2$ définis par (5. 14) deviennent donc

$$(5.21)\qquad \begin{cases} E_+=\mathcal{R}\boldsymbol{C}^2=\{\vec{F}=(F_{-1}, F_0)\in\boldsymbol{C}^2;\ F_{-1}=F_0\}, \quad \text{et} \\ E_-=(I-\mathcal{R})\boldsymbol{C}^2=\{\vec{F}=(F_{-1}, F_0)\in\boldsymbol{C}^2;\ F_{-1}=-F_0\}. \end{cases}$$

Nous avons trivialement

$$(5.22)\qquad \begin{cases} \text{Si}\quad \vec{F}\in E_+,\ \hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})=-iF_{-1}/(\tau-i): \\ \qquad\qquad\qquad \text{holmorphe dans Im.}\,\tau\leqq 0, \\ \text{Si}\quad \vec{F}\in E_-,\ \hat{\mathcal{V}}(\tau;\ \vec{F})=iF_{-1}/(\tau+i): \\ \qquad\qquad\qquad \text{holmorphe dans Im.}\,\tau\geqq 0. \end{cases}$$

§6. Résultat pour les opérateurs à $(n+1)$ variables (x, t)

Désignons par $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ le demi-espace comme dans le paragraphe 1: $\boldsymbol{R}_+^{n+1}=\{(x, t)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}_+\}$, où $n\geqq 1$. Les premières n variables $x=(x_1, \cdots, x_n)$ et la dernière t sont appelées tangentielles et normale respectivement.

L'opérateur $L=L(t;\ D_x, D_t)$ que nous considérons dans $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ est défini comme suivant:

$$(6.1)\qquad Lu(x, t)\equiv L(t;\ D_x, D_t)u(x, t)\equiv\sum_{h=0}^{k}P^h(D_x, D_t)\{t^{k-h}u(x, t)\},$$

où $(D_x, D_t)=(i^{-1}\partial/\partial x_1, \cdots, i^{-1}\partial/\partial x_n, i^{-1}\partial/\partial t)$, et,

(i) *Les $P^h(D_x, D_t)$ $(0\leqq h\leqq k)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leqq(m-h)$ à coefficients constants complexes*:

$$(6.2)\qquad P^h(D_x, D_t)=\sum_{j=0}^{m-h}\sum_{|\alpha|=0}^{m-h-j}p_{j,\alpha}^h D_x^\alpha D_t^j,$$

$$(p_{j,\alpha}^h\in\boldsymbol{C} \text{ pour } 0\leqq h\leqq k \text{ et } 0\leqq|\alpha|\leqq m-h-j),$$

où m est un entier pair$\geqq 2$ lié avec un autre entier k de sorte que

$$(6.3)\qquad 0<k\leqq m=2b, \quad \text{où } b \text{ est un entier}\geqq 1;$$

(ii) *$P^0(D_x, D_t)$ est un opérateur elliptique d'ordre $m=2b$, c'est-à-dire, en désignant $P_m^0(D_x, D_t)$ la somme des termes d'ordre m*

de $P^0(D_x, D_t)$, *il existe une constante* $C \geqq 1$ *telle que*

(6.4) $$C^{-1}(|\xi|+|\tau|)^m \leqq |P_m^0(\xi, \tau)| \leqq C(|\xi|+|\tau|)^m,$$
pour tout $(\xi, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$;

(iii) *Pour* $\xi(\neq 0) \in \boldsymbol{R}^n$ *quelconque fixe, l'équation* $P_m^0(\xi, \tau)=0$ en τ *admet exactement* $b=m/2$ *racines dans chacun des demi-plans* Im. $\tau>0$ *et* Im. $\tau<0$ (*Si* $n \geqq 2$, *cette condition est automatiquement satisfaite grâce à* (ii) *ci-dessus.*)

Nous pouvons comparer ces définitions et notations avec celles au paragraphe 2. Nous considérons cet opérateur $L(t; D_x, D_t)$ comme une application linéaire continue de W_k^m dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ (voir la paragraphe 1). Mais comme $m_+=m_-=b$, l'opérateur L seul ne suffit pas pour poser un problème aux limites. Il faut le compléter par certaines b conditions linéaires sur $\vec{u}(x)$, où $\vec{u}(x)$ désigne le m-vecteur formé par les traces de u, c'est-à-dire, selon la notation au paragraphe 1, il s'écrit

(6.5) $$\vec{u}(x)={}^T\{\gamma_{-k}u(x), \cdots, \gamma_{m-k-1}u(x)\} \in H^{m-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^n) \times \cdots \times H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^n).$$
("T" désigne la transposition)

Comme ces b conditions aux limites, nous nous donnerons une $(b \times m)$-matrice $\mathscr{B}$ d'éléments des opérateurs différentiels par rapport aux variables tangentielles x. Certainement, nous pourrions les définir par une matrice d'éléments pseudo-différentiels en x. Mais, ce ne sera qu'une généralisation non essentielle. Il faudra ensuite formuler la condition de Shapiro-Lopatinski sur cette $\mathscr{B}$ tout à fait analoguement au paragraphe 2.

Le résultat le plus important dans ce paragraphe est le Théorème 2 qui donne l'estimation a priori. Et, le Théorème 3, un résultat sur l'existence et l'unicité, sera obtenu du théorème précédent par la méthode de descente.

Pour étudier notre opérateur de $(n+1)$ variables (x, t), il nous conviendra de le réduire à celui d'une seule variable t sur lequel nous avons déjà la conséquence précise. Ce procédé de la réduction se consistera, grosso-modo, de deux étapes: premièrement, de la transformation de Fourier par rapport aux variables tangentielles: $x \to \xi$, et ensuite, de l'homothétie: $t \to s = t|\xi|$. Et, nous obtiendrons une estimation concernant la partie principale de $\{L, \mathscr{B}\}$.

6. I. Position du problème aux limites

D'abord, nous définissons la partie principale $L^0 = L^0(t; D_x, D_t)$ de l'opérateur L. Soit $0 \leqq h \leqq k$ désignons par $P^h_{m-h}(D_x, D_t)$ la somme des termes d'ordre exactement $(m-h)$ de $P^h(D_x, D_t)$. Alors, l'opérateur L^0 est défini comme suit

$$(6.6) \qquad L^0 u(x, t) \equiv L^0(t; D_x, D_t) u(x, t) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h_{m-h}(D_x, D_t) \{t^{k-h} u(x, t)\}.$$

Analoguement au cas d'une seule variable, nous avons besoin de poser la Condition (I) sur L suivante: Pour chaque $0 \leqq h \leqq k$, le coefficient de D_t^{m-h} dans l'opérateur $P^h(D_x, D_t)$ a été noté par $p^h_{m-h,0}$ (voir la formule (6. 2)). Posons donc

$$(6.7) \qquad \Phi_0(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{k} p^{k-h}_{m+h-k,0} i^h \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-h+1)} \quad (\text{voir } (2.10)).$$

Condition (I) sur L: *Les racines $\{\rho_j\}_{j=1}^k$ de l'équation $\Phi_0(\rho) = 0$ satisfont aux deux condition suivantes*:

(I-1) *Les parties réelles des ρ_i sont toutes$<(k-m-\frac{1}{2})$*;

(I-2) *Si $k \geqq 2$, aucune des differences $\rho_l - \rho_j$ $(1 \leqq l \leqq j \leqq k)$ n'est entier (en particulier, chaque racine ρ_j est simple).*

Mainenant, nous effectuons la transformation de Fourier par rapport aux variables tangentielles x:

$$(6.8) \qquad u(x, t) \to \hat{u}(\xi, t) = \int_{\boldsymbol{R}^n} u(x, t) e^{-i(x,\xi)} dx; \quad \text{pour } u(x, t) \in W^m_k.$$

Alors, l'opérateur L^0 se transforme en l'opérateur différentiel ordinaire en t dépendant aux n paramètres $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{R}^n$ comme suit

$$(6.9) \qquad v(t) \to L^0(t; \xi, D_t) v(t) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h_{m-h}(\xi, D_t) \{t^{k-h} v(t)\}.$$

Etant donné un $\xi (\neq 0) \in \boldsymbol{R}^n$, nous désignons

(6.10) $\quad \omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, où $\omega_j=\xi_j/|\xi|$, pour $1\leqq j\leqq n$.

Lorsque ξ parcourt $\boldsymbol{R}^n$, ω parcourt la sphère unitaire S^{n-1} de dimension $(n-1)$. Associé à cette transformation $\xi\to\omega$, nous définissons un changement de variable: $t\to s$ de $\boldsymbol{R}_+$ sur lui-même comme suit

(6.11) $$t\to s=t|\xi|.$$

Alors, nous voyons une propriété d'homogénéité de L^0 suivante: Soit $v(t)$ une fonction quelconque définie sur $\boldsymbol{R}_+$. On peut la regarder comme une fonction $w(s)$ de s, où t et s sont liées par (6.11): $v(t)=w(s)$. Alors,

(6.12) $$L^0(s;\,\omega, D_s)w(s)=|\xi|^{k-m}L^0(t;\,\xi, D_t)v(t).$$

Ces changements de variables (6.10) et (6.11) et la formule (6.12) seront constamment utilisés dans la suite.

