

**Nouvelles recherches sur les fonctions  
entières de plusieurs variables complexes  
(II). Fonctions entières qui se réduisent  
à celles d'une variable**

Par

Toshio NISHINO

Dédié à Monsieur le professeur A. Komatu,  
à l'occasion de son soixantième anniversaire

(Reçu le 1 Février, 1969)

**Introduction**

Dans le mémoire précédent,<sup>1)</sup> on a traité quelques propriétés de la distribution des surfaces premières d'une fonction entière de plusieurs variables complexes. Le but du mémoire actuel est de chercher des conditions pour qu'une fonction entière de deux variables complexes se réduise à celle d'une variable au moyen d'un automorphisme analytique de tout l'espace. Il est évident que toute surface première de telle fonction entière doit être simplement connexe et du type parabolique comme une surface de Riemann d'une variable. Inversement, je dit ici que cette réduction d'une fonction entière est possible pourvu que toute de ses surfaces premières satisfasse à ces deux conditions-ci. C'est le résultat principal de ce mémoire.

Ce mémoire se sépare en deux parties. Dans la première partie, on considèrera un domaine multivalent  $D$  étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme  $(\Gamma, C)$ , où  $\Gamma: |z| < \rho$ ,  $C: |u| < \infty$ , tel que, pour

---

1) T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. 8-1 (1968) 49-100.

tout  $c$  dans  $I$ , la sous-variété  $D_c$  de  $D$  définie par  $z=c$ , soit connexe, simplement connexe et du type parabolique. Alors, on peut former une fonction  $\varphi$  sur  $D$  telle que, pour tout  $c$  dans  $I$ , la restriction de la fonction  $\varphi$  sur  $D_c$  fasse correspondre  $D_c$  à tout le plan d'une variable complexe holomorphiquement et biunivoquement. A ce moment-là, on verra que la fonction  $\varphi$  est holomorphe sur  $D$  sous certaines conditions convenables. C'est un lemme fondamental dans ce mémoire. Dans la deuxième partie, on construira actuellement un automorphisme analytique de tout l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$  par lequel une fonction entière de  $x$  et  $y$  telle que toute de ses surfaces premières soit simplement connexe et du type parabolique se réduise à celle d'une variable. Dans le présent mémoire, on emploiera sans répéter leurs définitions quelques notions introduites dans le mémoire précédent, que l'on appellera mémoire (I) dans la suite.

## I. Uniformisation d'un domaine spécial

**1. Problème.** Soit  $D$  un domaine multivalent<sup>2)</sup> étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme  $(I, C)$ , où  $I$  est un cercle donné par  $|z| < \rho$  et  $C$  signifie tout le plan de  $u$ , dans l'espace de deux variables complexes  $z$  et  $u$ . Pour  $c$  dans  $I$ , désignons par  $D_c$  la sous-variété analytique de  $D$  formée de tous les points qui se trouvent au-dessus de la droite analytique donnée par  $z=c$ .

On suppose ici que  $D$  satisfait aux conditions suivantes:

- 1)  $D$  est une variété de Stein.<sup>3)</sup>
- 2) Pour tout  $c$  dans  $I$ ,  $D_c$  est connexe, simplement connexe et du type parabolique.<sup>4)</sup>
- 3) Pour tout  $c$  dans  $I$ ,  $D_c$  n'a aucun point singulier comme surface

---

2) Dans ce mémoire, un domaine multivalent peut en général avoir des points de ramification.

3) Voir, par exemple, K. Stein. Analytische Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und zweite Cousinsche Problem, Math. Annalen **123** (1951).

4) Cela vaut dire qu'on peut faire correspondre  $D_c$  à tout le plan d'une variable complexe holomorphiquement et biunivoquement.

analytique dans  $D$ .

- 4) Il y a au moins un feuillet de  $D$  qui contient une partie univalente justement étalée au-dessus d'un voisinage de la droite analytique donnée par l'équation  $u=0$  dans  $(\Gamma, C)$ .

On dira, dans ce mémoire, un tel domaine *de type* ( $T$ ). On désigne par  $O$  l'ensemble de tous les points dans la partie exprimée en 4), qui se trouvent au-dessus de la droite analytique  $u=0$ . Alors, d'après 2), pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ , on peut faire correspondre  $D_c$  à tout le plan d'une variable complexe  $w$  par une fonction holomorphe sur  $D_c$  biunivoquement. De plus, cette fonction, désignée par  $\varphi_c(p)$ , est déterminée uniquement, quand on y impose deux conditions,

$$\varphi_c(O_c) = 0 \quad \text{et} \quad \partial\varphi_c(O_c)/\partial u = 1,$$

où  $O_c$  est le seul point commun de  $O$  et de  $D_c$ . Par suite, on peut définir une fonction  $\varphi(p)$  dans  $D$  de manière que, pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ , on ait sur  $D_c$

$$\varphi(p) = \varphi_c(p).$$

On peut regarder la fonction

$$w = \varphi(p)$$

comme une transformation biunivoque de  $D$  à un dicylindre de la forme  $(\Gamma, C')$ , où  $C'$  signifie tout le plan de  $w$ , telle que, pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ ,  $D_c$  corresponde biunivoquement à la droite analytique  $z=c$ . On appellera donc  $\varphi(p)$  *fonction attachée au domaine*  $D$  et la transformation comme ci-dessus, en peu de mots, transformation par  $\varphi(p)$ . Ensuite, regardant  $\varphi(p)$  comme une fonction multiforme de  $u$  avec un paramètre  $z$ , on peut considérer la fonction inverse de  $\varphi(p)$  dans le dicylindre  $(\Gamma, C')$ . Désignons-la par  $\zeta(z, w)$ . Évidemment, elle se développe en série de Taylor de la forme

$$\zeta(z, w) = w + a_2(z)w^2 + a_3(z)w^3 + \dots$$

puisque, pour tout  $c_i$  dans  $\Gamma$ ,  $\zeta(c_i, w)$  est une fonction entière de  $w$ .  $\zeta(z, w)$  sera dite, en peu de mots, *fonction inverse de*  $\varphi(p)$ .

Le but de la partie actuelle est de montrer que la fonction  $\varphi(p)$  attachée au domaine  $D$  est toujours holomorphe dans  $D$ .

**2. Continuité de la fonction  $\varphi(p)$ .** Dans la section actuelle, nous allons d'abord montrer que la fonction  $\varphi(p)$  attachée au domaine de type  $(T)$  est continue dans  $D$ . Pour cela, on préparera deux lemmes suivants.

**Lemme 1.** *Dans le plan d'une variable complexe  $x$ , considérons une suite de fonctions*

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

*qui sont holomorphes et univalentes dans les cercles  $r_i$  de la formes*

$$r_i: |x| < M_i \quad i=1, 2, \dots$$

*respectivement. On suppose de plus que toute fonction  $f_i(x)$  satisfait aux conditions*

$$f_i(0)=0 \quad \text{et} \quad \partial f_i(0)/\partial x=1 \quad i=1, 2, \dots,$$

*et que la suite de nombres  $M_i$  s'augmente indéfiniment avec  $i$ .*

*Alors, la suite de fonctions (1) tend vers la fonction  $x$  uniformément en tout point du plan  $x$ .*

Comme on va le voir tout à l'heure, il est une modification du théorème dû à *Koebe*.

Considérons, en effet, un cercle  $r$  de la forme  $|x| < M$ , où  $M$  est un nombre réel positif quelconque. On peut alors dire que toutes les fonctions  $f_i(x)$ , où  $i \geq n$  et  $M_i > 2M$ , sont bien définies dans  $r$  et bornées uniformément en module. Car, d'après le théorème de *Koebe*, on aura, sur la circonférence  $|x| = M$ , les inégalités

$$\frac{M}{(1+r_i)^2} \leq |f_i(x)| \leq \frac{M}{(1-r_i)^2},$$

où  $M=r_i M_i$ . Par suite, la suite de fonctions (1) est normale dans le cercle  $r$ . Il s'en suit qu'on peut extraire de toute suite partielle de la suite (1) encore une suite partielle

$$f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), f_{i_3}(x), \dots$$

qui converge uniformément en tout point du plan  $x$ . Désignons par  $f(x)$  la fonction limite de cette suite partielle. Elle est évidemment holomorphe et univalente dans tout le plan de  $x$  et, de plus, elle satisfait aux conditions

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial f(0) / \partial x = 1.$$

Il suit de là que

$$f(x) \equiv x.$$

Ceci signifie certainement que la suite de fonctions (1) elle-même tend vers  $x$  uniformément en tout point du plan  $x$ . Le lemme 1 a été donc démontré.

Ensuite, considérons l'une quelconque des sous-variétés  $D_c$ , où  $c \in \Gamma$ . Formons une fonction  $\psi_c(p)$  holomorphe dans  $D$  telle que l'on ait sur  $D_c$

$$\psi_c(p) = \varphi(p).$$

Grâce à Oka,<sup>5)</sup> ceci est toujours possible de façon habituelle, puisque, d'après l'hypothèse,  $D$  est une variété de Stein et que  $D_c$  n'a aucun point singulier. Cela posé, on aura le

**Lemme 2.** *Il existe un voisinage  $U$  de  $D_c$  dans  $D$  tel que l'on puisse regarder*

$$z \quad \text{et} \quad v = \psi_c(p)$$

*comme un système de coordonnées locales dans  $U$ .*

En effet, soit  $p_0$  un point quelconque de  $D_c$  et soient  $x$  et  $y$  des coordonnées locales en  $p_0$  ayant  $p_0$  comme l'origine. Alors on peut regarder  $z$  comme fonction holomorphe par rapport aux  $x$  et  $y$ . Désignons, de nouveau, les fonctions  $z$ ,  $\psi_c(p)$  et  $\varphi(p)$  en  $p$  par

$$z(x, y), \quad \psi_c(x, y) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y)$$

respectivement. D'après l'hypothèse, deux fonctions

5) Voir, par exemple, K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, Japan 1961. p. 230.

$$\partial z/\partial x \text{ et } \partial z/\partial y$$

ne s'annulent pas à la fois à l'origine. Supposons, pour fixer les idées, que  $\partial z/\partial y \neq 0$  à l'origine. On peut alors exprimer, au voisinage de  $p_0$ , la sous-variété  $D_c$  sous la forme

$$y = g(x),$$

où  $g(x)$  est une fonction holomorphe de  $x$  à l'origine. Il s'en suit que la fonction  $\psi_c(x, y)$  peut être représentée comme

$$\psi_c(x, y) = \xi(x) + (y - g(x)) \cdot h(x, y),$$

où  $\xi(x)$  est une fonction holomorphe de  $x$  à l'origine donnée par  $\psi_c(x, g(x))$ , et  $h(x, y)$  est celle de  $x$  et  $y$ . En ce moment, on a

$$d\xi(0)/dx \neq 0.$$

Considérons le déterminant fonctionnel

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Par un calcul facile, on aura à l'origine

$$J = -d\xi/dx \cdot \partial z/\partial y,$$

donc elle ne s'annule pas à l'origine. Ceci signifie que le lemme 2 est certainement vrai.

Il s'agit maintenant de voir la continuité de la fonction  $\varphi(p)$  dans  $D$ . Supposons, pour le réduire à l'absurde, que ce n'est pas vrai. Il y a alors un point  $q$  et une suite de points  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) tendant vers  $q$  dans  $D$  tels que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(q_i) \neq \varphi(q).$$

Désignons par  $c$  et  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) les valeurs de  $z$  en  $q$  et  $q_i$ , respectivement. On peut supposer sans restreindre la généralité que  $c_i \neq c$  ( $i=1, 2, \dots$ ), puisque la fonction  $\varphi(p)$  est continue sur  $D_c$ . Formons une fonction  $\psi_c(p)$  du lemme 2 pour  $D_c$  et considérons

$$z \text{ et } v = \psi_c(p)$$

comme un système de coordonnées locales dans un voisinage convenable  $U$  de  $D_c$  dans  $D$ . On peut supposer ici que l'on a

$$v = 0 \text{ et } \partial v / \partial u = 1$$

en tout point de  $U \cap O$ . Car, soient  $\alpha(z)$  et  $\beta(z)$  les traces de  $\psi_c(p)$  et  $\partial \psi_c(p) / \partial u$  sur  $O$ . Elles sont certainement holomorphes dans  $I'$  et satisfont aux conditions  $\alpha(O_c) = 0$  et  $\beta(O_c) = 1$ , où  $O_c$  est le seul point commun de  $O$  et de  $D_c$ . Considérons alors une nouvelle fonction

$$\psi_c^*(p) = \frac{\psi_c(p) - \alpha(z)}{\beta(z)}$$

comme  $v$ . Évidemment cette fonction-ci  $v$  a aussi le même caractère que l'on a dit dans le lemme 2, et de plus elle satisfait aux conditions demandées.

Considérons la fonction  $\varphi(p)$  dans  $U$  comme une fonction de  $z$  et  $v$ , et désignons-la par  $\varphi(z, v)$ . Envisageons ici les fonction  $\varphi(c_i, v)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Je dit qu'elles satisfont aux conditions indiquées dans le lemme 1. Car, pour un nombre réel positif  $N$ , quelque grand qu'il soit, la partie de  $D$  donnée par les inégalités

$$|z - c| < \varepsilon \text{ et } |v| < N$$

est contenue entièrement dans le voisinage  $U$  pourvu qu'un nombre réel positif  $\varepsilon$  soit suffisamment petit. De plus, il est évident qu'on aura

$$\varphi(c_i, 0) = 0 \text{ et } \partial \varphi(c_i, 0) / \partial v = 1.$$

La suite de fonctions  $\varphi(c_i, v)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) donc, d'après le lemme 1, tend vers  $v$  uniformément en tout point du plan de  $v$ . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse puisque, posant  $v_0 = \psi_c(q)$  et  $v_i = \psi_c(q_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(c_i, v_i) \neq \varphi(c, v_0) = v_0,$$

au contraire de ce que la suite de points  $(c_i, v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) tend vers le point  $(c, v_0)$ .

On en conclut que

*La fonction  $\varphi(p)$  attachée au domaine  $D$  de type  $(T)$  est toujours continue dans  $D$ .*

Revenons à la fonction inverse de la fonction  $\varphi(p)$ :

$$u = \zeta(z, w) = w + a_2(z)w^2 + a_3(z)w^3 + \dots$$

D'après la continuité de  $\varphi(p)$  que nous venons de voir,  $\zeta(z, w)$  est aussi continue dans le dicylindre  $(\Gamma, C')$ . Par suite, toutes les fonctions  $a_i(z)$  ( $i=2, 3, \dots$ ) sont aussi continues dans  $\Gamma$ . On verra plus tard que toutes les fonctions  $a_i(z)$  ( $i=2, 3, \dots$ ) sont holomorphes dans  $\Gamma$ .

**3. Cas algébrique.** Un domaine  $D$  de type  $(T)$  sera dit *algébrique* si, pour tout point  $(z, u)$  du dicylindre  $(\Gamma, C)$ , le nombre des points de  $D$  qui se trouvent au-dessus de  $(z, u)$  est fini et borné supérieurement. Dans ce cas, la fonction inverse  $\zeta(z, w)$  de la fonction  $\varphi(p)$  attachée à  $D$  se réduit à un polynôme de la forme

$$\zeta(z, w) = w + a_2(z)w^2 + \dots + a_n(z)w^n,$$

où  $a_i(z)$  ( $i=2, \dots, n$ ) sont des fonctions continues dans  $\Gamma$  et  $a_n(z)$  ne s'annule pas identiquement, c'est-à-dire,  $n$  est le plus grand nombre des points de  $D$  qui se trouvent au-dessus d'un point dans  $(\Gamma, C)$ . Il suit de là que  $D$  a au plus  $n$  feuillets et n'a aucun point frontière situé au-dessus d'un point quelconque de  $(\Gamma, C)$ . Donc il est un domaine algébroïde.<sup>6)</sup> Nous allons montrer, dans la section actuelle, que toutes les fonctions  $a_i(z)$  ( $i=2, \dots, n$ ) sont holomorphes dans  $\Gamma$ .

