J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-2 (1973) 217-272

Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. (IV) Types de surfaces premièrs.

Par

Toshio NISHINO

(Reçu le 28 Mars, 1972)

Introduction

Nous avons cherché, dans les mémoires précédents[1], des surfaces premières d'une fonction entière f de deux variables complexes en les regardant comme des surfaces de Riemann abstraites d'une variable complexe. En général, des surfaces de Riemann sont classifiées de diverses façons suivant leurs propriétés analytiques ou leurs propriétés topologiques. Nous disons ici une surface première de f *parabolique* ou *hyperbolique* suivant qu'elle l'est comme une surface de Riemann abstraite[2]. Elle sera dite, outre cela, *de type* (g, n) si elle est de genre g et si elle a n composantes de frontière, où g et n sont des nombres entiers tels que l'on ait $g \geqq 0$ et $n \geqq 1$, pouvant être l'infini. Lorsque g et n sont tous finis, elle sera dite simplement *de type fini*. Particulièrement, elle sera dite *algébrique* si elle est parabolique et de type fini. Comme on sait bien, il en est ainsi pour toute surface première d'un polynôme.

---

1) T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. 8-1 (1968) 49-100. (II) Fonctions entières qui se réduisent à celle d'une variable, J. Math. Kyoto Univ. 9-2 (1969) 221-274. (III) Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières, J. Math. Kyoto Univ. 10-2 (1970) 245-271.

2) Voir, par exemple, L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton, New Jersey. (1960), p. 204.

Au moyen de ces propriétés des surfaces premières, on classifiera les fonctions entières comme ce qui suit. On appellera *classe* (E) la classe formée de toutes les fonctions entières de deux variables complexes. La classe formée de toutes les fonctions de la classe (E) n'ayant aucune surface première hyperbolique sera appelée *classe* (P) et celle de toutes les fonctions de la classe (P), telles que toute leur surface première soit algébrique, sera appelée *classe* (A). Alors, on sait déjà que l'on a

$$Classe(A) \subsetneqq Classe(P) \subsetneqq Classe(E).$$

Les fonctions appartenant à chacune de ces classe auront, je crois, certaines propriétés propres à la classe.

En ces termes ainsi définis, les résultats principaux s'énoncent comme ce qui suit:

Toute fonction de la classe (P) *appartient à la classe* (A) *si elle a suffisamment beaucoup de surfaces premières algébriques. Presque toutes surfaces premières d'une fonction de la classe* (A) *sont de même type* (g, n). *De plus, aucune fonction de la classe* (A) *n'admet de surface première irrégulière de type* (B).

Une fois que nous établissons ces énoncés, on peut facilement voir qu'une fonction entière dont toute surface première soit donnée par zéro d'un polynôme n'est qu'une composition d'un polynôme de deux variables et d'une fonction entière d'une variable.

Dans la première partie, on étudiera un système holomorphe de surfaces analytiques générales afin d'établir une rétraction analytique autour d'une surface première et un transport d'un système holomorphe donné par une fonction à celui donné par une autre fonction en un ensemble compact. On posera, dans la deuxième partie, le problème principal et on établira quelques lemmes fondamentaux qui revèlent une relation intime entre deux surfaces premières situées suffisamment voisines deux à deux. L'idée sur laquelle reposaient les mémoires II et III sera généralisée dans la troisième partie. On formera, pour un tube normal, un revêtement de type (g, n) et on déformera un domaine algébrique contenant une partie de type (g, n) en un domaine algébrique de type (g, n). Ce sont aussi les moyens fondamentaux pour étudier les fonctions entières considérées. La quatrième partie sera consacrée à établir le théorème principal que l'on vient d'énoncér plus haut premièrement. En même temp, on indiquera le deuxième énoncé. Dans la dernière partie, on étudiera des fonctions de la classe (A) et on obtiendra le troisième des résultats principaux. Quelques énoncés obtenus dans le mémoire actuel ne sont pas, je crois, des résultats finals.

I. Système holomorphe

1. Définition. Considérons, dans l'espace de deux variables complexes x et y, un domaine D fini et univalent mais d'ailleurs quelconque. On se donne ici, pour chaque point p de D, un voisinage u_p de p contenu dans D et une fonction f_p holomorphe et non constante dans u_p de façon qu'elle satisfassent à la condition suivante: Pour toute paire p et q de points dans D tels que l'on ait $u_p \cap u_q \neq 0$, on a l'égalité identique

$$\frac{\partial(f_p, f_q)}{\partial(x, y)} \equiv 0$$

dans $u_p \cap u_q$.