Pour chaque $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ fixe $(\neq 0)$, nous pouvons appliquer toutes les constructions dans le paragraphe 3 à l'opérateur différentiel ordinaire $L^0(t;\,\xi, D_t)$. Surtout ce qui est importante est la matrice $\mathcal{R}(\xi)$:

(6.13) $$\mathcal{R}(\xi)=\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{-k,-k}(\xi) & \mathcal{R}_{-k,1-k}(\xi) & \cdots & \mathcal{R}_{-k,m-k-1}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{R}_{m-k-1,-k}(\xi) & \cdots & \cdots & \mathcal{R}_{m-k-1,m-k-1}(\xi) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice carrée d'ordre m dont les propriétés se résument en deux points:

(1°) *$\mathcal{R}(\xi)$ est une projection $\boldsymbol{C}^m\to\boldsymbol{C}^m$ du rang $b=m/2$;*

(2°) *Pour tout (q, r) $(-k\leqq q,\ r\leqq m-k-1)$,* le *$(q, r)$-élément $\mathcal{R}_{q,r}(\xi)$ de $\mathcal{R}(\xi)$ est une fonction holomorphe de ξ (sauf à l'orgine), homogène de degré $(q-r)$: $\mathcal{R}_{q,r}(\xi)=|\xi|^{q-r}\mathcal{R}_{p,r}(\omega)$.*

(Le point (1°) est dû à la Corollaire 4.1. L'homogénéité de $\mathcal{R}(\xi)$ set garantie par le Corollaire 4.1. L'homogénéité de ses éléments peut être vérifiée, si l'on remonte à la construction de la fonction $\widehat{\mathcal{V}}(\tau;\,\vec{F})$ dans le paragraphe 3 en tenant compte de la formule (6.12).)

Nous passons maintenant à définir la condition aux limites. Soit

$\mathcal{B}(D_x)$ une $(b\times m)$-matrice qui s'écrit

$$(6.14)\qquad \mathcal{B}(D_x)=\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{1,-k}(D_x) & \mathcal{B}_{1,1-k}(D_x) & \cdots & \mathcal{B}_{1,m-k-1}(D_x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{B}_{b,-k}(D_x) & \mathcal{B}_{b,1-k}(D_x) & \cdots & \mathcal{B}_{b,m-k-1}(D_x) \end{pmatrix};$$

vérifiant la condition suivante:

(iv) *Pour chaque* (j,q) $(1\leqq j\leqq b$ *et* $-k\leqq q\leqq m-k-1)$, $\mathcal{B}_{j,q}(D_x)$ *est un opérateur différentiel d'ordre* $\leqq(m_j-q)$ *en* x *à coefficients constants complexes, où les* m_j $(1\leqq j\leqq b)$ *sont de certains entiers donnés tels que*

$$(6.15)\qquad -k\leqq m_j\leqq m-k-1,\quad \textit{pour } 1\leqq j\leqq b,$$

et, si m_j-q *est négatif, alors* $\mathcal{B}_{j,q}(D_x)$ *correspondant est égal, par définition, à l'opérateur nul.*

Alors, cette matrice $\mathcal{B}(D_x)$ peut être considérer comme une application linéaire continue

$$(6.16)\qquad \text{de } \prod_{q=-k}^{m-k-1} H^{\sigma-q}(\boldsymbol{R}^n) \quad \text{dans} \quad \prod_{j=1}^{b} H^{\sigma-m_j}(\boldsymbol{R}^n),$$

quel que soit σ réel.

Enfin, nous pouvons poser un problème aux limites par le couple $\{L(t;\, D_x, D_t), \mathcal{B}(D_x)\}$ comme suit:

Probleme aux limites: *Etant donnés une fonction* $f(x,t)$ *et un b-vecteur de fonctions* $\varphi(x)={}^T(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_b(x))$ *tels que*

$$(6.17)\qquad f(x,t)\in L^2(\boldsymbol{R}^{n+1}_+) \textit{ et que } \varphi(x)\in \prod_{j-1}^{b} H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^n),$$

chercher une solution $u(x,t)\in W^m_k$ *de l'équation différentielle*

$$(6.18)\qquad L(t;\, D_x, D_t)u(x,t)=f(x,t) \textit{ dans } \boldsymbol{R}^{n+1}_+, \textit{ et}$$

$$(6.19)\qquad \mathcal{B}(D_x)\vec{u}(x)=\varphi(x).$$

Cette position du problème aux limites est une analogie de celle dans la théorie classique des équations elliptiques non dégénérées. Et, nous allons formuler une condition sur $\mathcal{B}(D_x)$, dite de Shapiro-Lopatinski, pour que $\mathcal{B}(D_x)$ *recouvre* $L(t;\, D_x, D_t)$ selon le langage d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1].

Pour chaque (j, q) $(1 \leqq j \leqq b$ et $-k \leqq q \leqq m-k-1)$, désignons par $\mathscr{B}^0_{j,q}(D_x)$ la somme des termes d'ordre exactement (m_j-q) dans l'opérateur $\mathscr{B}_{j,q}(D_x)$. Et nous formons une matrice, notée $\mathscr{B}^0(D_x)$, comme dans la formule (6.14) (avec les $\mathscr{B}_{j,q}(D_x)$ remplacés par les $\mathscr{B}^0_{j,q}(D_x)$). Soit $\mathscr{B}^0(\xi)$ la matrice obtenue par la substitution $D_x \to \xi$. Le (j, q)-élément de celle-ci est un polynôme homogène en ξ d'ordre (m_j-q).

Alors, la condition de Shapiro-Lopatinski se pose comme suit:

Condition (S. L.) sur $\mathscr{B}(D_x)$: *Il existe une $(m \times b)$-matrice $\mathscr{D}(\xi)$, dont le (q, j)-élément est une fonction de ξ homogène de degré $(q-m_j)$ pour $-k \leqq q \leqq m-k-1$ et $1 \leqq j \leqq b$, telle que*

(S. L.-1) $\mathscr{B}^0(\xi)\mathscr{D}(\xi) =$ *l'dentité sur* C^b; *et que,*

(S. L.-2) $\mathscr{R}(\xi)\mathscr{D}(\xi) = \mathscr{D}(\xi)$, *à tout point* $\xi(\neq 0)$ *de* R^n.

6. II. Estimation a priori

Nous allons démontrer, dans ce 6. II, le théorème suivant:

Théorème 2: *Soit $L(t; D_x, D_t)$ un opérateur défini par* (6.1) *satisfaisant à la Condition (I). Supposons qu'une matrice d'opérateurs $\mathscr{B}(D_x)$ definie par* (6.14) *vérifie la Condition (S.L.). Alors, il existe une constante positive $K = K(L, \mathscr{B})$ telle que l'inégalité*

$$\begin{aligned}(6.20)\qquad \|u(x, t)\|_{W^m_k} \leqq K\{&\|L(t; D_x, D_t)u(x, t)\|_{L^2(R^{n+1}_+)} \\ &+ \|\mathscr{B}(D_x)\vec{u}(x)\|_{\prod_{j=1}^{b} H^{m-k-m_j-(1/2)}(R^n)} \\ &+ \|(t^k+1)u(x, t)\|_{L^2(R^{n+1}_+)}\}\end{aligned}$$

soit vraie pour toute $u(x, t) \in W^m_k$.

D'abord, il nous conviendra d'introduire les semi-normes suivantes définies sur W^m_k: Nous posons

$$(6.21)\qquad M_h(u) = \|(t^h+1)u(x, t)\|_{L^2(R^{n+1}_+)} \quad \text{pour } 0 \leqq h \leqq k;$$

$$(6.22)\qquad N_h(u) = \sum_{|\alpha|+l=m+h-k} \|D^\alpha_x D^l_t(t^h u(x, t))\|_{L^2(R^{n+1}_+)}, \quad \text{pour } 0 \leqq h \leqq k.$$

Alors, nous pouvons vérifier facilement les relations suivantes entre ces semi-normes et les normes des W^{m-k}_{k-h} $(0 \leqq h \leqq k)$, où la fonction u

est toujours prise dans W_k^m, et les plusieurs constantes $C_1, C_2, \cdots$ sont universelles (indépendantes de u):

(6.23) $N_h(u) \leqq C_1\{N_k(u) + M_k(u)\}$, pour $0 \leqq h \leqq k$;

(6.24) $C_2\|u\|_{W_{k-h}^{m-h}} \leqq N_{k-h}(u) + M_{k-h}(u) \leqq C_3\|u\|_{W_{k-h}^{m-h}}$, pour $0 \leqq h \leqq k$.