Considérons, d'abord, dans le dicylindre  $(\Gamma, C')$  l'ensemble  $T$  de tous les points où

$$(2) \quad \partial \zeta(z, w) / \partial w = 0.$$

Pour toute valeur  $c$  dans  $\Gamma$ , où  $a_n(z) \neq 0$ , il y a exactement  $n-1$  points communs de  $T$  et de la droite analytique  $z=c$ , un point com-

6) C'est-à-dire un domaine d'holomorphic d'une fonction analytic que donnée implicitement par l'annulation d'un polynôme dont les coefficients sont des fonctions holomorphes dans  $(\Gamma, C)$ .

pté  $\nu$  fois s'il est zéro d'ordre  $\nu$  de l'équation (2). Considérons ensuite l'image  $T'$  de  $T$ , par la fonction  $\zeta(z, w)$  dans le dicylindre  $(\Gamma, C)$ .  $T'$  est une surface analytique dans  $(\Gamma, C)$ , puisqu'elle est la projection de la surface critique de  $D$  et que  $D$  est un domaine algébroïde. Par suite, elle peut être représentée par la forme

$$u = r(z),$$

où  $r(z)$  est une fonction analytique multiforme ayant  $n-1$  au plus de feuillets et n'ayant aucun point singulier autre que des points critiques et des pôles, c'est-à-dire, une fonction algébroïde sur  $\Gamma$ . Nous représentons  $T$  par la forme

$$w = \eta(z).$$

On voit facilement qu'il n'y a qu'un nombre infini dénombrable au plus de points dans  $\Gamma$  en lesquels la fonction  $r(z)$  a des points critiques ou des pôles. Désignons-les par  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ). L'ensemble de ces points est évidemment fermé dans  $\Gamma$ . Prenons un point  $p_0$  de  $\Gamma$  autre que  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), mais d'ailleurs quelconque, et décrivons un cercle  $\delta$ , de centre  $p_0$  et de rayon suffisamment petit pour que  $\delta$  ne contienne aucun point  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Ceci est possible certainement. La fonction  $r(z)$  au-dessus de  $\delta$  se sépare en quelques fonctions holomorphes et uniformes. Désignons-les par

$$r_1(z), r_2(z), \dots, r_\mu(z),$$

où on désigne deux fonctions par les notations distinctes lorsqu'elles correspondent à deux surfaces critiques distinctes bien qu'elles soient identiques en tant que fonctions. Nous désignons aussi par  $\eta_i(z)$  ( $i=1, \dots, \mu$ ) les parties de la fonction  $\eta(z)$  correspondant à  $r_i(z)$  par la fonction  $\zeta(z, w)$ . Ensuite  $e_i$  ( $i=1, \dots, \mu$ ) les ordres des surfaces critiques de  $D$  qui correspondent à  $r_i(z)$  respectivement. Alors,  $\eta_i(z)$  sont zéros d'ordre  $e_i$  de l'équation (2).

De la définition, on aura, pour chaque  $\eta_i(z)$ ,  $e_i$  paires d'équations algébriques simultanées comme ce qui suit,

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2 \cdot a_2(z) \eta_i(z) + \cdots + n \cdot a_n(z) (\eta_i(z))^n \\ r_i(z) = \eta_i(z) + a_2(z) (\eta_i(z))^2 + \cdots + a_n(z) (\eta_i(z))^n \end{cases}$$

et, de plus, dans le cas où  $e_i > 1$ ,

$$\begin{cases} 0 = r! \cdot a_r(z) + \frac{(r+1)!}{2} a_{r+1}(z) \eta_i(z) + \cdots + \frac{(n-r+1)!}{n!} a_n(z) (\eta_i(z))^{n-r}, \\ r_i(z) = \eta_i(z) + a_2(z) (\eta_i(z))^2 + \cdots + a_n(z) (\eta_i(z))^n, \end{cases}$$

où  $2 \leq r \leq e_i$ . On obtient ainsi exactement  $n-1$  paires d'équations algébriques simultanées. Substituant ici toutes les fonctions  $a_i(z)$  ( $i=2, \dots, n$ ) par des indéterminés  $X_i$  dans toutes les équations et éliminant  $\eta_i(z)$  de chaque paire d'équations simultanées, on obtient exactement  $n-1$  autres équations algébriques de  $X_i$  ( $i=2, \dots, n$ ), que l'on désigne par

$$(3) \quad \mathfrak{P}_k(z, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad k=1, \dots, n-1,$$

où  $\mathfrak{P}_k$  sont des polynômes de  $X_i$  dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de  $z$ .

Considérons, dans l'espace de  $n$  variables complexes  $X_2, \dots, X_n$  et  $z$ , l'ensemble  $\Sigma$  de tous les points où  $n-1$  équations (3) s'annulent simultanément. C'est un ensemble analytique dans le polycylindre de la forme

$$z \in \delta \quad \text{et} \quad |X_i| < \infty \quad i=2, \dots, n.$$

Tout point de la forme  $(c, a_2(c), \dots, a_n(c))$ , où  $c \in \delta$ , se trouve certainement sur  $\Sigma$ . En ce moment, je dit que

*Les fonctions continues  $a_i(z)$  ( $i=2, \dots, n$ ) sont obtenues par la résolution des équations simultanées (3). Donc, elles sont holomorphes dans  $\delta$ .*

En effet, soit  $\Sigma_c$  un ensemble de tous les points communs de  $\Sigma$  et du plan analytique  $z=c$ , où  $c \in \delta$ . Comme on sait bien, il suffit, pour le démontrer, de voir que le point  $p_0$  de la forme  $(c, a_2(c), \dots, a_n(c))$  est isolé dans  $\Sigma_c$ , pour tout  $c \in \delta$ . Supposons donc, pour le réduire à l'absurde, que ce n'est pas vrai. Alors  $\Sigma_c$  contient au moins une composante irréductible de dimension plus grande que 1, passant

par  $p_0$ , puisque  $\Sigma_c$  est aussi un ensemble analytique dans tout l'espace des  $X_2, \dots, X_n$ . Soit  $(c, b_2, \dots, b_n)$  un point de  $\Sigma_c$  situé dans un voisinage  $v$  de  $p_0$  suffisamment petit de la façon qu'on exprimera plus tard. Considérons un polynôme de la forme

$$u = \zeta^*(w) = w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n.$$

Alors, pour toute valeur  $r_i(c)$  ( $i=1, \dots, \mu$ ), il y a au moins un zéro d'ordre  $e_i$  au plus de l'équation

$$0 = -r_i(c) + w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n,$$

puisque le point  $(c, b_2, \dots, b_n)$  remplit les équations (3). De plus, il n'y a aucune valeur autre que  $r_i(c)$  ( $i=1, \dots, \mu$ ) qui a cette propriété puisqu'elle doit être la valeur de  $\zeta^*(w)$  en  $w$  où  $\partial^i \zeta^* / \partial w^i = 0$ . Il s'en suit que la surface de Riemann de la fonction inverse de  $\zeta^*(w)$  doit être identique entièrement à  $D_c$ , pourvu que  $v$  soit suffisamment petit, puisqu'il en est ainsi en dehors de la somme des voisinages suffisamment petits de tous les points critiques de  $D_c$ . Ceci est évidemment contradiction avec ce qu'il y a qu'une seule fonction  $\varphi_c(p)$  qui transforme  $D_c$  à tout le plan  $w$  holomorphiquement et biunivoquement, lorsqu'on y impose les deux conditions

$$\varphi_c(O_c) = 0 \quad \text{et} \quad \partial(O_c) / \partial u = 1,$$

où  $O_c$  est le point commun de  $D_c$  et de  $O$ . Donc, l'énoncé a été certainement démontré.

Il en résulte que toute fonction  $a_i(z)$  ( $i=2, \dots, n$ ) est holomorphe dans  $\Gamma$  puisqu'elle est continue dans  $\Gamma$  et holomorphe en dehors d'un ensemble fermé d'un nombre infini dénombrable au plus de points  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

On en conclut que

*La fonction  $\varphi(p)$  attachée au domaine  $D$  de type  $(T)$  est holomorphe sur  $D$  si  $D$  est algébrique.*

**4. Nouvelle projection de  $D$ .** Dans la section actuelle, nous allons montrer qu'un domaine en question donné arbitrairement peut

être représenté par un autre domaine de type  $(T)$  qui n'a aucun point critique intérieur.

Étant donné, de nouveau, un domaine quelconque  $D$  type  $(T)$  étalé au-dessus du dicylindre  $(\Gamma, C)$  dans l'espace de  $z$  et  $u$ . On peut réaliser toujours  $D$ , grâce à *Remmert*,<sup>7)</sup> comme un ensemble analytique  $\Sigma$  à deux dimensions complexes sans point singulier dans tout l'espace de  $n$  nouvelles variables complexes  $x_1, \dots, x_n$  et de la variable  $z$ , où  $n$  est un nombre entier suffisamment grand, de façon que, pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ ,  $D_c$  corresponde biunivoquement à l'ensemble  $\Sigma_c$  de tous les points communs de  $\Sigma$  et de l'hyperplan analytique défini par  $z=c$ . Désignons par  $O^*$  l'ensemble de tous les points de  $\Sigma$  qui correspondent aux points de l'ensemble  $O$  dans  $D$ .

Pour un point quelconque  $p$  de  $\Sigma$ , il y a un polycylindre  $\delta$  autour de  $p$ , dans lequel l'idéal géométrique pour  $\delta \cap \Sigma$  admet exactement  $n-1$  fonctions holomorphes dans  $\delta$  pour sa pseudobase au sens d'*Oka*.<sup>8)</sup> Il existe certainement puisque  $\Sigma$  n'a aucun point singulier. Désignons-les par

$$g_1(x, z), \dots, g_{n-1}(x, z).$$

Regardant  $z$  comme un paramètre complexe, dans les équations linéaires simultanées

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_\mu}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \mu = 1, \dots, n-1,$$

on aura

$$\frac{dx_1}{H_1(x, z)} = \frac{dx_2}{H_2(x, z)} = \dots = \frac{dx_n}{H_n(x, z)}$$

où  $H_\nu(x, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) sont des fonctions holomorphes dans  $\delta$  qui, d'après l'hypothèse, ne s'annulent simultanément en aucun point sur  $\Sigma \cap \delta$ . D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout  $\Sigma$  d'un nombre dénombrable au plus de tels polycylindres. Désignons-les par  $\delta_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ). Soient  $g_\mu^j(x, z)$  et  $H_\nu^j(x, z)$  ( $\mu=1, \dots, n-1$ ,

7). R. Remmert, Dissertation, Münster 1957.

8) loc. cit., p.133, 125.

$\nu=1, \dots, n$ ) les fonctions  $g_\nu(x, z)$  et  $H_\nu(x, z)$  obtenues comme ci-dessus dans  $\delta_j$ , respectivement.

Lorsqu'on prend deux polycylindre  $\delta_i$  et  $\delta_j$  tels que  $\delta_i \cap \delta_j \neq \emptyset$ , on peut trouver, grâce à Oka,<sup>9)</sup> une matrice holomorphe  $(A_{ij})$  non singulière de degré  $n-1$  telle que l'on ait dans  $\delta_i \cap \delta_j$

$$(g^i) = (g^j)(A_{ij}),$$

où  $(g^i) = (g^i_1(x, z), \dots, g^i_{n-1}(x, z))$ , puisque  $\delta_i \cap \delta_j$  est un domaine cylindrique. De plus, par un calcul facile, on aura sur  $\sum \cap \delta_i \cap \delta_j$

$$(H^i) = |A_{ij}| \cdot (H^j),$$

où  $(H^i) = (H^i_1(x, z), \dots, H^i_n(x, z))$ , et  $|A_{ij}|$  est le déterminant de la matrice  $(A_{ij})$ . Donc, il ne s'annule en aucun point dans  $\delta_i \cap \delta_j$ .

Soient  $\delta'_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) les parties de  $D$  qui correspondent à  $\delta_j \cap \sum$  et soient  $a_{ij}(p)$  et  $h^i_\nu(p)$  ( $i, j=1, 2, \dots, \nu=1, \dots, n$ ) les fonctions dans  $\delta'_i \cap \delta'_j$  et celles dans  $\delta'_i$  qui correspondent aux traces de  $|A_{ij}|$  et de  $H^i_\nu(x, z)$  sur  $\sum$  respectivement. Considérons maintenant une paire de la forme  $(a_{ij}(p), \delta'_i \cap \delta'_j)$  pour chaque paire  $(i, j)$  telle que  $\delta'_i \cap \delta'_j \neq \emptyset$ . On voit facilement que c'est une donnée du deuxième problème de Cousin. Grâce à Oka,<sup>10)</sup> on peut le résoudre certainement puisque  $D$  est une variété de Stein et que, d'après l'énoncé dans la section 2, il est homéomorphe à l'hypersphère. C'est-à-dire, on peut trouver une fonction  $a_i(p)$  holomorphe dans chaque  $\delta'_i$  qui ne s'annule en aucun point de  $\delta'_i$ , de manière que les fonctions  $a_{ij}(p)$  puissent être écrites sous la forme

$$a_{ij}(p) = \frac{a_j(p)}{a_i(p)}.$$

Ensuite, soient  $k_\nu(p)$  les fonctions holomorphes dans  $D$  définies dans  $\delta'_i$  par

$$k_\nu(p) = a_i(p)h^i_\nu(p),$$

où  $\nu=1, \dots, n, i=1, 2, \dots$ . Formons, pour chaque  $\nu=1, \dots, n$ , une fonc-

9) loc. cit., p. 125.

10) loc. cit., p. 224.

tion  $K_\nu(x, z)$  holomorphe dans tout l'espace de  $(x)$  et  $z$  telle que l'images de la trace de  $K_\nu(x, z)$  sur  $\Sigma$  soit identique à  $k_\nu(p)$  dans  $D$ . Grâce à Oka,<sup>11)</sup> ceci est toujours possible de la façon habituelle.

Maintenant, introduisant une nouvelle variable complexe  $t$ , considérons un système d'équations différentielles ordinaires simultanées d'ordre un, ayant  $z$  comme un paramètre analytique,

$$(4) \quad \frac{dx_\nu}{dt} = K_\nu(x, z) \quad \nu=1, \dots, n.$$

Grâce au théorème de Cauchy, on aura les énoncés suivants:

*En tout point  $t=t_0$  et pour toute valeur  $z$  dans  $\Gamma$ , on peut toujours trouver des solutions locales  $x_\nu(t, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) des équations différentielles (4) sous des conditions initiales  $x_\nu(t_0, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) quelconques. Lorsqu'on donne des fonctions holomorphes par rapport à  $z$  pour les conditions initiales, les solutions des équations différentielles (4) sont aussi holomorphes par rapport aux  $t$  et  $z$ .*

De plus, conservant les notations précédentes, on peut dire que

*Si, pour une valeur  $z=c$  dans  $\Gamma$ , le point de la forme  $(x_\nu(t_0, c), c)$  se trouve sur  $\Sigma_c$ , l'ensemble analytique donné au moyen des solutions par*

$$x_\nu = x_\nu(t, c) \quad \nu=1, \dots, n$$

*coïncide entièrement avec la partie de  $\Sigma_c$  située dans un voisinage du point.*

En effet, comme on peut voir facilement, d'après le mode de formation des fonctions  $K_\nu(x, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ), on aura les égalités

$$\frac{dx_\nu}{dx_n} = \frac{K_\nu(x, z)}{K_n(x, z)} = \frac{H_\nu(x, z)}{H_n(x, z)} \quad \nu=1, \dots, n-1,$$

en tout point sur  $\Sigma$ . Ceci signifie que l'énoncé est vrai certainement.

Soient, de nouveau,  $f_\nu(t, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) les solutions des équations différentielles (4), obtenues sous les conditions initiales en  $t=0$ , telles

11) loc. cit., p. 230.

que, pour toute valeur  $z$  dans  $\Gamma$ , le point de la forme  $(f_\nu(0, z), z)$  se trouve sur  $O^*$ , et par le prolongement analytique autant que possible dans le dicylindre de la forme  $(\Gamma, C'')$ , où  $C''$  signifie tout le plan de  $t$ . Cette fonctions-ci sont analytiques et uniformes sur le domaine multivalent, que l'on désigne par  $D^*$ , étalé au-dessus de  $(\Gamma, C'')$ , puisque  $O^*$  est l'ensemble analytique sur  $\Sigma$ .

En ce moment, je dit que

*Le domaine  $D^*$  n'a aucun point critique intérieur, et la correspondance entre  $\Sigma$  et  $D^*$  définie au moyen des solutions par*

$$x_\nu = f_\nu(t, z) \quad \nu = 1, \dots, n$$

*est biunivoque.*

Pour le démontrer,  $D_c^*$  étant la sous-variété analytique dans  $D^*$  donnée par  $z=c$ , où  $c \in \Gamma$ , il suffit de voir que toute  $D_c^*$  n'a aucun point critique algébrique et que la correspondance entre  $D_c^*$  et  $\Sigma_c$  donnée par les solutions comme ci-dessus est biunivoque, puisqu'il y a une partie univalente de  $D^*$  au-dessus d'un voisinage convenable de la droite analytique de la forme  $t=0$  dans  $(\Gamma, C'')$ .