De cette donnée $\{(f_p, u_p)\}$, on pourra définir une famille de surfaces analytiques générales dans D. C'est-à-dire, à chaque point p de D correspond un nombre fini au plus de germes de surfaces analytiques représentées par les composantes irréductibles en p de la surface analytique donnée par l'équation $f_p(x, y) - a = 0$, où a est la valeur de f_p en p. En prolongeant analytiquement chacun de ces germes s_p autant que possible dans D, on obtient une surface analytique générale S_p dans D. On appellera la totalité des surfaces analytiques ainsi obtenues *système holomorphe de surfaces défini par la donnée* $\{(f_p, u_p)\}$ *dans* D ou, en peu de mots, *système holomorphe.* s_p sera appelé *germe en* p *du système holomorphe* et S_p sera appelée *élément du système holomorphe engendré par* s_p ou, simplement, *élément du système holomorphe.* La surface S_p est déterminée uniquement par tout point p sur elle-même sauf une infinité dénombrable au plus de points.

Deux données $\{(f_p, u_p)\}$ et $\{(g_p, v_p)\}$ dans un même domaine D comme ce qui précéde définissent évidemment un même système holomorphe dans D s'il y a au moins un point p de D pour lequel on a l'égalité identique

$$\frac{\partial(f_p, g_p)}{\partial(x, y)} \equiv 0$$

dans $u_p \cap v_p$, puisqu'il suit de là que l'on a l'égalité identique comme ci-dessus en tout point de D. Elles seront dites *équivalentes l'une à l'autre.*

Soit donné un système holomorphe $\mathfrak{S}$ défini par une donnée $\{(f_p, u_p)\}$ dans un domaine D. Supposons ici que D est un domaine d'holomorphie. Alors, *on peut toujours attacher à* $\mathfrak{S}$ *une équation différentielle linéaire de la forme*

$$A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

où ses coefficients $A(x, y)$ *et* $B(x, y)$ *sont des fonctions holomorphes dans* D, *telle qu'elle admette, pour chaque point* p *de* D, *une solution* g_p *holomorphe et non constante dans un voisinage convenable* v_p *de* p *et que la donnée* $\{(g_p, v_p)\}$ *soit équivalente à* $\{(f_p, u_p)\}$.

En effect, d'après la définition, le rapport des deux dérivées partielles $\partial f_p/\partial x$ et $\partial f_p/\partial y$ dans u_p définit certainement une fonction méromorphe dans tout D. Elle se représente, comme on sait bien, par le rapport de deux fonctions holomorphes $C(x, y)$ et $D(x, y)$ dans D, en permettant que celles-ci ne soient pas relativement premières en local, puisque D est un domaine holomorphiquement convexe. Donc, en posant $A(x, y) \equiv D(x, y)$ et $B(x, y) \equiv -C(x, y)$, on a l'équation demandée certainement.

Réciproquement, si une équation différentielle linéaire de la forme (1) admet, en tout point de D, une solution locale holomorphe et non constante les solutions locales définissent un système holomorphe dans D. Cette condition est toujours remplie, comme on sait bien, pourvu que, par exemple, deux coefficients $A(x, y)$ et $B(x, y)$ ne s'annulent à la fois en aucun point de D. On dira que le système holomorphe donné ainsi dans D est défini par l'équation différentielle (1).

2. Remarques. Une fonction holomorphe f dans un domaine D définit naturellement un système holomorphe dans D dont tout élément S_p est fermé dans D, puisque, par définition, il est une composante irréductible passant par p de la surface analytique donnée dans D par l'équation $f-a=0$, où a est la valeur de f en p. Il en est de même pour une fonction méromorphe pourvu qu'elle n'ait aucun point d'indétermination. Mais, le système holomorphe défini par une fonction méromorphe n'est pas nécessairement défini par une fonction holomorphe. Par exemple, un système holomorphe donné par l'équation différentielle linéaire

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

dans le dicylindre D de la forme $|x|<2$, $|y|<2$. Ses coefficients ne s'annulent à la fois en aucun point de D. On peut voir facilement qu'elle admet une solution rationnelle $x/(xy-1)$ dans D. Mais, il suit de là qu'il n'y en a aucune solution holomorphe dans tout le dicylindre. Je ne sait pas si un système holomorphe $\mathfrak{S}$ dans un domaine d'holomorphie D peut être défini par une seule fonction holomorphe ou bien par une seule fonction méromorphe quand $\mathfrak{S}$ consiste seulement en des surfaces analytiques au sens usuel dans D.