Nous faisons encore une convention d'écriture: Etant donné un b-vecteur de fonction

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_b(x)) \in \prod_{j=1}^{b} H^{m-k-m_j-(1/2)}(\boldsymbol{R}^n),$$

nous écrivons

(6.25) $\langle\!\langle \varphi(x) \rangle\!\rangle = \|\varphi(x)\|_{\prod_{j=1}^{b} H^{m-k-m_j-(1/2)}(\boldsymbol{R}^n)}$.

Alors, l'inégalité (6.20), qui est notre but, équivaut à la suivante:

(6.26) $N_k(u) \leqq C_4\{\|Lu\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})} + \langle\!\langle \mathscr{B}\vec{u} \rangle\!\rangle + M_k(u)\}$, pour tout $u \in W_k^m$

avec une constante $C_4 > 0$ indépendante de u. La démonstration de cette dernière inégalité se fait par les deux étapes suivantes:

La première est d'obtenir la majoration

(6.27) $N_k(u) \leqq C_5(\|L^0 u\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})} + \langle\!\langle \mathscr{B}^0\vec{u} \rangle\!\rangle)$, pour tout $u \in W_k^m$,

où $\{L^0, \mathscr{B}^0\}$ est la partie principale du couple $\{L, \mathscr{B}\}$. Et, la deuxième est d'établir le fait suivant: Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_6 = C_6(\varepsilon) > 0$ telle que l'on ait

(6.28) $\|(L - L^0)u\|_{L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})} + \langle\!\langle (\mathscr{B} - \mathscr{B}^0)\vec{u} \rangle\!\rangle < \varepsilon N_k(u) + C_6 M_k(u)$,

indépendamment de $u \in W_k^m$. Si l'on admet ces inégalités (6.27) et (6.28), il en résulte l'estimation désirée (6.26) en prenant un $\varepsilon > 0$ tel que $C_5\varepsilon < 1$. Et, ceci finira la démonstration du théorème.

Preuve de (6.27): Etant donnée une $u = u(x, t) \in W_k^m$ quelconque, soit $\hat{u}(\xi, t)$ sa transformée de Fourier en x (voir (6.8)). Par le changement de variable $t \to s$ défini par (6.11), nous la considérons comme une fonction $v(\xi, s)$ de variable s ayant ξ comme paramètres:

(6.29) $v(\xi, s) \equiv \hat{u}(\xi, t)$, où $s = t|\xi|$ avec $\xi(\neq 0) \in \boldsymbol{R}^n$.

Pour $-k \leqq q \leqq m-k-1$, nous désignons par $\gamma_q \hat{u}(\xi)$ (resp. $\gamma_q v(\xi)$) le trace d'ordre q de $\hat{u}(\xi, t)$ (resp. $v(\xi, s)$) comme fonction de t (resp. s). Nous avons alors

$$\gamma_q \hat{u}(\xi) = |\xi|^q \gamma_q v(\xi), \qquad \text{pour tout } \xi(\neq 0) \in \boldsymbol{R}^n \text{ et } -k \leqq q \leqq m-k-1. \tag{6.30}$$

Ensuite, nous nous rappelons de l'application $\xi \to \omega$ de $\boldsymbol{R}^n$ dans S^{n-1} définie par (6.10) et de la formule (6.12), d'où nous avons les deux églités qui suivent

$$\begin{aligned} &\| L^0(t;\ \xi, D_t) \hat{u}(\xi, t) \|_{L^2_t(\boldsymbol{R}_+)} \\ &\qquad = |\xi|^{m-k-(1/2)} \| L^0(s;\ \omega, D_s) v(\xi, s) \|_{L^2_s(\boldsymbol{R}_+)}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\sum_{j,q} |\xi|^{m-k-m_j-(1/2)} |\mathscr{B}^0_{jq}(\xi) \gamma_q \hat{u}(\xi)| = |\xi|^{m-k-(1/2)} \sum_{j,q} |\mathscr{B}^0_{jq}(\omega) \gamma_q v(\xi)|, \tag{6.32}$$

où la somme par rapport à (j, q) parcourt tout couple d'indices telles que $1 \leqq j \leqq b$ et $-k \leqq q \leqq m-k-1$. Pour avoir (6.32), nous avons aussi utilisé l'homogénéité: $\mathscr{B}^0_{jq}(\xi) = |\xi|^{m_j-q} \mathscr{B}^0_{jq}(\omega)$. De même, nous voyons que

$$\sum_{l=0}^{m} |\xi|^{m-l} \| D_t^l (t^k \hat{u}(\xi, t)) \|_{L^2(\boldsymbol{R}_+)} = |\xi|^{m-k-(1/2)} \sum_{l=0}^{m} \| D_s^l (s^k v(\xi, s)) \|_{L^2(\boldsymbol{R}_+)}. \tag{6.33}$$

Avec ces préparations, nous allons maintenant utiliser le Théorème 1 pour le couple $\{L^0(s;\ \omega, D_s), \mathscr{B}^0(\omega)\}$, où les paramètres ω varient dans la sphère unitaire S^{n-1} (compacte). Donc, nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m} \| D_s (s^k v(\xi, s)) \|_{L^2_s(\boldsymbol{R}_+)} \leqq C_7 \{ &\| L^0(s;\ \omega, D_s) v(\xi, s) \|_{L^2_s(\boldsymbol{R}_+)} \\ &+ \sum_{j,q} |\mathscr{B}^0_{jq}(\omega) \gamma_q v(\xi)| \}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

où la constante $C_7 > 0$ ne dépend ni de $v(\xi, s)$, de ω ni de $|\xi|$. Elle est une constante uniforme par rapport aux paramètres $\xi(\neq 0) \in \boldsymbol{R}^n$. Cela est une conséquence de la régularité remarquée dans la Proposition 4.1. L'existence d'une telle constante C_7 uniforme est très importante. Dès lors que nous l'admettons, la preuve de (6.27) est presque terminée. En vue des égalités (6.31) (6.33), nous obtenons, par (6.34),

$$(6.35)\qquad \sum_{l=0}^{m}|\xi|^{m-l}\|D_t^l(t^k\hat{u}(\xi,t)\|_{L_t^2(R_+)}\leqq C_7\{\|L^0(t;\xi,D_t)\hat{u}(\xi,t)\|_{L_t^2(R_+)}$$
$$+\sum_{j,q}|\xi|^{m-k-m_j-(1/2)}|\mathcal{B}_{jq}^0(\xi)\gamma_q\hat{u}(\xi)|\}.$$

Alors, la norme dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ par rapport à ξ du premier membre est équivalente à $N_k(u)$ dans (6.27), tandis que celle du deuxième membre est majorée par le deuxième membre de (6.27), où nous avons utilisé la restriction (6.15) sur les m_j. L'inégalité (6.27) est maintenant établie.

Preuve de (6.28): La forme concrète (6.1) de l'opérateur L implique d'abord

$$(6.36)\qquad \|(L-L^0)u\|_{L^2(R_+^{n+1})}\leqq C_8\sum_{h=0}^{k}\|t^{l-h}u(x,t)\|_{H^{m-h-1}(R_+^{n+1})},$$

ici, la terme correspondante à $h=k$ disparaît si $m=k$. Alors, la définitions des $N_h(u)$ et des $M_h(u)$, l'inégalité (6.23) et la fait bien connu sur la majoration des dérivées intermédiaires nous donnent l'estimation suivante: Quel que soit $\delta>0$, il existe une constante positive $C_9=C_9(\delta)$ telle que l'on ait

$$(6.37)\qquad \|(L-L^0)u\|_{L^2(R_+^{n+1})}\leqq\delta N_k(u)+C_9(\delta)M_k(u),\quad\text{pour tout } u\in W_k^m.$$

Ensuite, estimons $\langle\!\langle(\mathcal{B}-\mathcal{B}^0)\vec{u}(x)\rangle\!\rangle$. La restriction (6.15) sur les m_j nous donne la majoration suivante:

$$(6.38)\qquad \langle\!\langle(\mathcal{B}-\mathcal{B}^0)u(x)\rangle\!\rangle\leqq C_{10}\sum_{q=-k}^{m-k-2}\|\gamma_q u(x)\|_{H^{m-k-q-(3/2)}(R_n)}.$$

Les quantités du deuxième membre sont estimées de la manière suivante:

Si $0\leqq q\leqq m-k-2$, alors,

$$(6.39)\qquad \|\gamma_q u(x)\|_{H^{m-k-q-(3/2)}(R_n)}\leqq C_{11}\{\|u\|_{H^{m-k-1}(R_+^{n+1})}+M_k(u)\}.$$

Si $1\leqq j\leqq k$, alors,

$$(6.40)\qquad \|\gamma_{-j}u(x)\|_{H^{m-k+j-(3/2)}(R_n)}\leqq C_{12}\{\|t_ju\|_{H^{m-k+j-1}(R_+^{n+1})}+\|u\|_{H^{m-k-1}(R_+^{n+1})}\}.$$

Remarquons que, si $m=k$, la norme de u dans H^{m-k-1} de (6.40) doit être lue la norme dans L^2. Donc, dans ce cas aussi, nous avons une majoration du type (6.37), c'est-à-dire, quel que soit $\delta>0$, il existe une constante $C_{13}(\delta)=C_{13}(\delta)>0$ telle que l'on ait

(6. 41) $\langle\!\langle(\mathscr{B}-\mathscr{B}^0)u(x)\rangle\!\rangle\leqq\delta N_k(u)+C_{13}(\delta)M_k(u)$, pour tout $u\in W_k^m$.