D'abord' on peut dire que  $D_c^*$  n'a aucun point critique, puisque, d'après l'hypothèse en tout point de  $D$  qui correspond à un point de  $\Sigma$ , les fonctions

$$\frac{df_\nu(t, c)}{dt} = K_\nu(x, c) \quad \nu = 1, \dots, n$$

sont holomorphes. Supposons ensuite pour le réduire à l'absurde que toutes les fonctions  $f_\nu(t, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) peuvent être prolongées jusqu'au point à l'infini le long d'une courbe linéaire convenable issue de l'origine sur le plan de  $t$ . Posont  $t=1/t'^e$ , où  $e$  est l'ordre de ramification de  $D_c^*$  au point à l'infini, on a

$$\frac{dx_\nu}{dt'} = -\frac{1}{t'^{e+1}} K_\nu(x, c), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Ceci est évidemment en contradiction avec l'hypothèse que les fonctions  $K_\nu(x, z)$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) ne s'annulent simultanément en aucun point sur  $\Sigma_c$ . Enfin, on peut regarder la transformation de  $\Sigma_c$  à  $D_c^*$

comme une fonction holomorphe sur  $\Sigma_c$  puisqu'en tout point  $p$  de  $\Sigma_c$ , il y a au moins une fonction  $K_\nu(x, z)$  entre elles qui ne s'annule pas en  $p$ . De plus,  $\Sigma_c$  est, d'après l'hypothèse, simplement connexe. Ceci signifie que la correspondance entre  $D_c^*$  et  $\Sigma_c$  est biunivoque. Donc l'énoncé a été démontré.

D'après ce que l'on a vu jusqu'ici, on est ainsi arrivé à l'énoncé suivant:

*On peut toujours faire correspondre tout domaine  $D$  de type  $(T)$  holomorphiquement et biunivoquement à un domaine  $D^*$  qui n'a aucun point critique intérieur de façon que, pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ ,  $D_c$  corresponde à  $D_c^*$  respectivement.*

**5. Modification de  $D$ .** Soit  $D$ , de nouveau, un domaine multivalent de type  $(T)$ , sans point critique intérieur, étalé au-dessus du dicylindre  $(\Gamma, C)$ , où  $\Gamma: |z| < \rho$ , et  $C: |u| < \infty$ . Soient  $\varphi(p)$  la fonction attachée au domaine  $D$  et  $\zeta(z, w)$  la fonction inverse de  $\varphi(p)$  continue dans le dicylindre  $(\Gamma, C')$ , où  $C': |w| < \infty$ , au sens de ce qu'on a dit dans la section 2.

Considérons ici, pour un nombre réel positif quelconque  $M$ , un dicylindre fermé  $\mathcal{A}'$  dans  $(\Gamma, C')$  de la forme

$$|z| \leq \rho' \quad \text{et} \quad |w| \leq M,$$

où  $\rho'$  est un nombre réel positif plus petit que  $\rho$  mais d'ailleurs quelconque. Désignons par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des points dans  $D$  qui correspondent à  $\mathcal{A}'$  par la fonction  $\varphi(p)$ . Nous allons former d'abord

*Un domaine algébrique étalé au-dessus de l'espace de  $u$  et  $z$  qui contient un ensemble de points équivalent à  $\mathcal{A}$ . On désignera cet ensemble dans le nouveau domaine par la même notation  $\mathcal{A}$ .*

D'abord, prenons dans  $D$ , un polyèdre analytique fermé  $\mathfrak{B}$ , qui contient  $\mathcal{A}$  entièrement, de la forme

$$\mathfrak{B} : \begin{array}{ll} |u| \leq N & |z| \leq \rho'' \\ |f_j(p)| \leq 1 & j = 1, \dots, m \end{array}$$

où  $\rho''$  est un nombre réel tel que  $\rho' < \rho'' < \rho$ ,  $N$  est un nombre réel

suffisamment grand et  $f_j(p)$  ( $j=1, \dots, m$ ) sont des fonctions holomorphes dans  $D$ . Il existe certainement puisque  $D$  est une variété de Stein. On désignera par  $(C_1, C_2)$  le dicylindre  $|z| \leq \rho'', |u| \leq N$ .

Introduisant  $m$  nouvelles variables complexes  $y_1, \dots, y_m$ , considérons comme d'habitude l'ensemble analytique  $\Sigma$  donné par

$$y_j = f_j(p) \quad p \in \mathfrak{P}, \quad j = 1, \dots, m.$$

dans le polycylindre  $(C)$  de la forme

$$|z| < \rho'', |u| < N \text{ et } |y_j| < 1 \quad j = 1, \dots, m.$$

On peut supposer ici sans restreindre la généralité que les systèmes ordonnés de valeurs  $(f_1, \dots, f_m)$  soient distincts pour toutes paires de points distincts ayant les mêmes coordonnées  $(z, u)$  dans  $\mathfrak{P}$ , en y adjoignant, si nécessaire, certaines autres fonctions holomorphes convenables dans  $D$  comme  $f_j(p)$ . Alors on peut regarder  $m$  fonctions

$$y_j - f_j(z, u) \quad j = 1, \dots, m$$

comme fonctions holomorphes et uniformes dans un voisinage  $V$  de  $\Sigma$  telles que  $\Sigma$  coïncide avec l'ensemble des zéros communs de ces fonctions, pourvu que  $V$  soit suffisamment mince. Décrivons ensuite un polyèdre  $\mathfrak{P}^*$  par rapport aux polynômes tel que  $\Sigma \subset \mathfrak{P}^* \subset V$ . Ceci est certainement possible grâce à *Oka*,<sup>12)</sup> puisque  $\Sigma$  est l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes en  $(C)$ . Désignons par  $\mathfrak{P}_p^*$  l'ensemble de tous les points communs de  $\mathfrak{P}^*$  et de l'hyperplan analytique à  $m$  dimensions complexes de la forme  $z = z', u = u'$  où  $p \in (C_1, C_2)$  et  $p = (z', u')$ . Pour tout point  $p$  dans  $(C_1, C_2)$ , il y a un point au plus de  $\Sigma$  qui se trouve dans chaque composante connexe de  $\mathfrak{P}_p^*$ . Il suit de là, grâce à *Oka*,<sup>13)</sup> que, pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$ , on peut trouver des polynômes  $Q_j(z, u, y)$  ( $j=1, \dots, m$ ) tels que l'on ait

$$|y_j - f_j(z, u) - Q_j(z, u, y)| < \varepsilon \quad j = 1, \dots, m$$

---

12) loc. cit., p. 133, 125.

13) loc. cit., p. 10.

en  $\mathfrak{B}^*$ . Donc, d'après le même raisonnement que *Oka*<sup>14)</sup> a fait dans son cinquième Mémoire, on aura l'ensemble analytique irréductible  $\Sigma^*$  dans tout l'espace, donné par les équations simultanées

$$(5) \quad Q_j(z, u, y) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

et tel que, pour tout point  $p$  dans  $(C_1, C_2)$ , il y ait un et un seul point de  $\Sigma_p^*$  dans chaque composante connexe de  $\mathfrak{B}_p^*$  si et seulement s'il en est ainsi pour  $\Sigma_p$ . On peut supposer ici sans restreindre la généralité qu'on peut résoudre les équations simultanées (5) par rapport aux  $z$  et  $u$  dans tout l'espace, en déformant  $\Sigma^*$  un peu si nécessaire. Envisageons le domaine algébrique donné par la projection de  $\Sigma^*$  sur l'espace de  $z$  et  $u$ . Comme on peut voir facilement, il est certainement un domaine voulu.

Considérons ensuite la partie connexe  $D'$  de ce domaine algébrique, contenant  $\Delta$  et située au-dessus du dicylindre  $(\Gamma', C)$ , où  $\Gamma'$ :  $|z| < \rho'$ .

Soit  $\sigma$  la projection de la surface critique de  $D'$  sur  $(\Gamma', C)$ . Elle est une surface analytique dans  $(\Gamma', C)$ . En ce moment, on peut supposer, aussi sans restreindre la généralité, qu'elle ne contient aucune composante irréductible de la forme  $z=c$ , en déformant  $\Sigma^*$  un peu si nécessaire. On peut alors représenter  $\sigma$  par la forme

$$u = r(z),$$

où  $r(z)$  est une fonction algébrique multiforme sur  $\Gamma'$ . Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de points dans  $\Gamma'$  en lesquels  $r(z)$  a un point critique ou un pôle. Il en est de même pour les points qui sont des projections des points singuliers de  $\sigma$  sur  $\Gamma'$ . Désignons tous ces points par  $z_j$  ( $j=1, \dots, l$ ) et par  $\mathfrak{A}$  le domaine obtenu de  $\Gamma'$  par l'exception de tous les points  $z_j$ .

Ensuite, considérons une transformation conforme au sens de *Riemann* de  $\mathfrak{A}$  au cercle unité  $\Gamma_0$  sur le plan d'une variable complexe  $t$ . Désignons par

---

14) loc. cit., p. 44.

$$z = \lambda(t)$$

la fonction qui définit cette transformation. Au moyen de la transformation, on peut former à partir de  $D'$  un nouveau domaine multivalent,  $D^0$  au-dessus du dicylindre de la forme  $(\Gamma_0, C)$  de la façon habituelle.

Pour tout point  $t'$  dans  $\Gamma_0$ , prenons un voisinage  $\delta$  de  $t'$  dans  $\Gamma_0$  et celui  $\delta'$  de  $z' = \lambda(t')$  dans  $\mathfrak{R}'$ , qui se correspondent biunivoquement par  $z = \lambda(t)$ . Ceci est possible puisque la transformation est localement homéomorphe. Alors, la partie de  $D^0$  étalée au-dessus de  $(\delta, C)$  est, par définition, l'image inverse par la transformation de la partie de  $D'$  étalée au-dessus de  $(\delta', C)$ .

Le domaine  $D^0$  est algébroïde et la projection de la surface critique de  $D^0$  dans  $(\Gamma_0, C)$  est représentée évidemment par la forme

$$u = r^0(t) = r(\lambda(t)).$$

En ce moment, elle se sépare en un nombre fini de fonctions holomorphes et uniformes dans  $\Gamma_0$ , puisqu'elle n'a aucun point critique. Désignons-les par

$$r_j(t) \quad j = 1, \dots, l.$$

Désignons de plus par  $\mathcal{A}_0$  l'ensemble de points dans  $D^0$  qui correspond à  $\mathcal{A}$  par  $z = \lambda(t)$ .

Maintenant, on prépare un lemme suivant.

Soit, à nouveau,  $D$  un domaine multivalent sur l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$ . Décrivons un dicylindre fermé  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  de la forme  $|x| < r_1, |y| < r_2$ , et considérons une partie connexe  $D'$  de  $D$  situé au-dessus de  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Supposons que  $D'$  se trouve dans l'intérieur complet de  $D$ . Alors  $D'$  consiste en un nombre fini au plus de feuillets et n'a pas de point frontière autre que ceux situés au-dessus du contour de  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Soit  $\sigma$  la projection de la surface critique de  $D'$ . Elle est une surface analytique dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Donc, on voit facilement que, pour tout point  $a$  dans  $\mathcal{A}_1$ , excepté un nombre fini de points et un nombre fini de courbes linéaires, il y a un

voisinage  $\delta$  de  $a$  tel que la partie de  $\sigma$  située dans  $(\delta, \Delta_2)$  puisse être représentée par la forme

$$y = r_j(x) \quad j = 1, \dots, n,$$

où  $r_j(x)$  sont des fonctions holomorphes et uniformes telles que, pour toute paire  $(i, j)$ ,  $i \neq j$ , on ait  $r_i(a) \neq r_j(a)$ .

En ce moment, on aura le

**Lemme 5.** *En diminuant, si nécessaire, le voisinage  $\delta$  suffisamment, on peut faire correspondre homéomorphiquement la partie de  $D'$  située au-dessus de  $(\delta, \Delta_2)$  à un domaine produit de la forme  $(\delta, D'_a)$ , que l'on désigne par  $\tilde{D}$ , de façon que, pour tout point  $a'$  dans  $\delta$ ,  $D'_a$  corresponde à  $\tilde{D}_{a'}$ , où  $D'_a$  et  $\tilde{D}_{a'}$  signifient les sous-variétés de  $D'$  et de  $\tilde{D}$  données par  $x = a'$  respectivement.*

En effet, décrivons des cercles  $\delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) dans  $\Delta_2$  de la forme

$$\delta_j : |y - r_j(a)| < r_j$$

tels que, pour toute paire  $(i, j)$ ,  $i \neq j$ , il n'y ait aucun point commun de  $\delta_i$  et de  $\delta_j$ , et décrivons un autre cercle  $\delta_0$  dans  $\Delta_1$  de la forme

$$|x - a| < r_0$$

tel que, pour tout  $j$ , on ait

$$|r_j(x) - r_j(a)| < r_j/2$$

dans  $\delta_0$ . Alors, la partie connexe de  $D'$  située au-dessus du dicylindre  $(\delta_0, \delta_j)$  est identique à la partie située au-dessus de  $(\delta_0, \delta_j)$  dans la surface de Riemann de la fonction

$$(y - r_j(x))^{1/e},$$

où  $e$  est un nombre entier positif, qui peut être un. Prenons ce cercle  $\delta_0$  pour un voisinage  $\delta$  de  $a$  et considérons une fonction définie par

$$y = \begin{cases} y' & \text{dans } \Delta_2 - \cup \delta_j \\ y' + \left(1 - \frac{y' - r_j(a)}{r_j}\right) (r_j(x) - r_j(a)) & \text{dans } \delta_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Alors, comme on peut voir facilement, elle définit une transformation de la partie de  $D'$  située au-dessus de  $(\delta, A_2)$  à un domaine produit de la forme  $(\delta, D'_a)$ , qui satisfait aux conditions demandées. Le lemme 5 a été donc démontré certainement.

Revenons au domaine en question  $D^0$ . Considérons un cercle  $\Gamma^*$  de la forme  $|t| < \rho^*$  où  $\rho^*$  est un nombre réel positif plus petit que l'unité mais d'ailleurs quelconque. Soit  $D^*$  la partie de  $D^0$  situé audessus du dicylindre  $(\Gamma^*, C)$  et dénotons  $\Delta^* = D^* \cap A_0$ .

*Nous allons former à partir de  $D^*$  un nouveau domaine multivalent, de type  $(T)$  et algébrique, qui s'étale au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$  et qui contient un ensemble de points équivalent à  $\Delta^*$ . Cet ensemble sera désigné encore par la même notation  $\Delta^*$ .*

C'est le but principal de la section actuelle.

D'abord pour diminuer la difficulté qui aura lieu à cause de la forme de  $D^*$  dans le raisonnement plus tard, faisons correspondre le domaine en question  $D^*$  homéomorphiquement à un domaine produit  $(\Gamma^*, D_0^*)$ , que nous désignons par  $\tilde{D}$  pour simplifier l'écriture, de façon que  $D_c^*$  corresponde à  $\tilde{D}_c$ , où  $D_c^*$  et  $\tilde{D}_c$  sont des sous-variétés de  $D^*$  et  $\tilde{D}$  donnés par  $t=c$ , et  $D_0^*$  est celle donnée par  $t=0$ . Ceci est possible. Car, on peut la faire localement en tout point de  $\Gamma^*$  d'après le lemme 5 et passer du local au global en vertu de ce que  $\Gamma^*$  est un cercle, comme on le sait bien. Soit  $\emptyset$  cette correspondance, que nous fixerons dans le reste de cette section. Désignons par  $\tilde{\Delta}$  l'ensemble de points dans  $\tilde{D}$  qui correspond à  $\Delta^*$  par la transformation  $\emptyset$ .