Un élément d'un système holomorphe dans un domaine D n'est pas nécessairement fermé. Par exemple, considérons l'équation différentielle linéaire

$$x^3\frac{\partial u}{\partial x}-(x^2y-xy+1)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

dans tout l'espace de x et y. Ses coefficients ne s'annulent à la fois en aucun point dans l'espace. On peut voir facilement qu'elle admet une solution holomorphe $(xy-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ dans tout l'espace à l'exception de la droite analytique $x=0$. Il suit de là que tout élément du système holomorphe sauf la droite $x=0$ s'accumule à tout point de la droite

$x=0$.

Soit S_p un élément d'un système holomorphe quelconque dans un domaine D. Alors, la fermeture $\bar{S}_p$ de S_p dans D est un ensemble pseudoconcave dans D. Donc, on peut considérer l'ensemble dérivé $\bar{S}'_p$ de $\bar{S}_p$[3]. Dans l'exemple ci-dessus, $\bar{S}'_p$ est ou bien vide ou bien une surface analytique dans D. Mais, en général, $\bar{S}'_p$ n'est pas nécesairement ainsi. Plus que cela, il peut se faire que, pour presque tout élément S_p, $\bar{S}'_p$ coïncide avec tout le domaine D. Un tel phénomène se présente chez l'équation différentielle linéaire suivante.

$$x(x^2-1)\frac{\partial u}{\partial x}-\{\alpha(x^2-1)+\beta x(x-1)+\gamma x(x+1)\}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

où α, β et γ sont des nombres complexes dont toutes les combinations linéaires à coefficientes entiers forment un ensemble partout dense dans le plan des nombres complexes. L'équation-ci admet une solution analytique multiforme $e^y x^\alpha(x+1)^\beta(x-1)^\gamma$ dans tout l'espace sauf sur les droites analytiques $x=0$, $x=1$ et $x=-1$. Donc, on peut voir facilement que le système holomorphe dans tout l'espace, défini par cette équation, a ledit caractère.

3. Systèmes holomorphes transversaux. Soit $\mathfrak{S}$ un système holomorphe dans un domaine D. Il sera dit *non singulier* si l'on peut choisir une donnée $\{(f_p, u_p)\}$ qui le définit, de manière que, pour chaque point p de D, deux dérivées partielles $\partial f_p/\partial x$ et $\partial f_p/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point dans u_p. S'il en est ainsi, aucun germe du système holomorphe n'a de point singulier. Soient, ensuite, $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux systèmes holomorphes non singuliers. Ils seront dits *transversaux l'un à l'autre* si l'on peut choisir des données $\{(f_p, u_p)\}$ et $\{(g_p, v_p)\}$ qui les définissent respectivement, de manière que, pour chaque point p de D, le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(f_p, g_p)}{\partial(x, y)}$$

3) T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves, J. Math. Kyoto Univ. 1-2 (1962) p. 235-245.

ne s'annule en aucun point de $u_p \cap v_p$. S'il en est ainsi, la paire (f_p, g_p) peut être regardée comme un système de coordonnées locales en chaque point p de D.

On aura ici le

Théorème 1. *Soit D un domaine d'holomorphie dans l'espace de x et y et soit $\mathfrak{S}$ un système holomorphe défini par une seule fonction holomorphe f dans D. Alors, on peut trouver un autre système holomorphe $\mathfrak{S}^*$ dans D tel que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^*$ soient transversaux l'un à l'autre pourvu que deux dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de D.*

En effet, grâce à *Oka*[4], on peut trouver deux fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ holomorphes dans D qui satisfont à l'équation fonctionnelle de la forme

$$\partial f/\partial x \cdot X(x, y) + \partial f/\partial y \cdot Y(x, y) = 1,$$

puisque, d'après l'hypothèse, il est facile de trouver une solution locale en chaque point de D et que D est un domaine holomorphiquement convexe. Considérons ici un système holomorphe $\mathfrak{S}^*$ défini par l'équation différentielle linéaire

$$X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dans D. Ceci est possible certainement puisque deux fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ ne s'annulent à la fois en aucun point de D. Alors, il est aisé de voir, par un calcul simple, que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^*$ sont transversaux l'un à l'autre.