Alors, pour avoir (6. 28), il ne reste qu'à poser $\delta=\varepsilon/2$ dans (6. 38) et (6. 41).

Le Théorème 2 sur l'estimation a priori est complètement établi.

6. III. Un théorème d'existence et d'unicité

Dans le Théorème 2, nous avons supposé les Conditions (I) et (S.L.) sur le couple $\{L, \mathscr{B}\}$. Mais, en réalité, ce sont des conditions qui restreignent seulement sa partie principale $\{L^0, \mathscr{B}^0\}$. Donc, ce ne sont pas encore suffisantes pour avoir l'existence ou l'unicité des solutions. (Dans la théorie classique (non dégénérée), la situation était analogue.)

Maintenant, nous énonçons un théorème d'existence et d'unicité. Celui est obtenu par la "méthode de descente". Bien que ce théorème ne soit pas assez général, il nous donnera encore une analogie avec la théorie classique d'opérateurs non dégénérés.

Soit $\{L(t; D_x, D_t), \mathscr{B}(D_x)\}$ un couple défini par (6. 1) et par (6. 14). Nous substituons, dans ce couple, les dérivées tangentielles D_x par ξ. Nous obtenons ainsi le couple $\{L(t; \xi, D_t), \mathscr{B}(\xi)\}$ formé par un opérateur différentiel ordinaire en t à coefficients polynômes en ξ et par une $(b\times m)$-matrice d'éléments polynômes en ξ. Ce couple n'est plus homogène en (t, ξ) (par exemple, nous n'avons plus l'égalité du type (6. 12)). Pour le faire homogène, nous y ajoutons encore un paramètre.

Nous considérons certains $(n+1)$ paramètres $\zeta=(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ liés avec $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ de la manière suivante:

(6. 42) $$\xi_j=\zeta_j/\zeta_0\,,\quad \text{pour } 1\leqq j\leqq n.$$

Soient maintenant $P^h(D_x, D_t)$ $(0\leqq h\leqq k)$ les opérateurs qui paraissent dans L (voir (6. 1)). En désignant par $P^h(\xi, \tau)$ les polynômes correspondants, nous posons, indépendamment des notations dans les paragraphes $1\sim5$,

$$(6.43)\qquad Q^h(\zeta,\tau)=Q^h(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n,\tau)=\zeta_0^{m-h}P^h(\zeta_1/\zeta_0,\cdots,\zeta_n/\zeta_0,\tau/\zeta_0),\quad \text{pour } 0\leqq h\leqq k.$$

Alors, chaque $Q^h(\zeta,\tau)$ $(0\leqq h\leqq k)$ est un polynôme homogène de degré $(m-h)$ en (ζ,τ) $((n+2)$ variables). Et, posons, pour définir un opérateur M,

$$(6.44)\qquad M(t;\,\zeta,D_t)v(t)=\sum_{h=0}^{k}Q^h(\zeta,D_t)\{t^{k-h}v(t)\},\quad \text{ou encore,}$$

$$(6.44)'\qquad M(t;\,D_z,D_t)v(z,t)=\sum_{h=0}^{k}Q^h(D_z,D_t)\{t^{k-h}v(z,t)\},$$

où $z=(z_0,z_1,\cdots,z_n)$, et $D_z=(D_{z_0},D_{z_1},\cdots,D_{z_n})$. Alors, $M(t;\,D_z,D_t)$ est un opérateur dépourvu des termes d'ordre inférieur.

Nous faisons la même substitution à la matrice $\mathscr{B}(\xi)$: En écrivant $\mathscr{B}_{jq}(\xi)$ le (j,q)-élément de $\mathscr{B}(\xi)$, nous définissons

$$(6.45)\qquad C_{jq}(\zeta)=C_{jq}(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=\zeta_0^{m_j-q}\mathscr{B}_{jq}(\zeta_1/\zeta_0,\cdots,\zeta_n/\zeta_0)\quad \text{pour } 1\leqq j\leqq b \text{ et } -k\leqq q\leqq m-k-1.$$

Et nous définissons la matrice $C(\zeta)$ (resp. l'opérateur $C(D_z)$) de sorte que son (j,q)-élément soit $C_{jq}(\zeta)$ (resp. $C_{jq}(D_z)$). Alors, $C(D_z)$ est aussi une matrice d'opérateurs dépourvus des termes d'ordre inférieur.

La correspondance entre $\{L(t;\,D_x,D_t),\mathscr{B}(D_x)\}$ et $\{M(t;\,D_z,D_t), C(D_z)\}$ est biunivoque. Si nous supposons la Condition (I) sur L, nous avons exactement la même Condition (I) sur M. Si nous supposons la condition au point (ii) (au début de ce paragraphe) sur M, celle-ci se traduit à une condition sur L comme suit: Il existe une constante $C\gtreqless 1$ telle que

$$(6.46)\qquad C^{-1}(|\xi|+|\tau|+1)^m\leqq|P^0(\xi,\tau)|\leqq C(|\xi|+|\tau|+1)^m,\quad \text{pour tout } (\xi,\tau)\in \boldsymbol{R}^{n+1}.$$

Cette condition sur L est strictement plus forte que celle au point (ii), et de plus, elle implique la condition au point (iii) sur les nombres des racines. Nous pouvons construire la matrice carrée, notée par $\mathcal{S}(\zeta)$, correspondante à $\mathscr{R}(\xi)$, pour cet opérateur M.

Maintenant, si l'on suppose la Condition (S.L.) sur $\mathcal{C}(D_x)$, celle-ci est strictement plus forte que la Condition (S.L.) sur $\mathcal{B}(D_x)$. Nous appelons cette condition plus forte comme "*la Condition* ((*S.L.*)) *sur* $\mathcal{B}(D_x)$".

Voilà, toutes les hypothèses dont nous avons besoin pour le théorème d'existence et d'unicité:

Théorème 3: *Etant donné un couple* $\{L(t;\, D_x, D_t), \mathcal{B}(D_x)\}$ *défini par* (6.1) *et par* (6.14), *supposons la Condition* (I), (6.46) *sur L et la Condition* ((*S.L.*)) *sur* $\mathcal{B}(D_x)$. *Alors, l'application*

$$u(x,t)\to\{L(t;\, D_x, D_t)u(x,t), \mathcal{B}(D_x)\vec{u}(x)\}$$

est un isomorphisme (*algébrique et topologique*) *de* W_k^m *sur* $L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\times\prod_{j=1}^{b} H^{m-k-m_j-(1/2)}(\boldsymbol{R}^n)$.

Démonstration: D'abord nous considérons les paramètres ξ et ζ comme s'ils sont tout à fait indépendants. Le même calcul que l'on a fait pour obtenir l'inégalité (6.35) nous montre qu'il existe des constantes positives K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned}(6.47)\qquad & K_1\sum_{h=0}^{k}\sum_{l=0}^{m-h}|\zeta|^{m-h-l}\|D_t^l(t^{k-h}\hat{u}(\xi,t))\|_{L_t^2(\boldsymbol{R}_+)}\\ &\leqq\|M(t;\,\zeta, D_t)\hat{u}(\xi,t)\|_{L_t^2(\boldsymbol{R}_+)}+\sum_{j,q}|\zeta|^{m-k-m_j-(1/2)}|C_{jq}(\zeta)\gamma_q\hat{u}(\xi)|\\ &\leqq K_2\sum_{h=0}^{k}\sum_{l=0}^{m-h}|\zeta|^{m-h-l}\|D_t^l(t^{k-h}\hat{u}(\xi,t))\|_{L_t^2(\boldsymbol{R}_+)},\end{aligned}$$

où $u(x,t)$ élément quelconque de W_k^m, $\hat{u}(\xi,t)$ est définie par (6.8), et notons que K_1 et K_2 sont indépendantes nonseulement de u mais aussi de ξ et de ζ. Nous posons maintenant

$$(6.48)\qquad \zeta\equiv(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=(1,\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

et prenons les normes dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ par rapport à ξ de toutes les termes de (6.47). Alors, le premier et le dernier membres sont équivalents à la norme de u dans W_k^m, tandis que le deuxième membre est équivalent à la norme de $\{Lu, \mathcal{B}\vec{u}\}$ dans l'espace produit indiqué dans l'énoncé du théorème. Ceci montre l'équivalence entre les normes de u et de $\{Lu, \mathcal{B}\vec{u}\}$. La surjectivité de cette application

$u \to \{Lu, \mathscr{B}\vec{u}\}$ se voit par une construction explicite de la solution de l'équation (6. 18) et (6. 19). Cette construction est faite, d'abord, pour le couple $\{M(t;\zeta, D_t), C(\zeta)\}$ selon ce que nous avons déjà fait dans le paragraphe 2 (voir les Propositions 3. 4 et 3. 5). Et puis, nous remplaçons ζ par ξ suivant (6. 48), et enfin, nous effectuons la transformation réciproque de Fourier $\xi \to x$.