Prenons un point  $u_0$  sur le plan  $u$  excepté les points  $r_j(0)$  ( $j=1, \dots, n$ ), et décrivons, pour chaque  $j$ , une demi-droite linéaire  $l_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) issue du point  $r_j(0)$  représentée par un paramètre réel  $s$  sous la forme

$$u = s \cdot (r_j(0) - u_0) + u_0 \quad s \geq 1.$$

On peut supposer sans restreindre la généralité que toute paire  $(j, k)$ ,  $j \neq k$ , il n'y a aucun point commun de  $l_j$  et  $l_k$ , en changeant  $u_0$  un peu si nécessaire. Désignons ensuite par  $L_j$  l'ensemble de la forme

$(t, u)$ , où  $t \in \Gamma^*$  et  $u \in L_j$ , et coupons le long de  $L_j$  tous les feuillets du domaine  $\tilde{D}$ , qui n'a des surfaces critiques qu'au-dessus de la droite analytique  $u = \gamma_j(0)$ . Alors  $\tilde{D}$  se sépare en  $m$  feuillets univalents et simplement connexes que l'on désigne par  $S_i$  ( $i=1, \dots, m$ ). Dénotons  $L_{ji}$  ( $j=1, \dots, n, i=1, \dots, m$ ) les coupures de  $S_i$  le long de  $L_j$ . En ce moment, on regarde deux bords de la coupure de  $L_{ji}$  comme ensembles distincts dans  $S_i$ . On désignera par  $L'_{ji}$  et  $L''_{ji}$  les bords à droite et à gauche de  $L_{ji}$ , en faisant face à la même direction que  $s$  s'augmente. Soit  $\tilde{A}_i$  la partie de  $\tilde{A}$  située dans chaque  $S_i$ . Cette partie  $\tilde{A}_i$  consiste en plusieurs composantes connexes  $a_{i\nu}$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ). Elles seront appelées, en peu de mots, *composantes de  $\tilde{A}_i$*  ou *celles de  $\tilde{A}$* . La frontière d'une composante  $a_{i\nu}$  de  $\tilde{A}_i$  consiste en quelques parties de la frontière de  $\tilde{A}$  et quelques parties des bords  $L'_{ji}$  et  $L''_{ji}$ . Si une composante  $a_{i\nu}$  de  $\tilde{A}_i$  a, par exemple, une partie de  $L'_{j\nu}$  dans sa frontière, on dira, en peu de mots, que  $a_{i\nu}$  a sa coupure sur  $L'_{ji}$ .

Maintenant, pour chaque  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ), nous allons classifier toutes les composantes  $a_{i\nu}$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) de  $\tilde{A}_i$  de la manière suivante.

Deux composantes  $a_{i\nu}$  et  $a_{i\mu}$  de  $\tilde{A}_i$  appartiennent à une même classe si et seulement si, lorsqu'on prend deux points  $p$  et  $q$  dans  $a_{i\nu}$  et  $a_{i\mu}$  respectivement et qu'on trace une courbe linéaire  $l$  d'extrémités  $p$  et  $q$  sur  $S_i$ , on peut décrire en outre une courbe linéaire d'extrémités aussi  $p$  et  $q$  contenue dans  $\tilde{A}$  qui peut être déformée à  $l$  continûment dans  $\tilde{D}$  sans passer par aucun point critique et sans changer les extrémités  $p$  et  $q$ . La définition de ce classement ne dépend pas du choix des points  $p$  et  $q$ , et de la courbe linéaire  $l$ , puisque la composante considérée est connexe et que  $S_i$  est simplement connexe. D'ailleurs, il est aisé de voir que cette relation de classement est une relation d'équivalence. Donc les classes sont certainement bien définies.

Maintenant, on aura l'énoncé qu'

*Il n'y a qu'un nombre fini de classes différentes dans chaque feuillet  $S_i$  ( $i=1, \dots, m$ ).*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a une infinité de classes différentes. Prenons alors une infinité de points

$q_\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) qui se trouvent dans des composantes de  $\mathcal{A}_i$  appartenant à des classes différentes. On peut supposer ici la suite de points  $q_\nu$  tend vers un point  $q_0$  dans  $\mathcal{A}_i$  puisque  $\mathcal{A}_i$  est compact. A chaque  $q_\nu$  ( $\nu=0, 1, 2, \dots$ ), correspond un et un seul point  $Q_\nu$  de  $\mathcal{A}'$  par la composée  $\Psi$  de trois transformations

$$u = \zeta(z, w), \quad t = \lambda(z) \quad \text{et} \quad \emptyset.$$

Décrivons ensuite une hypersphère  $r$  autour de  $q_0$  dans la partie univalente sur  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Ceci est possible puisque  $q_0 \in \tilde{\mathcal{A}}$  et que  $\tilde{\mathcal{A}}$  ne contient aucun point critique de  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Décrivons de plus une autre hypersphère  $r'$  autour de  $Q_0$  dans  $(r, C)$  telle que l'image de  $r'$  par  $\Psi$  se trouve dans  $r$ . Ceci est aussi possible puisque  $\Psi$  est homéomorphe localement. Alors toute paire de points  $Q_\nu$  et  $Q_\mu$  situés dans  $r'$  peuvent être joignés par un segment linéaire  $l'$  dans  $r' \cap \mathcal{A}'$ . L'image du segment linéaire  $l'$  par  $\Psi$  est ainsi une courbe linéaire  $l$  d'extrémités  $q_\nu$  et  $q_\mu$  dans  $r \cap \tilde{\mathcal{A}}$ . Ceci est évidemment en contradiction avec l'hypothèse puisque la courbe linéaire  $l$  peut être déformée continûment au segment linéaire d'extrémités  $q_\nu$  et  $q_\mu$  dans  $r$ . L'énoncé a été donc démontré.

Soit  $e_i$  le nombre des classes de composantes dans  $S_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), qui peut être nul. Désignons les classes par  $A_{i\lambda}$  ( $i=1, \dots, m, \lambda=1, \dots, e_i$ ). On prépare, pour chaque  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ),  $e_i$  exemplaires de  $S_i$ , que l'on désigne par  $S_{i\lambda}$  et on décrit sur chaque  $S_{i\lambda}$  toutes les composantes de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  qui appartiennent à la seule classe  $A_{i\lambda}$ . Tout d'abord, toutes les fois que, sur les deux bords d'une coupure de  $S_{i\lambda}$ , la composante de  $A_{i\lambda}$  n'a pas sa coupure, on réunit les deux bords de cette coupure sans y rien changer. Dénotons  $L'_{ji\lambda}$  et  $L''_{ji\lambda}$  les brods à droite et à gauche des coupures restantes de  $S_{i\lambda}$ , correspondant à  $L'_{ji}$  et à  $L''_{ji}$  respectivement.

Maintenant,

*Nous allons mettre en contiguïté tous les exemplaires  $S_{i\lambda}$  ( $i=1, \dots, m, \lambda=1, \dots, e_i$ ) deux à deux le long d'une certaine coupure, afin d'obtenir un domaine, de type  $(T)$  et algébrique, qui contient*

l'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}}$  à son intérieur.

Prenons l'une des exemplaires  $S_{i\lambda}$  et considérons un bord d'une coupure de  $S_{i\lambda}$ , par exemple  $L'_{ji\lambda}$ . Alors on peut d'abord déterminer uniquement un autre exemplaire  $S_{h\mu}$  qui doit être mis en contiguïté à  $S_{i\lambda}$  le long de  $L'_{ji\lambda}$ , pourvu qu'il y ait au moins une composante de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$ , décrite sur  $S_{i\lambda}$  et ayant sa coupure sur  $L'_{ji\lambda}$ .

En effet, pour un feuillet  $S_i$  de  $\tilde{\mathcal{D}}$  et pour un bord d'une coupure, par exemple,  $L'_{ji}$ , il y a un et un seul feuillet  $S_h$  de  $\tilde{\mathcal{D}}$  qui était au début en contiguïté à  $S_i$  en ce bord. Donc pour toute composante  $a$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  qui a sa coupure sur le bord, la composante de  $\tilde{\mathcal{A}}$  qui était en contiguïté à la composante  $a$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  en ce bord se trouve toujours sur  $S_h$ . Soient  $a$  et  $a'$ , s'il existe, deux composantes de  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  décrites sur  $S_{i\lambda}$ , telles qu'elles aient leurs coupures sur  $L'_{ji\lambda}$  à la fois. Alors, pour démontrer l'énoncé, il suffit de voir que deux composantes  $b$  et  $b'$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_h$  qui étaient en contiguïté respectivement à  $a$  et à  $a'$  le long de  $L'_{ji\lambda}$ , appartiennent à une même classe  $A_{h\mu}$  sur  $S_h$ . Prenons quatre points  $p, p'$  et  $q, q'$  qui se trouvent près de  $L'_{ji\lambda}$  et de  $L''_{j\mu}$  dans  $a, a'$  et  $b, b'$  respectivement de manière qu'on puisse joindre  $p$  à  $q$ , et  $p'$  à  $q'$  par deux segments linéaires  $l$  et  $l'$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  respectivement. Ceci est toujours possible. D'autre part, d'après l'hypothèse, on peut tracer une courbe  $l_0$  d'extrémités  $p$  et  $p'$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  qui peut être déformée continûment dans  $\tilde{\mathcal{D}}$  à une autre courbe, ayant les mêmes extrémités mais décrite sur  $S_{i\lambda}$ , sans passer par aucun point critique de  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Soit  $l'_0$  la courbe d'extrémités  $q$  et  $q'$  donnée par la somme de trois courbes  $l, l'$  et  $l_0$ . Elle se trouve certainement dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . De plus, il est évident qu'on peut la déformer continûment dans  $\tilde{\mathcal{D}}$  à une autre courbe ayant les mêmes extrémités et décrite sur  $S_h$ , sans passer par aucun point critique de  $\tilde{\mathcal{D}}$ , puisque  $S_{i\lambda}$  et  $L'_{ji\lambda}$  sont simplement connexes. L'énoncé a été donc démontré.

Réunissons tous les exemplaires  $S_{i\lambda}$  ( $i=1, \dots, m, \lambda=1, \dots, e_i$ ) en identifiant les bords  $L'_{ji\lambda}$  et  $L''_{j\mu}$  chaque fois que  $S_{i\lambda}$  doit être mis en contiguïté à  $S_{h\mu}$  le long de ces bords comme ci-dessus. Alors, on a

une variété connexe ayant quelques coupures et consistant en  $N$  feuilletts, où  $N = \sum e_i$ , puisque  $\tilde{\mathcal{A}}$  est connexe. Désignons-la par  $V$ .

On peut dire ici que *cette variété  $V$  contient certainement un ensemble de points équivalent à  $\tilde{\mathcal{A}}$ .*

Car, envisageons l'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}}$  seul dans le procédé qu'on a fait jusqu'ici. Il a été coupé une fois et réuni sans y rien changer. C'est tout quant à cet ensemble. Donc  $V$  évidemment contient un ensemble de points équivalent à  $\tilde{\mathcal{A}}$ . On le désignera par la même notation  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

De plus, on peut dire que

*Il y a exactement  $N-1$  demi-hyperplans le long de chacun desquels deux exemplaires différents sont contigus.*

En effet, il y a évidemment au moins  $N-1$  tels demi-hyperplans puisque  $V$  est connexe. Donc, si l'on suppose, pour le réduire à l'absurde, que ce n'est pas vrai, il y a une suite d'exemplaires, que l'on désigne, à nouveau, par  $S_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) tels que  $S_j, S_{j+1}$  ( $j=1, \dots, \nu-1$ ) et  $S_\nu, S_1$  sont contigus en demi-hyperplans, que l'on désigne aussi à nouveau par  $L_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) respectivement. Prenons, sur chaque  $S_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ), deux composantes de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , que l'on désigne par  $a_j$  et  $b_j$ , telles que  $a_j, b_{j+1}$  ( $j=1, \dots, \nu-1$ ) et  $b_\nu, a_1$  sont contigus en  $L_j$  ( $j=1, \dots, \nu-1$ ) et  $L_\nu$ . D'après l'hypothèse, ils existent certainement. Prenons ensuite des points  $p_j$  et  $q_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) tels que  $p_j \in a_j, q_j \in b_j$  et que  $p_j, q_{j+1}$  et  $p_\nu, q_1$  peuvent être joignés par des segments linéaires  $l_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) passant par un point de  $L_j$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Ceci est aussi toujours possible. En ce moment, on peut tracer, pour chaque  $j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ), une courbe linéaire  $l'_j$  d'extrémités  $p_j$  et  $q_j$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ , telle qu'on puisse la déformer continûment à une autre courbe ayant les mêmes extrémités mais située sur  $S_j$  puisque  $a_j$  et  $b_j$  appartiennent à la même classe de composantes de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Soit  $l_0$  une courbe linéaire fermée dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  consistant en tous les segments linéaires  $l_j$  et en toutes les courbes linéaires  $l'_j$ . Considérons ici le nombre d'intersection de  $l_0$  et  $L_1$ . Ceci est défini comme d'habitude et nul

puisque  $\tilde{\mathcal{A}}$  est simplement connexe et qu'il n'y a aucun point d'extrémité de  $L_1$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . D'autre part, il est 1 puisque celui de  $l_1$  est 1 et ceux de  $l_j$  ( $j=2, \dots, \nu$ ) et de  $l'_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) sont nuls. Donc on arrive à l'absurde et l'énoncé a été donc démontré.

Il s'agit maintenant d'un bord restant des coupures de  $V$ .

Soit, par exemple,  $L''_{ji\lambda}$  un tel bord. Alors  $L'_{ji\lambda}$  ne reste pas. Car, sinon, il doit avoir été réuni au commencement par l'identification avec  $L''_{ji\lambda}$ . Soit  $S_{h\mu}$  l'exemplaire qui est contigu à  $S_{i\lambda}$  en  $L'_{ji\lambda}$ . En ce moment, il faut distinguer deux cas, suivant que le bord  $L''_{j'h\mu}$  est restant ou non. Dans le premier cas, nous mettons en contiguïté encore une fois  $S_{i\lambda}$  et  $S_{h\mu}$  en identifiant  $L''_{ji\lambda}$  et  $L'_{j'h\mu}$ . Alors on a une surface critique d'ordre un à l'extrémité de  $L''_{ji\lambda}$ . Dans le deuxième cas, il y a en outre un exemplaire  $S_{k\nu}$  qui est contigu à  $S_{h\mu}$  en  $L''_{j'h\mu}$ . Décrivons, sur la droite analytique  $t=0$ , une circonférence  $\mathbb{C}$  de la forme  $|u - \gamma_j(0)| = \varepsilon$  telle qu'il n'y ait pas d'autre  $\gamma_i(0)$  dans le cercle et tournons sur  $V$  le long de  $\mathbb{C}$  partant d'un point quelconque qui se trouve sur  $S_{i\lambda}$  et au-dessus de  $\mathbb{C}$ , dans le sens positif. Alors, en général, on arrivera à un bord restant à droite d'une coupure de  $V$ , après avoir traversé les bords déjà réunis au-dessus de  $L_j$  en nombre fini de fois. Soit  $L'_{j\tau}$  le tel bord. Nous mettons alors en contiguïté  $S_{i\lambda}$  et  $S_{\tau}$  en identifiant  $L''_{ji\lambda}$  et  $L'_{j\tau}$ . Alors on a une surface critique d'ordre élevé à l'extrémité de  $L'_{j\tau}$ . Cela fait, on obtient finalement un domaine multivalent  $\tilde{V}$  du type produit  $(\Gamma^*, \tilde{V}_0)$  étalé au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$ , où  $\tilde{V}_0$  est la sous-variété de  $\tilde{V}$  donnée par  $t=0$ .

Nous allons voir que

$\tilde{V}_0$  est simplement connexe.

En effet,  $\tilde{V}$  consiste en  $N$  feuillets et, à chaque paire de feuillets de  $\tilde{V}$  qui sont contigus, il correspond une et une seule surface critique de  $\tilde{V}$ . De plus, si exactement  $e$  paires différentes de tels feuillets de  $\tilde{V}$  correspondent à la même surface critique de  $\tilde{V}$ , elle est exactement d'ordre  $e$ . Donc la somme totale des ordres de ramification de  $\tilde{V}_0$  est exactement  $N-1$ . Ceci signifie, d'après le théorème de *Hurwitz*,

que  $\tilde{V}_0$  est simplement connexe.

Maintenant, faisons ce que nous avons fait jusqu'ici pour les  $S_i$  tout parallèlement pour les morceaux  $S_i^*$  ( $i=1, \dots, n$ ) dans  $D^*$  qui correspondent aux  $S_i$  par la transformation  $\theta$ : on prépare  $e_i$  exemplaires de  $S_i^*$  que l'on désigne par  $S_{i\lambda}^*$  ( $i=1, \dots, m, \lambda=1, \dots, e_i$ ) et on les met en contiguïté le long des bords des coupures des  $S_{i\lambda}^*$ , de la même manière qu'on a fait pour ceux de  $S_{i\lambda}$ . Alors on a un domaine multivalent que l'on désigne par  $V^*$  étalé au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$  et ayant  $N$  feuillets. Évidemment  $V^*$  est homéomorphe à  $V$  de manière que  $S_{i\lambda}^*$  corresponde à  $S_{i\lambda}$  par la restriction de  $\theta$  à  $S_i^*$ . En ce moment, pour tout  $c$  dans  $\Gamma^*$ ,  $V_c^*$  correspond à  $V_c$ , où  $V_c^*$  et  $V_c$  sont des sous-variétés de  $V^*$  et de  $V$ , données par  $t=c$ .