Ceci nous montre la surjectivité. Donc, le théorème est établi.
D.Q.F.D.

6. IV. Un exemple

L'exemple que nous allons citer est l'un du cas où $m=2$ et $k=1$. Nous définissons L par

$$(6.49)\qquad L(t;\, D_x, D_t)u(x,t) \equiv t\{D_t^2 + \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2 + 1\}u(x,t) \equiv t(1-\varDelta)u(x,t).$$

Evidemment, c'est la généralisation aux plusieurs variables de l'exemple traité à la fin du paragraphe 2 (et du paragraphe 5). Comme $b=1$, nous pouvons poser une et une seule condition aux limites, où le nombre m_1 doit être égal à 0 ou bien à -1 à cause de la restriction (6. 15). En correspondant à ces deux cas, nous avons les deux types suivants des conditions aux limites: Si l'on pose $m_1 = -1$,

$$(6.50)\qquad \mathscr{B}_{-1}u(x) \equiv \int_0^\infty u(x,t)dt;$$

et, si l'on pose $m_1 = 0$,

$$(6.51)\qquad \mathscr{B}_0 u(x) \equiv u(x, +0) + (\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{x_j} + \beta_0)\int_0^\infty u(x,t)dt,$$

où les β_j $(0 \leq j \leq n)$ sont de certaines constantes complexes. L'opérateur $\mathscr{B}_{-1}$ satisfait automatiquement à la Condition ((S.L.)), tandis que nous devons choisir les β_j convenables pour que $\mathscr{B}_0$ défini par (6. 51) le fasse aussi.

Alors, les deux problèmes aux limites se posent comme suit:

Problème (A): *Etant données une fonction $f(x,t) \in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ et une autre fonction $\varphi(x) \in H^{3/2}(\boldsymbol{R}^n)$ quelconques, chercher une solution $u(x,t) \in W_k^m$ satisfaisante à l'équation différentielle suivante*:

$$(6.52)\qquad \begin{cases} t\{D_t^2+\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2+1\}u(x,t)=f(x,t), & et \\ \int_0^\infty u(x,t)dt=\varphi(x). \end{cases}$$

Problème (B): *Etant données une fonction $f(x,t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ et une autre fonction $\psi(x)\in H^{1/2}(\boldsymbol{R}^n)$ quelconques, chercher une solution $u(x,t)\in W_k^m$ de l'équation différentielle*

$$(6.53)\qquad \begin{cases} t\{D_t^2+\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2+1\}u(x,t)=f(x,t), & et \\ u(x,+0)+(\sum_{j=1}^{n}\beta_j D_{x_j}+\beta_0)\int_0^\infty u(x,t)dt=\psi(x). \end{cases}$$

Soient $\zeta=(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ $(\neq(0,0,\cdots,0))$ $(n+1)$ paramètres réels. Nous définissons le couple $\{M(t;\zeta,D_t),\mathcal{C}_\alpha(\zeta)\}$ $(\alpha=-1$ ou $0)$ d'opérateurs d'une seule variable t dépendant aux paramètres:

$$(6.54)\qquad \begin{cases} M(t;\zeta,D_t)v(t)\equiv t\{D_t^2+\sum_{j=0}^{n}\zeta_j^2\}v(t), \\ \mathcal{C}_{-1}(\zeta)\vec{v}\equiv\mathcal{C}_{-1}\vec{v}\equiv\gamma_{-1}v, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_0(\zeta)\vec{v}\equiv\gamma_0 v+\sum_{j=0}^{n}\beta_j\zeta_j\gamma_{-1}v. \end{cases}$$

Nous introduisons le nouvelle variable s et transformons ces opérateurs:

$$(6.55)\qquad t\to s=t|\zeta|,\quad \text{où } |\zeta|=(\sum_{j=0}^{n}\zeta_j^2)^{1/2}>0,\ v(t)\equiv w(s).$$

$$(6.56)\qquad \begin{cases} M(t;\zeta,D_t)v(t)=|\zeta|s\{D_s^2+1\}w(s); \\ \mathcal{C}_{-1}(\zeta)\vec{v}=|\zeta|^{-1}\gamma_{-1}w, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_0(\zeta)\vec{v}=\gamma_0 w+\sum_{j=0}^{n}\beta_j\frac{\zeta_j}{|\zeta|}\gamma_{-1}w. \end{cases}$$

Alors, la matrice $\mathcal{S}(\zeta)$, qui correspond à $\mathcal{R}(\xi)$, est de la forme

$$(6.57)\qquad \mathcal{S}(\zeta)=\begin{bmatrix} 1/2 & |\zeta|^{-1}/2 \\ |\zeta|/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Donc, la Condition ((S.L.)) sur $\mathcal{B}_0$ se traduit comme suit:

$$(6.58)\qquad \begin{cases} \text{Il existe une constante } c>0 \text{ telle que} \\ |\sum_{j=0}^{n}\beta_j\zeta_j+1|\geqq c, \quad \text{pour tout } \zeta\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ |\zeta|=1 \text{ et } \zeta_0\geqq 0. \end{cases}$$

Maintenant, nous avons les Problèmes (A) et (B) réduits aux équations:

(6.52)′ (a) $s(-w''(s)+w(s))=g(s)$, et $\int_0^\infty w(s)ds=\varphi$.

(6.53)′ (b) $s(-w''(s)+w(s))=g(s)$, et

$$w(+0)+\sum_{j=0}^{n}\beta_j\frac{\zeta_j}{|\zeta|}\int_0^\infty w(s)ds=\psi.$$

Les formes explicites des solutions de ces problèmes réduits (a) et (b) ont été données dans le paragraphe 2 (voir (2.25), (2.27)).

En revenant aux Problèmes (A) et (B) originels, nous avons les formes concrètes des solutions (l'existence et l'unicité ont été granties par le Théorème 3.):

La solution du Problème (A):

$$u(x,t)=\int_0^\infty G_A(t,s;\,x)\underset{x}{*}f(s,x)ds+K_A(t;\,x)\underset{x}{*}\varphi(x);$$

La solution du Problème (B):

$$u(x,t)=\int_0^\infty G_B(t,s;\,x)\underset{x}{*}f(s,x)ds+K_B(t;\,x)\underset{x}{*}\psi(x);$$

où $\underset{x}{*}$ signifie la convolution par rapport à x dans $\boldsymbol{R}^n$, et, les noyaux $G_A(t,s;\,x)$, $G_B(t,s;\,x)$, $K_A(t;\,x)$ et $K_B(t;\,x)$ sont définis de la manière suivante: Définissons d'abord un noyau $\kappa(t;\,x)$ et deux opérateurs Λ et T (en variable x):

(6.59) $$\kappa(t;\,x)=\mathcal{F}^{-1}[\exp\{-t(|\xi|^2+1)^{1/2}\}],\quad \text{pour } t>0;$$

(6.60) $$\Lambda=\mathcal{F}^{-1}[(|\xi|^2+1)^{1/2}\mathcal{F}];\ \text{et,}$$

$$T=\Lambda\underset{\xi\to x}{\mathcal{F}^{-1}}[\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\xi_j+\beta_0+(|\xi|^2+1)^{1/2}\}^{-1}\underset{x\to\xi}{\mathcal{F}}].$$

Alors, les noyaux en question s'expriment

(6.61) $$\begin{cases} G_A(t,s;\,x)=\dfrac{1}{2s}\Lambda^{-1}[\kappa(|t-s|;\,x)+\kappa(t+s;\,x)-2\kappa(t;\,x)],\\ K_A(t;\,x)=\Lambda\kappa(t;\,x); \end{cases}$$

(6.6) $$\begin{cases} G_B(t,s;\,x)=\dfrac{1}{2s}\Lambda^{-1}[\kappa(|t-s|;\,x)+(1-2T)\kappa(t+s;\,x)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2(1-T)\kappa(t;\,x)],\\ K_B(t,x)=T\kappa(t;\,x). \end{cases}$$

Non seulement pour l'opérateur L défini par (6. 49), mais aussi pour tout problème aux limites (6. 18) et (6. 19), nous pourrions également expliciter son opérateur de Green et son noyau de Poisson sous les hypothèses du Théorème 3.