Maintenant, je dit que

*$V^*$  est un domaine demandé certainement.*

En effet, 1)  $V^*$  est une variété analytique puisqu'on peut prendre  $t$  et  $u$  ou  $t$  et  $v = (u - r_j(t))^{1/e}$  ( $j=1, \dots, n$ ) pour ses coordonnées locales en tout point de  $V^*$ , où  $e$  est un nombre entier positif convenable. De plus, il est une variété de Stein. Car la méthode qui a été établie par Oka<sup>15)</sup> dans son neuvième Mémoire est certainement applicable à ce domaine après une légère modification.

2) Pour tout  $c$  dans  $\Gamma$ ,  $V_c^*$  est simplement connexe puisqu'il est homéomorphe à  $V_0$ . De plus, il est du type parabolique puisqu'il est algébrique comme une surface de Riemann sur le plan  $u$ .

3) Pour tout  $c$  dans  $\Gamma^*$ ,  $V_c^*$  est régulière en tout de ses points, comme on peut le voir facilement de la forme des coordonnées locales.

4) Il y a une partie univalente dans  $\Delta^*$  au-dessus d'un voisinage convenable la droite analytique  $u=0$  dans  $(\Gamma^*, C)$ . Donc, il en est de même dans  $V^*$ .

D'après ce qu'on a dit jusqu'ici, on peut formuler la conclusion suivante.

---

15) loc. cit., p. 158, De plus, voir, par exemple, T. Nishino, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets, J. Math. Kyoto Univ. vol. 1, No. 2 (1962).

Étant donné un domaine  $D$  multivalent de type  $(T)$  étalé au-dessus d'un dicylindre  $(\Gamma, C)$ , où  $\Gamma: |z| < \rho$ ,  $C: |u| < \infty$ , et tel qu'il n'y ait aucun point critique intérieur. Soit  $\varphi(p)$  la fonction attachée à  $D$ . Prenons un nombre réel positif  $M$  et un autre  $\rho'$  plus petit que  $\rho$  mais d'ailleurs quelconque, et considérons la partie  $\Delta$  de  $D$  donnée par  $|\varphi| \leq M$  et  $|z| \leq \rho'$ . Alors, lorsqu'on fait correspondre conformément au sens de Riemann le domaine obtenu de  $\Gamma'$  par l'exception d'un ensemble fini de points déterminé par  $\Delta$ , où  $\Gamma': |z| < \rho$ , au cercle unité sur le plan  $t$  et qu'on forme l'image inverse  $\Delta^*$  de  $\Delta$  par la transformation, on peut, pour tout nombre réel positif  $\rho^*$  plus petit que l'unité mais d'ailleurs quelconque, former un domaine multivalent  $V^*$ , de type  $(T)$  et algébrique, étalé au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$ , où  $\Gamma^*: |t| < \rho^*$ , et contenant la partie de  $\Delta^*$  située au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$ .

Donc, d'après l'énoncé dans la section 3, on peut dire que la fonction  $\varphi^*$  attachée à ce domaine  $V^*$  est bien définie et holomorphe dans  $V^*$ .

**6. Cas général.** Il s'agit maintenant du cas général de domaine multivalent  $D$  de type  $(T)$ . Pour cela, nous commençons par préparer le lemme suivant:

**Lemme 6.** *Considérons, sur le plan d'une variable complexe  $z$ , un cercle fermé  $\mathfrak{C}$  de la forme  $|z| \leq r$ , où  $r$  est un nombre réel positif quelconque, et une fonction  $f(z)$  continue dans  $\mathfrak{C}$ . Supposons ici que la fonction  $f(z)$  satisfait à la condition suivante.*

*Pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$ , lorsqu'on fait correspondre conformément au sens de Riemann le domaine  $\mathfrak{C}'$  obtenu à partir de  $\mathfrak{C}$  par l'exception d'un ensemble fini de points, qui dépend du choix de  $\varepsilon$ , au cercle unité sur le plan d'une variable complexe  $t$  par la fonction holomorphe  $z = \lambda(t)$ , et lorsqu'on prend un nombre réel positif  $\eta$  plus petit que l'unité mais d'ailleurs quelconque, on peut trouver une fonction  $g(t)$  holomorphe dans le cercle  $|t| < \eta$  telle que l'on y ait*

$$|g(t) - f(\lambda(t))| < \varepsilon.$$

Alors la fonction  $f(z)$  est holomorphe dans l'intérieur de  $\mathfrak{C}$ .

En effet, il est évident que, si une fonction  $f(z)$  satisfait à la condition ci-dessus, il en est toujours de même pour les fonctions des formes  $c \cdot f(z)$ ,  $(f(z))^2$  et  $f(z) + z$ , où  $c$  est un nombre complexe quelconque.

Soit  $u(z)$  la partie réelle d'une fonction  $f(z)$  qui satisfait à la condition ci-dessus. Alors on peut d'abord dire que  $u(z)$  est harmonique dans l'intérieur de  $\mathfrak{C}$ . Supposons, pour le réduire à l'absurd, que ce n'est pas vrai. Formons une fonction  $H(z)$ , harmonique dans l'intérieur de  $\mathfrak{C}$  et continue sur  $\mathfrak{C}$ , telle que l'on ait

$$H(z) - u(z) = 0$$

sur la circonférence de  $\mathfrak{C}$ . Il est, au moyen de l'intégrale de *Poisson*, toujours possible. D'après l'hypothèse, il y a un point dans  $\mathfrak{C}$  en lequel on a l'inégalité

$$|H(z) - u(z)| > \alpha,$$

où  $\alpha$  est un nombre réel positif suffisamment petit. Posons  $\alpha = 4\varepsilon$  et considérons la configuration donnée dans la condition du lemme 6 avec les mêmes notations pour ce nombre positif  $\varepsilon$ . En ce moment, on peut supposer sans restreindre la généralité

$$|H(\lambda(0)) - u(\lambda(0))| > \alpha,$$

puisqu'il y a au moins un point  $z'$  dans  $\mathfrak{C}$  en lequel on a  $|H(z') - u(z')| > \alpha$ , en dehors des points exceptionnels et qu'on peut le faire correspondre à l'origine. Alors, d'après le théorème de *Lebesgue*, on peut dire qu'il y a un nombre réel positif  $\rho_0$  plus petit que l'unité tel que l'inégalité

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [H(\lambda(\rho_0 e^{i\theta})) - u(\lambda(\rho_0 e^{i\theta}))] d\theta \right| < \varepsilon$$

soit valable. Car, d'après le théorème de *Riesz* et celui de *Fatou*, pour toute valeur  $\theta$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ , en dehors d'un ensemble de mesure

nulle,  $\lambda(re^{i\theta})$  tend vers un point sur la circonférence de  $\mathfrak{C}$  lorsqu'on varie  $r$  de 0 à 1. Donc, pour telle valeur  $\theta$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow 1} [H(\lambda(re^{i\theta})) - u(\lambda(re^{i\theta}))] = 0.$$

Soit ensuite  $g(t)$  une fonction holomorphe dans le cercle  $\mathfrak{C}^0$  de la forme  $|t| < \rho'$ , où  $\rho_0 < \rho' < 1$ , telle qu'on ait dans  $\mathfrak{C}^0$

$$|f(\lambda(t)) - g(t)| < \varepsilon.$$

Désignons par  $U(t)$  la partie réelle de  $g(t)$ . Alors, on a aussi

$$|u(\lambda(t)) - U(t)| < \varepsilon$$

dans  $\mathfrak{C}^0$ . Ceci est impossible puisque

$$\begin{aligned} |H(\lambda(0)) - U(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} H(\lambda(\rho_0 e^{i\theta})) - U(\rho_0 e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(\lambda(\rho_0 e^{i\theta})) - u(\lambda(\rho_0 e^{i\theta}))| d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\lambda(\rho_0 e^{i\theta})) - U(\rho_0 e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |H(\lambda(0)) - U(0)| &\geq |H(\lambda(0)) - u(\lambda(0))| - |u(\lambda(0)) - U(0)| \\ &\geq 4 \cdot \varepsilon - \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la partie réelle de  $f(z)$  est certainement harmonique dans  $\mathfrak{C}$ . Il en est de même pour la partie imaginaire de  $f(z)$ .

Maintenant, il nous reste à voir que les parties réelle et imaginaire de  $f(z)$  sont conjuguées deux à deux. Écrivons

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

et considérons la nouvelle fonction

$$(f(z))^2 = (u)^2 - (v)^2 + i \cdot 2 \cdot u \cdot v.$$

Alors  $(u)^2 - (v)^2$  et  $u \cdot v$  sont aussi harmoniques dans l'intérieur de  $\mathfrak{C}$ . Il s'en suit, par un calcul facile, que

$$u_x + i \cdot v_x = \pm i(u_y + i \cdot v_y).$$

D'autre part, considérant la fonction

$$f(z) + z = u + x + i(v + y)$$

et faisant pour elle le raisonnement ci-dessus, on a

$$u_x + 1 + i \cdot v_x = \pm i \cdot (u_y + i \cdot (v_y + 1)).$$

D'où on aura immédiatement

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x.$$

Le lemme a été donc démontré certainement.

Nous allons ici donner un corollaire au lemme 1 dans la section 2.

Considérons dans un dicylindre  $(\Gamma, C)$ , où  $\Gamma: |t| < \rho$ ,  $C: |x| < \infty$ , une fonction  $f(t, x)$  qui est continue par rapport à  $t$  et  $x$  et holomorphe par rapport à  $x$  pour tout  $t$  fixé dans  $\Gamma$ , et qui satisfait aux conditions

$$f(t, 0) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \partial f(t, 0) / \partial x \equiv 1.$$

Il y a alors un voisinage  $\delta$  de la droite analytique  $x=0$  dans  $(\Gamma, C)$  dans lequel, pour tout  $t$  fixé dans  $\Gamma$ ,  $f(t, x)$  est univalent. Donc, regardant  $t$  comme paramètre, on peut trouver la fonction inverse de  $f(t, x)$  que l'on désigne par  $\xi(t, y)$ . Évidemment elle est continue par rapport à  $t$  et  $y$  dans un voisinage convenable de la droite analytique  $y=0$  dans le dicylindre  $(\Gamma, C')$ , où  $C': |y| < \infty$ , et holomorphe par rapport à  $y$  au voisinage de l'origine pour tout  $t$  fixé dans  $\Gamma$ .

Considérons en outre une autre fonction  $g(t, x)$  dans  $(\Gamma, C)$  satisfaisant aux mêmes conditions que  $f(t, x)$ , et formons une nouvelle fonction donnée par

$$F(t, x) = \xi(t, g(t, x)).$$

Elle est bien définie au moins dans un voisinage suffisamment mince de la droite analytique  $x=0$  dans  $(\Gamma, C)$  et remplit les conditions

$$F(t, 0) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \partial F(t, 0) / \partial x \equiv 1.$$

Donc, considérant un cercle  $\Delta_1$  de la forme  $|t| \leq \rho'$ , où  $\rho' < \rho$ , on a le

plus grand nombre  $M_f$  tel que, pour tout  $t$  dans  $\Delta_1$ ,  $F(t, x)$  soit holomorphe et univalente dans le cercle de la forme  $|x| < M_f$ .

Sous la configuration ci-dessus, on aura le

**Corollaire au lemme 1.** *Soit  $(\Delta_1, \Delta_2)$  un dicylindre fermé de la forme  $|t| \leq \rho'$ ,  $|x| \leq r$ . Pour tout nombre réel positif  $\varepsilon$ , quelque petit qu'il soit, on a toujours l'inégalité*

$$|f(t, x) - g(t, x)| < \varepsilon$$

dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , pourvu que  $M_f$  soit plus grand qu'un nombre réel positif  $M_0$  qui dépend seulement de  $\varepsilon$ , de  $g(t, x)$  et de  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, que ce n'est pas vrai. Alors, il y a un nombre réel positif  $\varepsilon_0$ , une suite de nombres réels positifs  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) qui s'augmentent indéfiniment, une suite de fonctions  $f_i(t, x)$  satisfaisant aux conditions ci-dessus et une suite de points  $(t_i, x_i)$  dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  tels que

$$|f_i(t_i, x_i) - g(t_i, x_i)| > \varepsilon_0 \quad i=1, 2, \dots$$

même si, pour tout  $t$  fixé dans  $\Delta_1$ , les fonctions  $F_i(t, x) = \xi_i(t, g(t, x))$  sont holomorphes et univalentes dans le cercle  $|x| < M_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) respectivement, où  $\xi_i(t, y)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) sont les fonctions inverses de  $f_i(t, x)$ . Soit  $(t_0, x_0)$  un point d'accumulation de l'ensemble de tous les points  $(t_i, x_i)$ . Ceci existe certainement puisque  $(\Delta_1, \Delta_2)$  est compact. Traçons ensuite un dicylindre  $(\delta_1, \delta_2)$  de la forme  $|t - t_0| < \varepsilon'$ ,  $|x - x_0| < \varepsilon'$ , ( $\varepsilon' < r$ ) dans  $(\Gamma, C)$  tel que, pour toute paire de points  $(t', x')$  et  $(t'', x'')$  dans  $(\delta_1, \delta_2)$ , on ait

$$|g(t', x') - g(t'', x'')| < \varepsilon_0.$$

Ceci est possible certainement.

Or, d'après le lemme 1, on peut trouver un nombre  $M_0$  tel que, si  $F(t, x)$  est holomorphe et univalente dans le cercle  $|x| < M_0$ , par rapport à  $x$ , on ait

$$|F(t, x) - x| < \varepsilon'/2$$

dans le cercle  $|x| < 2r$ , où  $M_0$  ne dépend pas de  $t$ . Soit  $(t_i, x'_i)$  un

point tel que l'on ait

$$F(t_i, x'_i) = x_i.$$

D'après le théorème de Rouché, un tel point existe dans  $(\delta_1, \delta_2)$  certainement, pourvu que  $M_i > M_0$ ,  $|x_i - x_0| < \varepsilon'/2$  et  $t_i \in \delta_2$ . Car pour tout  $x$  avec  $|x - x_0| = \varepsilon'$ , on a

$$|(F(t_i, x) - x_i) - (x - x_i)| > |x - x_i|,$$

Ceci est évidemment en contradiction avec l'hypothèse puisque, pour un point comme ci-dessus, on a

$$|f_i(t_i, x_i) - g(t_i, x_i)| = |g(t_i, x'_i) - g(t_i, x_i)| < \varepsilon_0.$$

Donc le corollaire a été démontré.

Nous allons maintenant démontrer le

**Lemme fondamental.** *Pour un domaine multivalent quelconque  $D$  de type  $(T)$  étalé au-dessus du dicylindre  $(\Gamma, C)$ , la fonction  $\varphi(p)$  attachée à  $D$  est holomorphe sur  $D$ .*

D'après ce qu'on a vu dans la section 4, on peut supposer sans restreindre la généralité que  $D$  n'a aucun point critique intérieur. Soit  $\zeta(z, w)$  la fonction inverse de  $\varphi(p)$ . Elle se développe en série de Taylor de la forme

$$\zeta(z, w) = w + a_2(z)w^2 + \dots$$

Il suffit, pour démontrer le lemme, de montrer que toutes les fonctions  $a_j(z)$  ( $j=2, 3, \dots$ ) sont holomorphes dans  $\Gamma$ .

On considère ici une fonction  $a_n(z)$  entre elles. Soit  $\Gamma'$  un cercle fermé quelconque dans  $\Gamma$  de la forme  $|z| \leq \rho'$ , ( $\rho' < \rho$ ). Alors, d'après l'énoncé qui a été exprimé dans la section 2, elle est continue en  $\Gamma'$ .

Prenons, d'abord, un nombre réel positif quelconque  $\varepsilon_0$  et posons  $\varepsilon = \varepsilon_0/n!$ . Alors on peut déterminer un nombre réel positif  $M_0$  qui assure à la conclusion du corollaire au lemme 1, pour le nombre  $\varepsilon$ , pour la fonction  $\zeta(z, w)$  et pour le dicylindre  $(\Gamma', \Delta^0)$  où  $\Delta^0: |w| \leq 1$ .

Ensuite, au domaine  $D$  et au nombre  $M_0$ , on applique l'énoncé qui a été exprimé dans la section 5. C'est-à-dire, on fait correspondre

conformément au sens de Riemann un domaine, qui est obtenu à partir de  $\Gamma'$  par l'exception d'un ensemble fini de points dans  $\Gamma'$ , au cercle unité sur le plan  $t$  par la fonction  $z=\lambda(t)$ , et on construit un domaine  $V^*$  qui contient  $\Delta^*$  au-dessus de  $(\Gamma^*, C)$ , où  $V^*$ ,  $\Delta^*$  et  $\Gamma^*$  ont les mêmes significations que l'on a dites dans la section 5. Soit  $\zeta^*(t, w)$  la fonction inverse de  $\varphi^*(p)$  attachée à  $V^*$ . Elle est holomorphe par rapport à  $t$  et  $w$  et représentée par la forme

$$\zeta^*(t, w) = w + a_2^*(t)w^2 + \cdots + a_N^*(t)w^N,$$

où  $a_j^*(t)$  ( $j=2, \dots, N$ ) sont holomorphes dans  $\Gamma^*$ .