Dans le Problème (B) ci-dessus, nous posons $\beta_j=0$ $(0\leqq j\leqq n)$. Alors, le résultat est l'isomorphisme suivant:

$$\{t(1-\Delta);\ \gamma_0\}:\ W_1^2\approx L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\times H^{1/2}(\boldsymbol{R}^n). \tag{6.63}$$

D'autre part, l'isomorphisme du cas non dégénéré est le suivant (bien connu):

$$\{(1-\Delta);\ \gamma_0\}:\ H^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\approx L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\times H^{3/2}(\boldsymbol{R}^n). \tag{6.64}$$

En interpolant ces deux choses, nous avons les isomorphismes intermédiaires:

$$\{t^\alpha(1-\Delta);\ \gamma_0\}:\ [H^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}),\ W_1^2]_\alpha\approx L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\times H^{\frac{3-2\alpha}{2}}(\boldsymbol{R}^n), \tag{6.65}$$

où $0<\alpha<1$, et,

$$\begin{aligned}[H^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}),\ W_1^2]_\alpha=\{f(x,t);\ &(1+t)^\alpha f(x,t)\in H^1(\boldsymbol{R}_+^{n+1}),\\ &t^\alpha D_{x_j}D_{x_l}f(x,t),\ t^\alpha D_{x_j}D_t f(x,t),\\ &t^\alpha D_t^2 f(x,t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1}),\ 1\leqq j,\ l\leqq n\}.\end{aligned}$$

§A. Appendice. Une Proposition de la théorie de Fuchs

A. I.

Soit $\hat{L}=\hat{L}(\tau;\ D_\tau)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini dans le paragraphe 2. *Supposons que tout zéro du polynôme $P^0(\tau)$ soit simple.* Nous allons traiter les deux équations homogène ou non homogène suivantes:

$$\hat{L}(\tau;\ D_\tau)u(\tau)=0,\quad \text{et} \tag{A.1}$$

$$\hat{L}(\tau;\ D_\tau)u(\tau)=\varphi(\tau). \tag{A.2}$$

Soient $\{\tau_\mu\}_{\mu=1}^m$ tous les zéros de $P^0(\tau)$. Pour μ fixe $(1\leqq\mu\leqq m)$, notons par $\#_\mu$ le nombre des solutions linéairement indépendantes et holomorphes de l'équation (A. 1) au point $\tau=\tau_\mu$.

En divisant par $P^0(\tau)$ chaque côté de (A. 1), nous voyons que le point $\tau=\tau_\mu$ est un pôle au plus d'ordre 1 des coefficients de D_τ^h $(0\leqq h\leqq k-1)$ de l'opérateur $P^0(\tau)^{-1}L(\tau;\, D_\tau)$. Donc, ce point est point régulier (point d'holomorphie) ou bien point singulier régulier. Et, selon un théorème de Perron, nous avons le lemme suivant (voir Bieberbach [4], p. 171):

Lemme A. 1: *Le nombre* $\#_\mu$ *est égal à* $(k-1)$ *ou bien à* k.

Nous passons maintenant à l'équation non homogène (A. 2). Etant donnée une fonction quelconque $\varphi(\tau)$ holomorphe au point $\tau=\tau_\mu$, nous nous demandons si l'équation (A. 2) admet au moins une solution holomorphe à ce point ou non. Le moyen habituel de répondre à cette question est d'essayer de déterminer une solution par la méthode de séries formelles.

Alors, le résultat principal de ce paragraphe se résume en une proposition suivante:

Proposition A. 1: *Soit* $\tau=\tau_\mu$ $(1\leqq\mu\leqq m)$ *un zéro quelconque de* $P^0(\tau)$.

(α) *Si* $\#_\mu=k-1$, *alors, l'équation* (A. 2) *admet toujours une solution holomorphe à ce point quelle que soit* $\varphi(\tau)$ *une fonction holomorphe;*

(β) *Par contre, si* $\#_\mu=k$, *il existe une fonctionnelle linéaire* $\varphi(\tau)\to\Gamma_\mu(\varphi)$ *telle que l'équation* (A. 2) *admette une solution holomorphe à ce point si et seulement si* $\Gamma_\mu(\varphi)=0$, *où la fonctionnelle* $\Gamma_\mu(\varphi)$ *est de la forme suivante:*

$$\Gamma_\mu(\varphi)\equiv\sum_{j=0}^{M}c_{\mu j}\frac{d^j\varphi}{d\tau^j}(\tau_\mu), \tag{A. 3}$$

avec un certain entier $M\geqq0$ *et de certaines constantes complexes* $c_{\mu j}$ $(0\leqq j\leqq M)$ *telles que* $c_{\mu M}=1$.

Tout ce qui suit dans ce paragraphe est consacré à la démonstration de cette proposition. Et ceci nous fournira aussi une démonstration du Lemme A. 1 ci-dessus.

A. II.

Comme la situation est locale, nous pouvons déplacer la point $\tau=\tau_\mu$ à l'origine. Indépendamment de toutes les notations jusqu'ici, nous allons traiter dès maintenant un opérateur différentiel $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\tau; d/d\tau)$ de la forme suivante:

$$\mathcal{L}u(\tau)=\mathcal{L}\left(\tau; \frac{d}{d\tau}\right)u(\tau)=u^{(k)}(\tau)+\tau^{-1}\sum_{h=0}^{k-1}p^{k-h}(\tau)u^{(h)}(\tau), \tag{A.4}$$

où k est un entier positif, les $u^{(h)}$ désignent les dérivées de u d'ordre h $(0\leqq h\leqq k)$ comme d'habitude, et *les coefficients* $p^h(\tau)$ $(1\leqq h\leqq k)$ *sont des fonctions holomorphes données au point* $\tau=0$ *ayant les séries tayloriennes*

$$p^h(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}p_j^h\tau^j, \quad \textit{pour } 1\leqq h\leqq k. \tag{A.5}$$

Les équations en question sont les deux suivantes:

$$\mathcal{L}\left(\tau; \frac{d}{d\tau}\right)u(\tau)=0, \tag{H}$$

$$\mathcal{L}\left(\tau; \frac{d}{d\tau}\right)u(\tau)=\tau^{-1}\varphi(\tau), \tag{NH}$$

où, dans l'équation non homogène (NH), $\varphi(\tau)$ est une fonction holomorphe quelconque au point $\tau=0$. Notons par $\#$ le nombre des solutions linéairement indépendantes et holomorphes de l'équation homogéne (H) au point $\tau=0$. Les questions sont de savoir exactement le cas $\#=k-1$ et le cas $\#=k$, et en même temps, de chercher de condition sur $\varphi(\tau)$ pour qu'il existe une solution holomorphe de l'équation (NH).

Nous définissons tout d'abord une infinité des polynômes $\{\Psi_j(\rho)\}_{j=0}$ en variable ρ (indépendante de τ):

$$\Psi_0(\rho)=\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2-k)}(\rho-\xi), \quad \text{où } \xi=k-1-p_0^1; \tag{A.6}$$

$$\Psi_j(\rho)=\sum_{h=0}^{\min.(j,k-1)}\frac{\Gamma(\rho+1)}{(j-h)!\,\Gamma(\rho+2+h-k)}p^{h+1}_{j-h}, \tag{A.7}$$

$$\text{pour } j=1, 2, \cdots$$

Ces polynômes sont introduits pour que nous ayons

$$\mathcal{L}\left(\tau;\ \frac{d}{d\tau}\right)\tau^{\rho}=\tau^{\rho-k}\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j(\rho)\tau^j. \tag{A. 8}$$

Ensuite, nous développons la fonction donnée $\varphi(\tau)$ dans (NH) et la solution cherchée $u(\tau)$ en séries tayloriennes

$$\varphi(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi_j}{j\,!}\tau, \quad \text{et} \quad u(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j}{j\,!}\tau^j. \tag{A. 9}$$

Alors, si les deux séries de (A. 9) satisfont à (NH), nous devons avoir les égalités successives suivantes:

$$\sum_{h=0}^{k-1}p_0^{k-h}u_h=\varphi_0\,, \quad \text{et,} \tag{A. 10}$$

$$(j+k-\xi)u_{j+k}+\sum_{\substack{\beta=0\\ \beta+h<j+k}}^{j+1}\sum_{h=0}^{k-1}\binom{j+1}{\beta}p_{j+1-\beta}^{k-h}u_{\beta+h}=\varphi_{j+1}\,, \tag{A. 11}$$

$$\text{pour } j=0,1,2,\cdots$$

Ces formules (A. 4)$\sim$(A. 11) sont toutes fondamentales dans les raisonnement qui suivent. Nous traitons d'abord le cas: $k=1$ et puis le cas: $k\geqq 2$.