Considérons, ensuite, la fonction donnée par

$$\phi(t, w) = \varphi^*(\lambda(t), \zeta(\lambda(t), w)),$$

où  $\varphi^*(t, u)$  est une branche de  $\varphi^*(p)$  qui contient  $O^*$ . Alors, pour tout  $t$  dans  $\Gamma^*$ , elle est holomorphe par rapport à  $w$  et univalente dans le cercle  $|w| < M_0$ , puisque  $V^*$  contient  $\Delta^*$ . Donc, d'après le corollaire au lemme 1, on a

$$|\zeta(\lambda(t), w) - \zeta^*(t, w)| < \varepsilon$$

dans  $(\Gamma^*, \Delta^0)$ . Ceci entraîne, d'après le théorème de *Cauchy*,

$$|a_n(\lambda(t)) - a_n^*(t)| < \varepsilon_0,$$

où, si  $n > N$ ,  $a_n^*(t) \equiv 0$ .

Ceci signifie que, d'après le lemme 6,  $a_n(z)$  est holomorphe dans  $\Gamma'$ , et elle l'est aussi dans  $\Gamma$  puisque  $\Gamma'$  est arbitraire dans  $\Gamma$ . Le lemme a été donc certainement démontré.

## II. Fonctions entières de deux variables complexes, dont les surfaces premières sont toutes simple- ment connexes et du type parabolique

**7. Construction d'une fonction entière.** Dans la section actuelle, nous allons considérer des fonctions entières  $f(x, y)$  dans l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$  satisfaisant aux conditions suivantes que l'on dira conditions (A).

- 1) Pour tout nombre complexe  $c$ , la surface entière donnée par

$$f(x, y) - c = 0$$

est non vide et irréductible dans tout l'espace. Désignons-la par  $S_c$ .

- 2) Pour tout nombre complexe  $c$ ,  $S_c$  est simplement connexe et du type parabolique en tant que surface de Riemann d'une variable complexe.

- 3) Il n'existe dans l'espace aucun point, en lequel deux fonctions

$$\partial f / \partial x \quad \text{et} \quad \partial f / \partial y$$

s'annulent à la fois.

Comme on peut voir facilement, une fonction entière  $f(x, y)$  satisfait à ces conditions, s'il y a une autre fonction entière  $g(x, y)$  telle que la transformation donnée par

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = g(x, y) \end{cases}$$

fasse correspondre biunivoquement tout l'espace de  $x$  et  $y$  à celui de  $z$  et  $w$ , c'est-à-dire, si la paire  $(f, g)$  définit un automorphisme analytique de tout l'espace.  $g(x, y)$  sera dite *fonction associée à  $f(x, y)$* .

Maintenant, je dit inversement que, pour une fonction entière  $f(x, y)$ , il existe toujours une telle fonction  $g(x, y)$  pourvu que  $f(x, y)$  satisfasse à ces conditions (A) seulement.

Soit, de nouveau,  $f(x, y)$  une fonction entière qui satisfait aux conditions (A). Prenant un nombre complexe quelconque  $c$ , on considère la surface entière  $S_c$ . Soit  $p$  un point quelconque sur  $S_c$  et soit  $L$  une droite analytique passant transversalement par  $p$ . Supposons ici que  $L$  est donnée par  $x=0$ . Ceci ne restreint jamais la généralité; car, si nécessaire, il suffit de faire une transformation linéaire des coordonnées  $x$  et  $y$ . Ensuite, prenant la partie  $\Gamma$  autour de  $p$  sur  $L$  donnée par  $|f-c| < \rho$ , où  $\rho$  est un nombre réel positif convenable, on considère un tube normal  $\Sigma_r$ , sous les mêmes significations qu'on

a dites dans le mémoire (I)<sup>16)</sup>; ce tube est, dans le cas actuel, la partie donnée par  $|f-c| < \rho$  dans tout l'espace. Alors, le domaine d'holomorphie de la fonction obtenue par la résolution de l'équation

$$z - f(x, y) = 0$$

par rapport à  $y$  au-dessus de  $(\Gamma, C)$  est un domaine multivalent  $D$  étalé au-dessus du dicylindre  $(\Gamma, C)$ , où  $\Gamma: |z-c| < \rho$  et  $C: |x| < \infty$ . En tant que variété,  $D$  est holomorphiquement équivalent à  $\Sigma_r$ . Alors, on peut dire que

*Le domaine multivalent  $D$  est de type  $(T)$ .*

En effet, 1) il est une variété de Stein puisqu'il est donné par  $|f-c| < \rho$  dans tout l'espace. 2) pour tout  $c'$  dans  $\Gamma$ ,  $D_{c'}$  est identique à  $S_{c'}$ , donc il est simplement connexe et du type parabolique. 3) pour tout  $c'$  dans  $\Gamma$ ,  $S_{c'}$  n'a aucun point singulier puisque deux fonctions  $\partial f/\partial x$  et  $\partial f/\partial y$  ne s'annulent simultanément en aucun point sur  $S_{c'}$ . 4) pour tout  $c'$  dans  $\Gamma$ , on obtient, par la résolution de l'équation

$$c' - f(x, y) = 0$$

par rapport à  $y$ , une fonction de  $x$  holomorphe dans un cercle autour du point commun de  $L$  et de  $S_{c'}$ , dont le rayon varie continûment avec  $c'$ , car,  $\Sigma_r$  est normal.

Par suite, on a la fonction attachée à  $D$ . D'après le lemme fondamental, cette fonction est holomorphe dans  $\Sigma_r$ , donc, on désignera par  $\varphi(x, y)$ . En ce moment, la transformation donnée par la forme

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

fait correspondre  $\Sigma_r$  au dicylindre  $(\Gamma, C')$ , où  $C': |w| < \infty$ , holomorphiquement et biunivoquement. Nous appellerons  $\varphi(x, y)$ , de nouveau, fonction attachée à  $\Sigma_r$ . D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout le plan  $z$  d'une infinité dénombrable de cercles  $\Gamma_i$  de la forme

---

16) loc. cit., p. 71.

$$|z - c_i| < \rho_i$$

tels que, pour chaque  $i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), désignant par  $\Sigma_i$  la partie dans tout l'espace donnée par  $|f - c_i| < \rho_i$  comme ci-dessus, on puisse trouver une fonction  $\varphi_i(x, y)$  attachée à  $\Sigma_i$ . Alors, comme on sait bien, dans la partie commune au deux tubes  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$ , si elle n'est pas vide, on aura l'équation

$$\varphi_i(x, y) = \alpha_{ij}(f(x, y)) \cdot \varphi_j(x, y) + \beta_{ij}(f(x, y)),$$

où  $\alpha_{ij}(z)$  et  $\beta_{ij}(z)$  sont des fonctions holomorphes dans  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$  et  $\alpha_{ij}(z)$  ne s'annule en aucun point de  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ .

Considérons la totalité des paires

$$\{(\alpha_{ij}(z), \Gamma_i \cap \Gamma_j)\}$$

pour toutes les paires  $(i, j)$  telles que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ . Ceci est une donnée du deuxième problème de *Cousin* dans tout le plan  $z$ ; car, pour toute  $(i, j)$  telle que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ , on a  $\alpha_{ij}(z) \cdot \alpha_{ji}(z) = 1$  et, pour tout  $(i, j, k)$  tel que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ , on a  $\alpha_{ij}(z) \cdot \alpha_{jk}(z) \cdot \alpha_{ki}(z) = 1$ . Grâce à Cousin on peut toujours résoudre le problème, c'est-à-dire, dans chaque cercle on a une fonction holomorphe  $\alpha_i(z)$  qui ne s'annulent en aucun point de  $\Gamma_i$  et on a

$$\alpha_{ij}(z) = \alpha_j(z) / \alpha_i(z)$$

dans  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ , s'il n'est pas vide. En ce moment, les fonctions données par

$$\varphi'_i(x, y) = \alpha_i(f(x, y)) \cdot \varphi_i(x, y) \quad i=1, 2, \dots$$

sont des fonctions holomorphes dans  $\Sigma_i$ , et de plus, pour  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ , s'il n'est pas vide, on a l'équation

$$\varphi'_i(x, y) = \varphi'_j(x, y) + \beta'_{ij}(f(x, y))$$

où  $\beta'_{ij}(z) = \alpha_i(z) \beta_{ij}(z)$ .

Considérons, encore une fois, le système des paires

$$\{(\beta'_{ij}(z), \Gamma_i \cap \Gamma_j)\},$$

pour toutes les paires  $(i, j)$  telles que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ .

Cette fois, ceci est une donnée du premier problème de *Cousin* dans tout le plan  $z$ ; car, pour toute  $(i, j)$  telle que  $\Gamma_i \cup \Gamma_j \neq \emptyset$ , on a  $\beta'_{ij}(z) + \beta'_{ji}(z) = 0$  et pour tout  $(i, j, k)$  tel que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ , on a  $\beta'_{ij}(z) + \beta'_{jk}(z) + \beta'_{ki}(z) = 0$ . Donc, grâce à aussi Cousin, on peut le résoudre et on a une fonction holomorphe  $\beta_i(z)$  dans chaque cercle  $\Gamma_i$  de manière qu'on ait

$$\beta'_{ij}(z) = \beta_j(z) - \beta_i(z)$$

dans  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ . D'où, dans la partie commune aux  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$ , si elle n'est pas vide, on a

$$\varphi'_i(x, y) + \beta_i(f(x, y)) = \varphi'_j(x, y) + \beta_j(f(x, y)).$$

Donc, en posant dans  $\Sigma_i$

$$g(x, y) = \alpha_i(f(x, y)) \cdot \varphi_i(x, y) + \beta_i(f(x, y)),$$

on obtient une fonction entière  $g(x, y)$ . Elle est certainement une fonction associée à  $f(x, y)$ .

En effet, pour tout nombre complexe  $c$ , la fonction  $g(x, y)$  fait correspondre  $S_c$  à tout le plan de  $w$  holomorphiquement et biunivoquement.

D'après ce qu'on a dit jusqu'ici, on a le

**Théorème I.** *Pour une fonction entière  $f(x, y)$  satisfaisant aux conditions données au début de la section actuelle, on peut toujours trouver une autre fonction entière  $g(x, y)$  telle que la paire  $(f, g)$  définisse un automorphisme analytique de tout l'espace de  $x$  et  $y$ .*

**8. Une décomposition d'une fonction entière.** Soit  $F(x, y)$  une fonction entière de deux variables complexes  $x$  et  $y$ . Nous dirons, dans la suite, que  $F(x, y)$  a la *propriété*  $(U)$ , si, pour tout nombre complexe  $c$ , toutes les composantes irréductibles de la surface entière donnée par l'équation

$$(1) \quad F(x, y) - c = 0$$

sont conjuguées de type  $(\alpha)$  l'une à l'autre deux à deux au sens du mémoire (I).

D'après la définition, on peut dire que si  $F(x, y)$  a la propriété  $(U)$ , pour presque tout nombre complexe  $c$ , la surface entière donnée par l'équation (1) est irréductible puisque, d'après le théorème 2 dans le mémoire (I),<sup>17)</sup> presque toute surface première de  $F(x, y)$  est régulière. De l'hypothèse, il n'y a aucune surface première irrégulière de  $F$  de type  $(B)$ .

Soit, ensuite,  $f(x, y)$  une fonction entière quelconque. Nous dirons dans la suite que  $f(x, y)$  a une décomposition si l'on peut trouver une fonction entière  $F(x, y)$  ayant la propriété  $(U)$  et celle  $\varphi(z)$  d'une variable complexe  $z$  telles qu'on ait

$$(2) \quad f(x, y) = \varphi(F(x, y)).$$

Comme on peut voir facilement, si  $f$  a une décomposition, il n'y a aucune surface première irrégulière de  $f$  de type  $(B)$ .

Le but de la section actuelle est de voir inversement que toute fonction entière  $f(x, y)$  a une décomposition pourvu qu'il n'y ait aucune surface première irrégulière de  $f$  de type  $(B)$ .

Soit, à nouveau,  $f(x, y)$  une fonction entière de  $x$  et  $y$  n'ayant aucune surface première irrégulière de type  $(B)$ . Cette hypothèse nous permet de former, pour chaque surface première  $S$  de  $f$ , le système  $(S)$  de toutes les surfaces premières de  $f$  qui sont conjuguées à  $S$ , comme une classe d'équivalence. Car, l'hypothèse entraîne que, pour toute surface première  $S'$  appartenant à  $(S)$ ,  $(S')$  est identique à  $(S)$ . On appellera donc  $(S)$  système de conjugaison de  $f$ , et la valeur de  $f$  sur  $S$  sera dite celle de  $(S)$ .

Considérons l'ensemble de tous les systèmes de conjugaison de  $f$  comme un ensemble de points. Nous allons d'abord définir sur cet ensemble une topologie, au moyen de la notion de voisinages, comme ce qui suit.

Soit  $(S)$  un système de conjugaison de  $f$  avec la valeur  $a$ .

---

<sup>17)</sup> loc. cit., p. 76.

Prenons une surface première quelconque  $S'$  de  $f$  appartenant à  $(S)$ , et considérons un tube normal quelconque  $\Sigma_r$  autour de  $S'$ , où  $r$  est la partie donnée par l'inégalité de la forme  $|f-a| < \rho$  sur une droite analytique  $L$  passant par un point régulier  $p$  sur  $S'$  transversalement à  $S'$ . Alors nous regardons comme un voisinage de  $(S)$  l'ensemble de tous les systèmes de conjugaison de  $f$  qui contiennent au moins une surface première de  $f$  passant par un point de  $r$ .

Désignons par  $V$  cet ensemble muni de la topologie ainsi définie. Alors on peut dire que

*La topologie de  $V$  satisfait aux conditions de Hausdorff.*

En effet, prenons un système de conjugaison  $(S)$  de  $f$  avec la valeur  $a$ . De la définition, il est évident que tout voisinage de  $(S)$  contient  $(S)$  lui-même. Sous les significations habituelles des notations, soit  $\Sigma_r$  un tube normal quelconque autour d'une surface première quelconque  $S'$  appartenant à  $(S)$ . Alors, pour toute surface première  $S_1$  passant par un point de  $r$ , il y a un tube normal  $\Sigma'$  autour de  $S_1$  qui se trouve dans  $\Sigma$ . Ceci signifie que, pour tout système de conjugaison  $(S_1)$  de  $f$  contenu dans un voisinage  $\delta$  de  $(S)$ , il y a un voisinage de  $(S_1)$  qui se trouve dans  $\delta$ . Soient ensuite  $\Sigma_{r_1}$  et  $\Sigma_{r_2}$  deux tubes normaux autour de deux surfaces premières  $S'$  et  $S''$  appartenant à  $(S)$  respectivement. Alors, on peut toujours trouver deux autres tubes normaux  $\Sigma'_{r_1}$  et  $\Sigma'_{r_2}$  tels que  $r'_1 \subset r_1$ ,  $r'_2 \subset r_2$  et  $\bar{\Sigma}'_{r'_1} = \bar{\Sigma}'_{r'_2}$  puisque  $S'$  et  $S''$  sont conjuguées de type  $(\alpha)$  l'une à l'autre. Ceci signifie que, pour deux voisinages quelconques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  de  $(S)$ , il y a un voisinage de  $(S)$  qui se trouve dans  $\delta_1 \cap \delta_2$ . Considérons finalement deux systèmes de conjugaison différents  $(S_1)$  et  $(S_2)$  de  $f$ . Alors, lorsqu'on prend deux surfaces premières  $S'_1$  et  $S'_2$  appartenant à  $(S_1)$  et à  $(S_2)$  respectivement, on peut toujours trouver deux tubes normaux  $\Sigma_{r_1}$  et  $\Sigma_{r_2}$  autour de  $S'_1$  et  $S'_2$  tels qu'il n'y ait aucun point commun, puisque  $S'_1$  et  $S'_2$  ne sont pas conjuguées l'une à l'autre. Ceci signifie que  $(S_1)$  et  $(S_2)$  ont des voisinages n'ayant aucun point commun. Donc la topologie de  $V$  satisfait aux conditions de Hausdorff.

Maintenant, on peut définir une transformation univoque de tout l'espace de  $x$  et  $y$  à  $V$ , de façon que l'image de tout point  $(x, y)$  soit le système de conjugaison de  $f$  qui contient la surface première de  $f$  passant par  $(x, y)$ . Elle est évidemment continue. On appellera cette transformation projection par  $f$ , et la désignera par  $\pi$ .

Nous allons ensuite définir une structure analytique sur  $V$ , de manière que  $\pi$  soit analytique.

Considérons une surface première quelconque  $S$  de  $f$  avec la valeur  $a$ . Soit  $\Sigma_r$ , un tube normal autour de  $S$ , sous la même signification des notations. Alors on a un voisinage  $\delta$  de  $(S)$  par  $\Sigma_r$ . D'autre part, on peut faire correspondre  $\Gamma$  à la partie de la surface de Riemann d'une fonction de la forme

$$(3) \quad (z - a)^{1/\epsilon}$$

où  $\epsilon$  est l'ordre de  $S$ , pouvant être un, située au-dessus du cercle  $\Gamma^* : |z - a| < \rho$  par la restriction de  $f$  sur  $\Gamma$ , holomorphiquement et biunivoquement. Désignons cette partie par  $\sigma$ .

Il y a alors deux cas; ou bien  $S$  a son quasi-ordre, qui est alors égal à  $\epsilon$ , ou bien il n'en a pas.

Dans le premier cas, pour deux points distincts quelconques  $p$  et  $q$  sur  $\Gamma$ , deux surfaces premières  $S_p$  et  $S_q$  de  $f$  passant par  $p$  et par  $q$  sont toujours distinctes et ne sont pas conjuguées l'une à l'autre. Donc la correspondance de  $\sigma$  à  $\delta$  est certainement biunivoque. De plus, on voit facilement que la fonction

$$(4) \quad z' = (f(x, y) - a)^{1/\epsilon}$$

est holomorphe et uniforme dans l'intérieur de  $\overline{\Sigma}_r$ . En ce moment, on prend la valeur de la fonction (4) en  $S_p$  pour une coordonnée locale de  $(S_p)$  dans  $\delta$ , où  $p$  est un point quelconque de  $\Gamma$  et  $S_p$  est la surface première de  $f$  passant par  $p$ .

Dans le deuxième cas, à un point de  $\delta$ , il correspond certain nombre de points sur  $\Gamma$ . Nous dirons que deux points  $p'$  et  $q'$  sur  $\sigma$  situés au-dessus d'un même point  $b$  dans  $\Gamma^*$  sont conjugués l'un à

l'autre si,  $p$  et  $q$  étant deux points sur  $\Gamma$  correspondant à  $p'$  et  $q'$  respectivement, ou bien  $p$  et  $q$  se trouvent sur une même surface première de  $f$  ou bien deux surfaces premières  $S_p$  et  $S_q$  passant par  $p$  et  $q$  sont conjuguées l'une à l'autre. Alors, on peut dire que

*Si  $p'$  et  $q'$  sont conjugués l'un à l'autre, il y a un cercle  $r$  de la forme  $|z-b| < \varepsilon$  dans  $\Gamma^*$ , qui ne contient pas le point  $a$ , tel que, pour tout point  $b'$  dans  $r$ , deux points, qui se trouvent chacun sur le même feuillet de  $\sigma$  que les points  $p'$  et  $q'$  respectivement et qui sont situés au-dessus de  $b'$ , soient conjugués l'un à l'autre.*

En effet, ceci est évident dans le cas où  $p$  et  $q$  se trouvent sur la même surface première de  $f$ . Supposons donc que  $S_p$  et  $S_q$  sont conjuguées l'une à l'autre. Alors on peut décrire deux tubes normaux  $\Sigma_p$  et  $\Sigma_q$  autour de  $S_p$  et de  $S_q$  respectivement de manière que  $\bar{\Sigma}_p = \bar{\Sigma}_q$ , puisque  $S_p$  et  $S_q$  sont conjuguées de type  $(\alpha)$  l'une à l'autre. Ceci signifie certainement que l'énoncé est vrai.

De plus, on peut dire que

*S'il y a une suite de paires  $(p'_i, q'_i)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) de points sur  $\sigma$ , telles que  $p'_i$  et  $q'_i$  soient conjugués l'un à l'autre pour tout  $i$ , et que la suite  $p'_1, p'_2, \dots$  converge vers  $p'_0$  et la suite  $q'_1, q'_2, \dots$  vers  $q'_0$ , alors  $p'_0$  et  $q'_0$  sont aussi conjugués l'un à l'autre.*

En effet,  $p'_0$  et  $q'_0$  se trouvent au-dessus d'un même point  $b_0$  dans  $\Gamma^*$ . Désignons par  $p_i$  et par  $q_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) les points sur  $\Gamma$  qui correspondent à  $p'_i$  et à  $q'_i$ ; et par  $S_i$  et par  $T_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) les surfaces premières de  $f$  passant par  $p_i$  et par  $q_i$  respectivement. Alors  $S_0$  et  $T_0$  sont identiques ou bien conjuguées l'une à l'autre puisque, d'après l'hypothèse, il en est ainsi pour toute paire  $S_i$  et  $T_i$  et que les suites  $S_i$  et  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) tendent vers  $S_0$  et vers  $T_0$  respectivement. Ceci signifie que  $p'_0$  et  $q'_0$  sont conjugués l'un à l'autre.

Par conséquent, identifions toute paire de points sur  $\sigma$  qui sont conjugués l'un à l'autre. Alors on obtient, à nouveau, la partie de la surface de Riemann d'une fonction de la forme

$$(5) \quad (z-a)^{1/c'}$$

où  $e'$  est un nombre entier positif convenable, située au-dessus de  $\Gamma^*$ . Désignons cette partie par  $\sigma'$ . La correspondance de  $\sigma'$  à  $\delta$  est évidemment biunivoque. De plus, comme on peut voir facilement, la fonction

$$(6) \quad z' = (f(x, y) - a)^{1/e'}$$

est holomorphe et uniforme dans l'intérieur de  $\overline{\Sigma}_r$ . En ce moment, on prend la valeur de la fonction (6) en  $S_p$  comme une coordonnée locale de  $(S_p)$  dans  $\delta$ , où  $p$  est un point quelconque de  $\Gamma$  et  $S_p$  est la surface première de  $f$  passant par  $p$ .

Ici, on peut dire que

*V est une surface de Riemann d'une variable avec les coordonnées locales qu'on vient de définir, telle que la projection  $\pi$  est holomorphe.*

En effet, la première partie de l'énoncé n'est pas autre chose que ce qu'on a dit jusqu'ici. Soit  $\psi$  une fonction holomorphe en point  $(S)$  sur  $V$ . Décrivons un tube normal  $\Sigma_r$  autour d'une surface première quelconque appartenant à  $(S)$  telle que  $\psi$  est holomorphe dans le voisinage de  $(S)$  sur  $V$  donné par  $\Sigma_r$ . Alors la fonction donnée par

$$F(x, y) = \pi(\psi)$$

est bien définie et uniforme dans l'intérieur de  $\overline{\Sigma}_r$  et holomorphe par rapport à  $z'$  puisqu'il en est ainsi sur  $\Gamma$ . Ceci signifie que la dernière partie de l'énoncé est aussi vraie.

Ensuite, on peut dire que

*La surface de Riemann  $V$  est toujours simplement connexe et du type parabolique.*

En effet,  $V$  n'est pas évidemment compacte. Si  $V$  n'est pas simplement connexe, comme on sait bien, il existe une fonction  $\psi_1$  holomorphe et multiforme sur toute  $V$ . Considérons une fonction donnée par

$$F_1(x, y) = \pi(\psi_1).$$

Elle est holomorphe et multiforme dans tout l'espace de  $x$  et  $y$ . Ceci est évidemment l'absurde, puisque tout l'espace est simplement connexe. Supposons ensuite qu'il existe une fonction holomorphe  $\psi_2$  sur  $V$  qui fait correspondre toute  $V$  au cercle unité sur le plan d'une variable complexe. Considérons aussi une fonction donnée par

$$F_2(x, y) = \pi(\psi_2).$$

Ceci est holomorphe dans tout l'espace de  $x$  et  $y$  et bornée supérieurement en module. C'est aussi une contradiction avec le théorème de *Liouville*. Donc  $V$  est du type parabolique.

Par suite, il y a une fonction holomorphe  $\xi$  sur toute  $V$  qui fait correspondre toute  $V$  à tout le plan d'une variable complexe  $z$  biunivoquement. Elle est la fonction inverse d'une fonction entière de  $z$ . Désignons-la par  $\varphi(z)$ .

Posons ici

$$F(x, y) = \xi(\pi).$$

Alors  $F(x, y)$  aura certainement la propriété ( $U$ ) puisque, sur deux surfaces premières régulières distinctes quelconques de  $f$ ,  $F(x, y)$  prend toujours des valeurs distinctes. Donc, posons ensuite

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y)).$$

Ceci est une décomposition de  $f$

D'où, on peut conclure comme ce qui suit.

**Théorème 1.** *Pour toute fonction entière  $f(x, y)$  de deux variables complexes  $x$  et  $y$  qui n'a aucune surface première irrégulière de type ( $B$ ), on peut toujours trouver une fonction entière  $F(x, y)$  ayant la propriété ( $U$ ) et celle  $\varphi(z)$  d'une variable  $z$  telles qu'on ait*

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y)),$$

*c'est-à-dire  $f$  a toujours une décomposition.*

**9. Propriétés topologiques locales d'une surface première** Les conditions ( $A$ ) que l'on a posées au début de la section 7 ne sont pas nécessairement indépendantes l'une de l'autre. Dans la section

actuelle, on considèrera des fonctions entières de  $x$  et  $y$  telles que toute leur surface première est simplement connexe. Désignons par  $\mathfrak{F}$  la famille de toutes les telles fonctions entières.

En général, soit  $f(x, y)$  une fonction entière quelconque de  $x$  et  $y$ . On dira, dans toute la suite, qu'un point  $p$  sur une surface première  $S$  de  $f$  avec la valeur  $a$  est un point singulier de  $S$  si la surface entière donnée par l'équation  $f - a = 0$  n'est pas ordinaire en  $p$ . Alors, on peut dire que

*Pour une fonction entière  $f$  appartenant à  $\mathfrak{F}$ , aucune surface première de  $f$  n'admet de points singuliers.*

Nous allons démontrer cet énoncé-ci dans la suite. Pour cela, on préparera deux lemmes suivants.

**Lemme 7.** *Considérons, dans l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$ , un domaine quelconque  $D$  et une surface analytique irréductible  $S$  dans  $D$ . Supposons que  $S$  n'a aucun point singulier et qu'elle est simplement connexe. Soit  $\Delta$  un dicylindre fermé quelconque dans  $D$ . Alors  $S \cap \Delta$  est, s'il n'est pas vide, toujours simplement connexe.*

En effet, on peut faire correspondre  $S$  holomorphiquement et biunivoquement au cercle unité ou bien à tout le plan d'une variable complexe  $z$ . Désignons par  $\varphi$  cette transformation et par  $\Gamma$  l'image de  $S$  par  $\varphi$ . Soit  $\delta$  la partie de  $\Gamma$  qui correspond à  $S \cap \Delta$  par  $\varphi$ . Alors, comme on peut voir facilement, toute fonction holomorphe dans  $\delta$  peut être représentée par une série de fonctions holomorphes dans  $\Gamma$ , convergeant uniformément dans  $\delta$ . Ceci signifie que  $\delta$  est certainement simplement connexe. L'énoncé a été donc démontré.

**Lemme 8.** *Soit  $f(x, y)$  une fonction holomorphe et uniforme dans un domaine quelconque  $D$  sur l'espace de  $x$  et  $y$ . Supposons que toute surface première de  $f$  est simplement connexe. Alors il n'existe jamais un point  $(x_0, y_0)$  dans  $D$  en lequel la surface analytique  $S_0$  dans  $D$  donnée par l'équation  $f = a_0$  est réductible, où  $a_0 = f(x_0, y_0)$ .*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a un tel point dans  $D$ . On suppose, pour simplifier l'écriture, que le point est l'origine. Décrivons un dicylindre de la forme  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ , où

$$\mathcal{A}_1 : |x| < r_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 : |y| < r_2,$$

dans  $D$  tel que  $f(0, y) \neq 0$  dans  $\mathcal{A}_2$  excepté l'origine et, pour tout  $x'$  dans  $\mathcal{A}_1$ ,  $f(x', y) \neq 0$  en tout point sur le contour de  $\mathcal{A}_2$ . Ceci est toujours possible; car, si nécessaire, il suffit de faire une transformation linéaire convenable de coordonnées. De plus, on suppose qu'il n'y a aucun point singulier des surfaces premières de  $f$  dans le dicylindre  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Ceci est aussi possible puisque l'ensemble de tous les points singuliers des surfaces premières de  $f$  est toujours discret dans  $D$ . Alors, d'après l'hypothèse, il y a au moins deux composantes connexes de la frontière de  $S_0 \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Ensuite, on peut trouver un nombre réel positif  $\varepsilon$  tel que, désignant par  $\mathcal{A}_3$  le cercle  $|z - a_0| < \varepsilon$ , pour tout point  $(x', z')$  dans le dicylindre  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$ , on ait toujours  $f(x', y) - z' \neq 0$  en tout point sur le contour de  $\mathcal{A}_2$ , puisque  $f$  est continue dans  $D$ . Maintenant, considérons une suite  $(S_i)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) de surfaces premières de  $f$  avec leurs valeurs dans  $\mathcal{A}_3$  telle que la suite de  $S_i \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  tende vers au moins une composante irréductible de  $S_0 \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ . Alors, on peut dire que toute  $S_i \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  est irréductible dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ , dès que  $i$  surpasse un nombre entier suffisamment grand, et la suite de  $S_i \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  tend vers toutes les composantes irréductibles, de  $S_0 \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  à la fois, puisque, d'après le lemme 1 dans le mémoire (I),<sup>18)</sup> toute suite de surfaces analytiques irréductibles dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  tendant vers une composante irréductible de  $S_0 \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  tend aussi vers toutes composantes irréductibles de  $S_0 \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  et que, pour tout point  $(x', z')$  dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$ , l'équation  $f(x', y) - z' = 0$  a toujours un même nombre de zéros dans  $\mathcal{A}_2$ , chaque zéro étant compté  $\nu$  fois s'il est d'ordre  $\nu$ . Il s'en suit que la frontière de toute  $S_i \cap (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  a au moins deux composantes connexes dès que  $i$  surpasse un nombre entier suffisamment grand, puisqu'il en

18) loc. cit., p. 57.

est ainsi pour  $S_0 \cap (\Delta_1, \Delta_2)$ . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse puisque, d'après le lemme 7,  $S_i \cap (\Delta_1, \Delta_2)$  est toujours simplement connexe. Donc, le lemme 8 a été démontré.

Maintenant, il s'agit d'une fonction entière  $f(x, y)$  appartenant à  $\mathfrak{F}$ . Supposons, pour le réduire à l'absurd, qu'il y a un point singulier d'une surface première  $S_0$  de  $f$  avec la valeur  $a_0$ . On suppose aussi pour simplifier l'écriture que le point singulier est l'origine. D'après le lemme 8, il suffit de nous borner au cas où  $S_0$  est irréductible à l'origine et qu'il n'y a aucune surface première de  $f$  autre que  $S_0$  passant par l'origine. Soit  $e$  l'ordre de  $S_0$ . Considérons la fonction donnée par

$$\varphi(x, y) = (f(x, y) - a_0)^{1/e}.$$

Elle est évidemment holomorphe et uniforme à l'origine. De plus, on peut l'écrire, en faisant une transformation linéaire non singulière convenable de coordonnées, sous la forme

$$\varphi(x, y) = y^l + h(x, y),$$

où  $l$  est un nombre entier positif plus grand que l'unité et  $h(x, y)$  est une fonction holomorphe à l'origine telle que le plus petit degré de la série de Taylor de  $h(x, y)$  à l'origine est plus grand que  $l$ .

Décrivons, ensuite, un dicylindre de la forme  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , où

$$\Delta_1 : |x| < r_1 \quad \text{et} \quad \Delta_2 : |y| < r_2,$$

de manière que les conditions suivantes soient remplies.

- 1)  $\varphi(x, y)$  est holomorphe et uniforme dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  et deux fonctions  $\partial\varphi/\partial x$  et  $\partial\varphi/\partial y$  ne s'annulent simultanément en aucun point dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  autre que l'origine.
- 2)  $\varphi(0, y) \neq 0$  dans  $\Delta_2$  excepté l'origine et pour  $x'$  dans  $\Delta_1$ ,  $\varphi(x', y) \neq 0$  en tout point sur le contour de  $\Delta_2$ .
- 3)  $S_0 \cap (\Delta_1, \Delta_2)$  est irréductible dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .
- 4) Il n'y a aucun point singulier des surfaces premières de  $f$  dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  en dehors de l'origine.