Dès maintenant, nous faisons une convention d'écriture: Etant donnée une fonction $\varphi(\tau)$, nous disons en bref, "$\{s.h.;\ \varphi\}$ *est vraie*" au lieu de dire qu'il existe une solution holomorphe de l'équation (NH) pour cette fonction $\varphi(\tau)$, en pensant $\{s.h.;\ \varphi\}$ comme une proposition.

Dans la suite, nous aurons plusieures séries formelles du type (A. 9) ou bien d'une façon analogue modifiée. Pour chacune d'elles, nous devrons garantir sa convergence absolue dans un cercle centré à l'origine. Nous omettons toutes les vérifications des convergences, mais, ce sont effectuées sans exception par la méthode habituelle de séries majorantes.

A. III.

Nous nous bornons dans ce A. III au cas où $k=1$. Dans ce cas, nous avons $\Psi_0(\rho)=\rho-\xi$, et les égalités (A. 10) et (A. 11) deviennent

$$(\mathrm{A}.10)_1 \qquad -\xi u_0=\varphi_0, \quad \text{et,}$$

$$(\mathrm{A}.11)_1 \qquad (j-\xi)u_j+\sum_{\beta=0}^{j-1}\binom{j}{\beta}u_\beta p^1_{j-\beta}=\varphi_j, \quad \text{pour } j=1, 2, 3, \cdots$$

Nous distinguons les trois cas suivant la valeur de ξ:

$$\begin{cases}\text{Cas (a)}: \ \xi=0; \qquad \text{Cas (b)}: \ \xi=\text{entier}>0; \ \text{et,}\\ \text{Cas (c)}: \ \text{les autres cas.}\end{cases}$$

Cas (c): Quelle que soit $\varphi(\tau)$, nous pouvons déterminer tous les u_j par $(\mathrm{A}.10)_1$ et par $(\mathrm{A}.11)_1$ de la manière unique. Et, (H) admet une solution de la forme $u(\tau)=\tau^\xi v(\tau)$ avec une certaine fonction holomorphe $v(\tau)$. *Donc,* $\#=0$, *et* $\{s.h.; \varphi\}$ *reste toujours vraie pour n'importe quelle* φ.

Cas (a): Soit $\varphi(\tau)=0$. Alors, en posant $u_0=1$, nous avons tous les u_j $(j\geqq 1)$ déterminés par $(\mathrm{A}.11)_1$ de la manière unique. Et, pour $\varphi(\tau)$ générale, $(\mathrm{A}.10)_1$ et $(\mathrm{A}.11)_1$ sont possibles si et seulement si $\varphi_0=0$. *Donc,* $\#=1$, *et* $\{s.h.; \varphi\}$ *est vraie si et seulement si* $\Gamma(\varphi)\equiv\varphi_0=0$.

Cas (b): Soit d'abord $\varphi(\tau)=0$. Posons $u_j=0$ pour tout $0\leqq j \leqq \xi-1$ et $u_\xi=1$. Alors, les u_j $(\xi+1\leqq j)$ sont fixés de la manière unique. Donc, $\#=1$. Soit ensuite $\varphi(\tau)$ générale. On fixe les u_j $(0\leqq j\leqq \xi-1)$ uniques par $(\mathrm{A}.10)_1$ et $(\mathrm{A}.11)_1$. Chaque u_j $(0\leqq j \leqq \xi-1)$ est une combinaison linéaire des $\varphi_0, \cdots, \varphi_j$. En posant $j=\xi$ dans $(\mathrm{A}.11)_1$, nous devons avoir

$$(\mathrm{A}.12) \qquad \Gamma(\varphi)\equiv\varphi_\xi-\sum_{\beta=0}^{\xi-1}\binom{\xi}{\beta}p^1_{\xi-\beta}u_\beta(\varphi_0, \cdots, \varphi_\beta)=0,$$

pour que $\{s.h.; \varphi\}$ soit vraie. Si l'on a $\Gamma(\varphi)=0$, alors les autres u_j $(\xi+1\leqq j)$ sont déterminés encore par $(\mathrm{A}.11)_1$ pour u_ξ fixe quelconque. *Donc,* $\#=1$, *et* $\{s.h.; \varphi\}$ *est vraie si et seulement si* $\Gamma(\varphi)=0$, *où* Γ *est définie par* (A. 12).

Nous avons ainsi terminé le cas: $k=1$, et vérifié la Proposition A. 1.

A. IV.

Nous passons maintenant au cas où $k \geqq 2$. Nous posons d'abord

(A. 13) $$\vec{p}_0 = (p_0^1, \cdots, p_0^k) \in \boldsymbol{C}^k.$$

Lorsque le vecteur $\vec{p}_0$ n'est pas nul, nous définissons un espace affine $E(c)$ contenu dans $\boldsymbol{C}^k$ dépendant à un nombre complexe c:

(A. 14) $$E(c) = \{(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in \boldsymbol{C}^k;\ \sum_{h=0}^{k-1} p_0^{k-h} u_h = c\} \quad (\text{voir (A. 10)}).$$

Comme $\vec{p}_0 \neq \vec{0}$, $E(c)$ est de dimension $(k-1)$, et il est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{C}^k$ si $c=0$.

Maintenant, nous avons besoin de distinguer les trois cas suivants:

$$\begin{cases} \text{Cas (d):} & \vec{p}_0 = \vec{0}\,(=(0, \cdots, 0)); \\ \text{Cas (e):} & \xi = \text{entier} \geqq k \ (\text{donc } \vec{p}_0 \neq \vec{0}); \\ \text{Cas (f):} & \text{les autres cas.} \end{cases}$$

Cas (d): Le point $\tau=0$ est un point régulier. Donc, $\sharp = k$, et et $\{s.h.;\ \varphi\}$ est vraie si $\varphi_0 = 0$. Soit donc $V(\tau)$ la solution holomorphe de (H) caractérisée par la condition initiale

(A. 15) $$V^{(j-1)}(0) = \delta_{j,k} \quad \text{pour } 1 \leqq j \leqq k.$$

Alors, pour $\varphi(\tau)$ quelconque donnée, l'équation (NH) admet une solution

$$u(\tau) = \varphi_0 V(\tau) \log \tau + w(\tau),$$

où $w(\tau)$ est une fonction holomorphe convenablement choisie. *Donc,* $\sharp = k$, *et* $\{s.h.;\ \varphi\}$ *est vraie si et seulement si* $\Gamma(\varphi) \equiv \varphi_0 = 0$.

Cas (e): Soit $\varphi(\tau)$ quelconque, et fixons un $(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in E(\varphi_0)$. Si $\xi = k$, nous pouvons passer tout de suite à l'égalité (A. 11) avec $j=0$. Mais si $\xi > k$, nous déterminons les u_j $(k \leqq j \leqq \xi - 1)$ par (A. 11). Ce sont de certaines combinaisons linéaires de $(u_0, \cdots, u_{k-1})$ et de $(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-k+1})$ $(k \leqq j \leqq \xi - 1)$. Posons maintenant $j = \xi - k$ dans (A. 11). Ceci nous donne une relation linéaire entre $(u_0, \cdots, \varphi_{k-1})$ et $(\varphi_1, \cdots, \varphi_{\xi-1+k})$. Nous pouvons l'exprimer sous la forme

(A. 16) $$\sum_{h=0}^{k-1} q^{k-h} u_h = \varphi_{\xi-k+1} - \Gamma_0(\varphi_1, \cdots, \varphi_{\xi-k}),$$

où le vecteur

(A. 17) $$\vec{q} = (q^1, \cdots, q^k) \in \boldsymbol{C}^k$$

est déterminé par les p_j^h $(1 \leqq h \leqq k, j \geqq 0)$, et Γ_0 est une certaine combinaison linéaire des $(\varphi_1, \cdots, \varphi_{\xi-k})$. Nous posons provisoirement

(A. 18) $$E' = \{(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in E(0);\ \sum_{h=0}^{k-1} q^{k-h} u_h = 0\}.$$

Il faut donc distinguer les deux cas suivants:

$$\begin{cases} \text{Cas } (\mathrm{e}_1):\ \vec{q} \text{ est linéairement dépendant à } \vec{p}_0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{donc, } \dim. E' = k-1; \\ \text{Cas } (\mathrm{e}_2):\ \vec{q} \text{ est linéairement indépendant de } \vec{p}_0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{donc, } \dim. E' = k-2. \end{cases}$$

Cas $(\mathbf{e}_1)$**:** En choisissant une base quelconque de E', nous obtenons un système de $(k-1)$ solutions linéairement indépendantes et holomorphes. Et la k-ème solution s'obtient en posant $(u_0, \cdots, u_{k-1}) = (0, \cdots, 0)$ et $u_\xi = 1$. Donc, $\# = k$. Soit ensuite $\varphi(\tau)$ générale. Nous prenons un $(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in E(\varphi_0)$ et déterminons les $(u_k, \cdots, u_{\xi-1})$ comme ci-dessus. Alors, par (A. 16), nous avons

(A. 19) $$\Gamma(\varphi) \equiv \varphi_{\xi-k+1} - \Gamma_0(\varphi_1, \cdots, \varphi_{\xi-k}) - \alpha\varphi_0 = 0,$$

si $\{s.h.;\ \varphi\}$ est vraie, où α est la constante telle que $\vec{q} = \alpha\vec{p}_0$. *Donc,* $\# = k$, *et* $\{s.h.;\ \varphi\}$ *est vraie si et seulement si* $\Gamma(\varphi) = 0$ *avec* Γ *définie par* (A. 19).