D'après l'hypothèse et la forme  $\varphi(x, y)$ , ceci est toujours possible.

Considérons, ensuite, en introduisant une nouvelle variable complexe  $z$ , un polycylindre de la forme  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ , où  $\mathcal{A}_3: |z| < r_3$ , et une surface analytique  $\Sigma$  dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$  donnée par l'équation

$$z - \varphi(x, y) = 0.$$

En ce moment, on suppose que, pour tout point  $(x', z')$  dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$ , on a  $z' - \varphi(x', y) \neq 0$  en tout point sur le contour de  $\mathcal{A}_2$ . Ceci est toujours possible puisque la fonction  $\varphi$  est continue dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ .

Désignons par  $V$  le domaine multivalent au-dessus de  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$  donné par la projection de  $\Sigma$  sur l'espace de  $x$  et  $z$ , et par  $\sigma$  la projection de la surface critique de  $V$  dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$ . D'après l'hypothèse, on peut représenter  $\sigma$  par la forme

$$x = r(z),$$

où  $r(z)$  est une fonction analytique sur  $\mathcal{A}_3$ , pouvant être multiforme, telle que  $r(0) = 0$  pour tout feuillet de  $r(z)$ . De plus, on suppose ici que, pour tout  $z'$  dans  $\mathcal{A}_3$ , on a  $|r(z')| < r_2$  pour tout feuillet de  $r(z)$  et que  $r(z)$  n'a aucun point critique sauf au-dessus de l'origine. Ceci est aussi possible; car, il suffit, si nécessaire, de diminuer  $r_3$ .

Considérons une autre fonction holomorphe dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  de la forme

$$\varphi^*(x, y) = y' + \alpha \cdot x' + h(x, y),$$

où  $\alpha$  est un nombre complexe suffisamment petit en module tel que  $\varphi^*$  satisfasse aux conditions suivantes.

- 1) Pour tout point  $(x', z')$  dans  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$ , on a  $z' - \varphi^*(x', y) \neq 0$  en tout point sur le contour de  $\mathcal{A}_2$ .
- 2) Désignant par  $\sigma^*$  la même notion que  $\sigma$  pour  $\varphi^*$ , on peut représenter  $\sigma^*$  par la forme

$$x = \gamma^*(z),$$

où  $\gamma^*(z)$  est une fonction analytique, pouvant être multiforme sur  $\mathcal{A}_3$ , telle que, pour tout  $z'$  dans  $\mathcal{A}_3$ , on ait  $|\gamma^*(z')| < r_2$  pour tout feuillet de  $\gamma^*(z)$ .

- 3) Il y a une infinité de points  $c$  dans  $\Delta_3$  tels que  $c \neq 0$  et que, pour chaque  $c$ , deux surfaces analytiques  $S_1$  et  $S_1^*$  données par les équations

$$\varphi(x, y) - c = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^*(x, y) - c = 0$$

dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  respectivement soient homéomorphes l'une à l'autre.

Ceci est évidemment possible puisque, si l'on varie  $\alpha$  à 0, la fonction  $\varphi^*(x, y)$  tend uniformément vers  $\varphi(x, y)$  dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  et  $S_1$  n'a aucun point singulier dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

D'après le lemme 5 et le même raisonnement que l'on a fait dans la section 5, on peut dire que, pour tout  $z'$  dans  $\Delta_3$ , sauf un nombre fini au plus de points, la surface analytique donnée par l'équation

$$z' - \varphi^*(x, y) = 0$$

dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  a la même topologie. Envisageons cette topologie. D'après le lemme 8, elle n'est pas simplement connexe puisque, comme on peut voir facilement, la surface analytique donnée par l'équation

$$\varphi^*(x, y) = 0$$

dans  $(\Delta_1, \Delta_2)$  est certainement réductible à l'origine. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse puisque, d'après le lemme 7,  $S_1$  est simplement connexe.

D'après ce qu'on a dit jusqu'ici, on a le

**Théorème 2.** *Pour toute fonction entière  $f(x, y)$  appartenant à  $\mathfrak{F}$ , aucune surface première de  $f$  n'admet de point singulier.*

**10. Propriétés topologiques globales d'une surface première.**

Dans la section actuelle, nous allons considérer des fonctions entières de  $x$  et  $y$  dont toute surface première est simplement connexe et, de plus, du type parabolique. Désignons par  $\mathfrak{F}_0$  la famille de toutes les telles fonctions entières. Alors, on peut dire que

Pour toute fonction entière  $f(x, y)$  appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ , il y a une décomposition

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y))$$

telle que la fonction  $F(x, y)$  satisfasse aux conditions (A) qui ont été indiquées au début de la section 7.

Nous allons démontrer le fait dans la suite.

**Lemme 9.** *Soit  $f(x, y)$  une fonction entière appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ . Alors, il n'existe jamais une paire  $(S_0, S'_0)$  de surfaces premières de  $f$  telles que  $S_0$  et  $S'_0$  soient en même temps d'ordre un et conjuguées l'une à l'autre.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a au moins une telle paire  $(S_0, S'_0)$ . D'après le lemme 8, il n'y a aucun point commun de  $S_0$  et  $S'_0$ . Décrivons, comme d'habitude, deux tubes normaux  $\Sigma_r$  et  $\Sigma_{r'}$  autour de  $S_0$  et de  $S'_0$  respectivement, où,  $a_0$  étant la valeur de  $f$  en  $S_0$  et en  $S'_0$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont les parties, données par la même inégalité de la forme  $|f - a_0| < \rho_0$ , sur des droites analytiques  $L$  et  $L'$  qui passent par des points  $p_0$  et  $p'_0$  sur  $S_0$  et sur  $S'_0$  respectivement. Alors, d'après le même raisonnement que l'on a fait dans la section 7, on peut trouver une fonction holomorphe attachée à  $\Sigma_r$ ; c'est à dire, désignant la fonction par  $\phi(x, y)$ , on peut faire correspondre  $\Sigma_r$  à un dicylindre de la forme  $(\Delta, C)$ , où  $\Delta: |z - a_0| < \rho$ ,  $C: |w| < \infty$ , holomorphiquement et biunivoquement par la transformation donnée par

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \phi(x, y). \end{cases}$$

Envisageons la fonction  $\varphi(p)$  donnée par la restriction de  $\phi(x, y)$  à  $L'$ . Je dit que

*$\varphi(p)$  n'a pas d'autres singularités que des pôles dans  $\Gamma'$ .*

Désignons par  $\mathcal{C}'$  la partie sur  $\Gamma'$  contenue dans  $\Sigma_{r'}$ . Evidemment  $\varphi(p)$  est holomorphe en tout point dans  $\mathcal{C}'$ . Soit  $p'$  un point frontière de  $\mathcal{C}'$  dans  $\Gamma'$ . Alors, il y a un et un seul point  $p$  dans  $\Gamma$  tel que les surfaces premières de  $f$ , que l'on désigne par  $S$  et par  $S'$ , passant par  $p$  et par  $p'$  respectivement sont conjuguées l'une à l'autre, puisque  $S_0$  et  $S'_0$  sont d'ordre un. Soit  $M$  un nombre réel positif quelconque, et considérons la partie  $\mathfrak{A}$  de  $S$  donnée par l'inégalité

$|\varphi(x, y)| \leq M$ . On peut prendre un voisinage  $U$  de  $\mathfrak{A}$ , qui ne contient aucun point sur  $\Gamma'$ . Alors on peut trouver un nombre réel positif  $\varepsilon$  tel que l'ensemble de points dans tout l'espace de  $x$  et  $y$ , donné par

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\varphi(x, y)| \leq M,$$

se trouve dans  $U$ , où  $b$  est la valeur de  $f$  en  $p$  ainsi qu'en  $p'$ . Ceci signifie que l'on a  $|\varphi(p)| > M$  dans la partie de  $\mathfrak{C}'$  donnée par  $|f - b| < \varepsilon$ . D'autre part, la fonction  $\varphi(p)$  ne prend jamais la valeur nulle dans  $\mathfrak{C}'$ . Par suite, la fonction  $1/\varphi(p)$  est, d'après le théorème de *Rado*, holomorphe dans tout  $\Gamma'$ . Donc tout point frontière de  $\mathfrak{C}'$  dans  $\Gamma'$  est un pôle de la fonction  $\varphi(p)$ .

Écrivons, ensuite, deux courbes fermées  $c$  et  $c'$  sur  $\Gamma$  et sur  $\Gamma'$  données par la même égalité  $|f - a| = r$  respectivement, où  $r$  est un nombre réel positif convenable tel qu'on ait  $c' \subset \mathfrak{C}'$ . Évidemment, on peut varier  $c'$  jusqu'à  $c$  continûment sans passant par aucun point de  $S'$ . Ceci est certainement l'absurde puisque, grâce à *Cousin*, on peut trouver une fonction entière qui prend la valeur nulle justement en  $S'$ . Donc le lemme a été démontré.

D'après le lemme 9, on aura directement les corollaires suivants.

**Corollaire 1.** *Pour une fonction entière appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ , il n'y a aucune surface première irrégulière de type  $(B')$ .*

En effet, d'après le théorème 7 dans le mémoire (I),<sup>19)</sup> s'il y a une surface première irrégulière de type  $(B')$ , il existe nécessairement une paire de surfaces premières qui sont en même temps d'ordre un et conjuguées l'une à l'autre.

**Corollaire 2.** *Pour une fonction entière appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ , toute surface première a nécessairement le quasi-ordre.*

En effet, pour la même raison comme ci-dessus, il est évidemment vrai puisque toute surface première contenue dans un tube

---

<sup>19)</sup> loc. cit., p. 87.

normal autour d'une surface première  $S$  est d'ordre un sauf peut-être  $S$  elle-même.

D'après le théorème 1 et les corollaires précédents, on peut conclure comme ce qui suit.

*Toute fonction entière  $f(x, y)$  appartenant à  $\mathfrak{F}_0$  a une décomposition*

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y)),$$

*telle que toute surface première de  $F$  ait le quasi-order un.*

Maintenant, il s'agit des surfaces premières de la fonction  $F(x, y)$  d'ordre élevé.

Supposons, aussi pour le réduire à l'absurde, qu'il existe une surface première  $S_0$  de  $F$  avec la valeur  $a_0$  d'ordre  $n$  ( $n > 1$ ). Décrivons un tube normal  $\Sigma_r$  autour de  $S_0$  sous les significations habituelles des notations. Désignons par  $\Sigma_r^*$  la partie de  $\Sigma_r$  donnée par l'exception de tous les points de  $S_0$ . Soit  $\mathcal{A}^*$  un domaine sur le plan  $z$  donné par

$$0 < |z - a_0| < \rho,$$

où  $\rho$  est le même nombre réel au moyen duquel on a défini  $l'$ . Alors, pour un cercle  $\delta$  dans  $\mathcal{A}^*$  donné par  $|z - a| < r$ , où  $a$  est un point quelconque de  $\mathcal{A}^*$  et  $r$  est un nombre réel positif, il existe un et un seul tube  $\Sigma_\delta$  dans  $\Sigma_r^*$  donné par l'inégalité  $|F - a| < r$ , puisque  $S_0$  est de quasi-order un. Par suite, on peut considérer la fonction holomorphe  $\varphi(x, y)$ , attachée à  $\Sigma_\delta$ . D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout  $\mathcal{A}^*$  de la somme d'une infinité dénombrable au plus de tels cercles. Désignons-les par  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et par  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les tubes correspondant à  $\delta_i$ . Alors, la somme de tous les tubes  $\Sigma_i$  recouvre tout  $\Sigma_r^*$  puisque  $S_0$  a le quasi-order un.

Soient  $\varphi_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les fonctions holomorphes attachées à  $\Sigma_i$  respectivement. Si  $\Sigma_i \cap \Sigma_j \neq 0$ , on aura toujours l'équation

$$\varphi_i(x, y) = \alpha_{ij}(F(x, y)) \cdot \varphi_j(x, y) + \beta_{ij}(F(x, y)),$$

où  $\alpha_{ij}(z)$  et  $\beta_{ij}(z)$  sont des fonctions holomorphes dans  $\delta_i \cap \delta_j$ , et  $\alpha_{ij}(z)$  n'y prend jamais la valeur nulle. Donc, d'après le même raisonnement que l'on a fait dans la section 7, on peut trouver une fonction holomorphe  $G(x, y)$  dans  $\Sigma_r^*$  telle que la transformation donnée par

$$(7) \quad \begin{cases} z = F(x, y) \\ w = G(x, y) \end{cases}$$

fasse correspondre  $\Sigma_r^*$  à un domaine cylindrique de la forme  $(\mathcal{A}^*, C)$ , où  $C$  signifie tout le plan d'une variable complexe  $w$ , holomorphiquement et biunivoquement, puisque, grâce à Cousin, les première et deuxième problèmes de Cousin peuvent toujours être résolus dans  $\mathcal{A}^*$ .

Formons ensuite une fonction entière  $\phi(x, y)$  qui prend la valeur nulle justement en  $S_0$  avec l'ordre un, et désignons par  $\Psi(z, w)$  la fonction holomorphe dans  $(\mathcal{A}^*, C)$  telle qu'on ait  $\Psi(F, G) = \phi(x, y)$ . Évidemment,  $\Psi(z, w)$  ne prend jamais la valeur nulle dans  $(\mathcal{A}^*, C)$ . Décrivons une courbe simple fermée  $c$  sur  $\Gamma$  donnée par  $|F - a_0| = \rho'$  et celle  $c^*$  dans  $\mathcal{A}^*$  donnée par  $|z - a_0| = \rho'$ , où  $\rho'$  est un nombre réel positif plus petit que  $\rho$ . Désignons par  $c'$  l'image de  $c$  par la transformation (7).

Envisageons ici la variation de l'argument de la fonction  $\Psi(z, w)$  pendant que l'on varie le point  $(z, w)$  circulairement le long de  $c'$  et de  $c^*$  au sens convenable. Si l'on varie le point le long de  $c'$ , la variation en question est identique à celle de  $\phi(x, y)$  pendant que l'on varie un point  $(x, y)$  le long de  $c$ , donc elle est exactement égale à  $2\pi$ . D'autre part, si l'on varie le point le long de  $c^*$ , elle est nécessairement de la forme  $2\pi m$ , où  $m$  est un nombre entier. Ceci est évidemment impossible puisque, comme on peut voir facilement,  $c'$  est homotope à  $n \cdot c^*$  dans  $(\mathcal{A}^*, C)$ .

Il suit, de ce qu'on a dit plus haut et du lemme 9, que

Si une fonction entière  $F(x, y)$  a la propriété (U) et appartient à  $\mathfrak{F}_0$ , toute surface première de  $F$  est régulière et d'ordre un.

On a le

**Théorème 3.** *Pour toute fonction entière  $f(x, y)$  appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ , il y a toujours une décomposition*

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y)),$$

où  $F(x, y)$  satisfait aux conditions (A) qu'on a posées au début de la section 7.

**11. Conclusion.** Résumons les résultats obtenus.

Soit  $f(x, y)$  une fonction entière de deux variables complexes  $x$  et  $y$  appartenant à  $\mathfrak{F}_0$ , c'est-à-dire, telle que toute surface première de  $f$  soit simplement connexe et du type parabolique. Alors, il y a une fonction entière  $F(x, y)$  de  $x$  et  $y$ , et celle  $\varphi(z)$  d'une variable complexe  $z$  telles qu'on ait l'équation

$$f(x, y) = \varphi(F(x, y)),$$

où  $F(x, y)$  appartient à  $\mathfrak{F}_0$  et a la propriété (U), c'est-à-dire, toute surface première de  $F$  est régulière et d'ordre un, et il n'y a aucun point dans tout l'espace en lequel deux fonctions

$$\partial F / \partial x \quad \text{et} \quad \partial F / \partial y$$

s'annulent à la fois. Donc, on peut trouver une autre fonction entière  $G(x, y)$  de  $x$  et  $y$  telle que la transformation de la forme

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

est un automorphisme analytique de tout l'espace de  $x$  et  $y$ . Ceci signifie que la fonction  $f(x, y)$  se réduit à une fonction entière d'une variable  $x'$  par cet automorphisme.

On a donc le

**Théorème II.** *Toute fonction entière de deux variables complexes  $x$  et  $y$  appartenant à  $\mathfrak{F}_0$  se réduit à celle d'une variable complexe par un automorphisme analytique convenable dans tout l'espace de  $x$  et  $y$ .*