Cas $(\mathbf{e}_2)$**:** En correspondant à une base de E', nous avons un système de $(k-2)$ solutions linéairement indépendantes et holomorphes. Et la $(k-1)$-ème solution est obtenue en posant aussi $(u_0, \cdots, u_{k-1}) = (0, \cdots, 0)$ et $u_\xi = 1$. Notons cette solution par $U_{k-1}(\tau)$. Alors, la k-ème solution n'est plus holomorphe, en effet nous pouvons la trouver en posant

$$U_k(\tau) = U_{k-1}(\tau) \log \tau + v(\tau)$$

avec une certante fonction $v(\tau)$ holomorphe. Donc, $\# = k-1$. Ensuite, prenons une $\varphi(\tau)$ quelconque. Nous pouvons choisir un $(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in E(\varphi_0)$ satisfaisant à (A. 16). Posons de plus $u_\xi = 0$. Alors, les autres $u_j (\xi + 1 \leqq j)$ sont fixés par (A. 11) de la manière unique. *Par conséquent*, $\# = k-1$, *et*, $\{s.h.; \varphi\}$ *est toujours vraie quelle que soit* φ.

Nous avons ainsi terminé le cas (e).

Cas (f): Dans l'égalité (A. 11), les coefficients $(j+k-\xi)$ de u_{j+k} ne s'annule jamais pour $j \geqq 0$. Donc, en choisissant un $(u_0, \cdots, u_{k-1}) \in E(\varphi_0)$, nous pouvons infiniment continuer à résoudre (A. 11). *Donc*, $\{s.h.; \varphi\}$ *est toujours vraie pour n'importe quelle* φ, *et de plus*, $\# = k-1$.

Ce dernier fait que $\# = k-1$ reste encore à vérifier. D'abord, il est claire que $\# \geqq k-1$, car dim. $E(0) = k-1$. Alors, il suffit de trouver une solution non holomorphe de (H).

Si ξ *n'est pas entier*, nous trouvons facilement une solution qui s'écrit $\tau^\xi v(\tau)$ ($v(\tau)$ est une fonction holomorphe convenable avec $v(0) = 1$). Cette solution est de singularité de la puissance fractionnaire.

Si $\xi =$ *entier* < 0, alors une solution non holomorphe de (H) s'écrit $\tau^\xi \{u_1(\tau) \log \tau + u_2(\tau)\}$, où les $u_1(\tau)$ et $u_2(\tau)$ sont holomorphes et $u_2(0) = 1$.

Considérons le cas où $\xi = k-1$ et $p_0 \neq 0$. Dans ce cas, $p_0^1 = 0$ et $(p_0^2, \cdots, p_0^k) \neq (0, \cdots, 0)$. Donc, $(u_0, \cdots, u_{k-2}, u_{k-1}) = (0, \cdots, 0, 1) \in E(0)$, c'est-à-dire, il existe une solution holomorphe $V(\tau)$ de (H) caractérisée par (A. 15). Alors, la k-ème solution s'obtient sous la forme $W(\tau) = V(\tau) \log \tau + w(\tau)$, où $w(\tau)$ est une fonction holomorphe convenable.

Soit maintenant $0 \leqq \xi =$ *entier* $\leqq k-2$. Nous allons traiter ce dernier cas par la méthode de Frobenius (pour la généralite de cette méthode, nous pouvons référer Bieberbach [4] et le Dictionnaire Mathématique [8]). C'était pour faire ce calcul que nous avons préparé les définitions (A. 6) et (A. 7) des polynômes $\{\Psi_j(\rho)\}_{j=0}^\infty$.

Indépendamment de la formule (A. 9), nous posons

$$(\mathrm{A}.20)\qquad u(\tau;\rho)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}u_j(\rho)\tau^{\rho+j},$$

et nous opérons $\mathcal{L}\left(\tau;\dfrac{d}{d\tau}\right)$ à cette série formelle:

$$(\mathrm{A}.21)\qquad \mathcal{L}\left(\tau;\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau;\rho)\equiv\tau^{\rho-k}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{U}_j(\rho)\tau^j,$$

où les coefficients $\mathcal{U}_j(\rho)$ s'écrivent, grâce à (A. 6), (A. 7) et à (A. 8):

$$(\mathrm{A}.22)\qquad \begin{cases}\mathcal{U}_0(\rho)=\Psi_0(\rho)u_0(\rho);\\ \mathcal{U}_j(\rho)=\Psi_0(\rho+j)u_j(\rho)+\sum_{h=0}^{j-1}\Psi_{j-h}(\rho+h)u_h(\rho),\end{cases}$$

pour $j=1,2,\cdots$.

Nous voyons par hypothèse: $0\leqq\xi\leqq k-2$, que

$$(\mathrm{A}.23)\qquad \begin{cases}\text{Le polynôme } \Psi_0(\rho+h) \text{ est divisible}\\ \qquad \text{par } (\rho-\xi)^2 \text{ si et seulement si } h=0, \text{ et,}\\ \qquad \text{par } \rho-\xi \text{ si et seulement si } 0\leqq h\leqq k-2-\xi;\end{cases}$$

et que, s'il existe un couple d'indices (j,h) tel que $0\leqq h<j\leqq k-2-\xi$, alors le polynôme $\Psi_{j-h}(\rho+h)$ est divisible par $\rho-\xi$.

Nous déterminons maintenant les $u_j(\rho)$ par les formules successives

$$(\mathrm{A}.24)\qquad u_0(\rho)\equiv 1,\quad \text{et}\quad \mathcal{U}_j(\rho)\equiv 0,\quad \text{pour } j=1,2,3,\cdots$$

Les $u_j(\rho)$ ainsi choisis deviennent tous certaines fonctions rationnelles de ρ holomorphes à $\rho=\xi$. Et, de plus, nous avons

$$(\mathrm{A}.25)\qquad \mathcal{L}\left(\tau;\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau;\rho)=\Psi_0(\rho),$$

où le deuxième membre est divisible par $(\rho-\xi)^2$. Posons alors

$$(\mathrm{A}.26)\qquad v(\tau;\rho)=\frac{\partial u}{\partial\rho}(\tau;\rho)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\rho}\{u_j(\rho)\tau^{\rho+j}\}.$$

Nous avons

$$(\mathrm{A}.27)\qquad \mathcal{L}\left(\tau;\frac{d}{d\tau}\right)v(\tau;\rho)=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\mathcal{L}\left(\tau;\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau;\rho)\right\}=\frac{d}{d\rho}\Psi_0(\rho).$$

Le deuxième membre de (A. 27) s'annule au point $\rho=\xi$, c'est-à-dire, la fonction $v(\tau;\ \xi)$ est une solution de l'équation (H). Cette fonction possède une singularité logarithmique au point $\tau=0$.

(Par la même méthode de Frobenius, nous pouvons aussi traiter tous les cas (déjà faits) où ξ est entier. Si par exemple ξ est un entier négatif, nous fixons les $u_j(\rho)$ également par (A. 24) mais en commençant par $u_0(\rho)=\rho-\xi$.)

Nous avons complètement terminé tous les cas possibles par rapport à l'opérateur $\mathcal{L}(\tau;\ d/d\tau)$ défini par (A. 4). Et, nous avons achevé la démonstration de la Proposition A. 1.

Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[2] M. S. Baouendi: Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris, 1966 (Bull. Soc. Math. France, **95** (1967), 45-87).

[3] ··· ··· : Sèminaire Lions-Schwartz, Paris. Exposé du 8 mars 1968.

[4] L. Bieberbach: Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen. Springer, 1953.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: Inequalities. Cambridge, 1951.

[6] L. Hörmander: Linear partial differential operators. Springer, 1963.

[7] M. Schechier: General boundary value problems for elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 457-486.

[8] Dictionnaire Mathématique: Soc. Math. Japon. Edition de 1966.

[9] N. Shimakura: Sur une ceratine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés. Proc. Japan Ac. 1968.

Kyoto University

Correction: Le travail [3], cité dans l'Introduction comme un résultat de M. Baouendi seul, était en effet une collaboration avec M. C. Goulaouic. L'auteur s'excuse vivement à M. Goulaouic de cette négligeance.