4. Rétraction et transport. Dans toute la section actuelle, on suppose que D est un domaine d'holomorphie dans l'espace de x et y. Considérons, d'abord, un système holomorphe $\mathfrak{S}$ défini par une seule fonction holomorphe f dans D. Tout élément de $\mathfrak{S}$ sera main-

4) K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs varibales, Iwanami shoten. Tokyo Japan 1961, p. 227.

tenant appelé surface première de f. Soit S_0 une surface première quelconque de f. Une application analytique ζ_0 d'un voisinage convenable V de S_0, contenu dans D, sur S_0 sera appelée *rétraction analytique autour de* S_0 si elle satisfait aux conditions suivantes:

1. Pour toute surface première S de f, la restriction de ζ_0 à $S\cap V$, s'il existe, fait correspondre à $S\cap V$ une partie convenable de S_0 d'une façon biunivoque.
2. La restriction de ζ_0 à S_0 est l'application identique de S_0 sur elle même.

Il est évident que la surface première S_0 de f doit être non singulière s'il y a une rétraction analytique autour de S_0.

On aura, de plus, le

Lemme 1. *Pour toute surface première S_0 de f, on peut former une rétraction analytique ζ_0 autour de S_0 pourvu que deux dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de D.*

En effect, formons un système holomorphe $\mathfrak{S}^*$, transversal à $\mathfrak{S}$, dans D. Soit $\{(g_p, v_p)\}$ une donnée de $\mathfrak{S}^*$ telle que, pour chaque point p de D, deux dérivées partielles $\partial g_p/\partial x$ et $\partial g_p/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de v_p. Prenons un point quelconque q de S_0 et posons

$$z=f-a \qquad \text{et} \qquad w=g_q-b,$$

où a et b sont les valeurs de f et de g_q en q respectivement. Alors, d'après l'hypothèse, ils font correspondre à un voisinage convenable δ_q de q un dicylindre (γ_1, γ_2) de la forme $|z|<\eta_1$ et $|w|<\eta_2$ dans l'espace de z et w d'une façon analytique et biunivoque, où η_1 et η_2 sont des nombres positifs convenables. Désignons par ϕ_q l'application analytique ainsi définie et par π la projection de (γ_1, γ_2) sur γ_2 par laquelle à (z, w) correspond $(0, w)$. Alors, la composition de trois applications $\phi_q^{-1}\pi\cdot\phi_q$ est une application analytique de δ_q dans $\delta_q\cap S_0$ qui satisfait localement aux conditions demandées. Désignons-la par ζ_q. Maintenant, soit V un voisinage de S_0 donné par la somme de tous les voisinages δ_q comme ci-dessus pour tous les points q de S_0

et soit ζ_0 une application analytique de V dans S_0 définie par $\zeta_0=\zeta_q$ dans δ_q. Il est alors aisé de voir qu'elle est bien déterminée et satisfait aux conditions demandées complètement. Le lemme a été donc démontré.

Considérons, ensuite, deux systèmes holomorphes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ définis par des fonctions holomorphes f_1 et f_2 respectivement dans un même domaine D. On désigne par S_a et T_a des surfaces analytiques dans D données par les équations $f_1-a=0$ et $f_2-a=0$ respectivement, où a est une valeur complexe quelconque. Soit E un ensemble relativement compact dans D. Une application analytique et biunivoque $\mathfrak{T}$ de E sur un autre ensemble E' relativement compact dans D sera appelée *transport de* $\mathfrak{S}_1$ *à* $\mathfrak{S}_2$ *en* E si, pour toute valeur complexe a, l'image par $\mathfrak{T}$ de $E\cap S_a$ coïncide justement avec $E'\cap T_a$. Soit $\mathfrak{S}_1$ un système holomorphe défini par une fonction holomorphe f_1 dans D. On suppose ici que deux dérivées partielles $\partial f_1/\partial x$ et $\partial f_1/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de D.

Alors, on aura le

Lemme 2. *A tout ensemble E relativement compact dans D correspondent un voisinage V de E contenu dans D et un nombre positif ε comme ce qui suit. Pour toute fonction holomorphe f_2 dans D telle que l'on ait $|f_1-f_2|<\varepsilon$ dans V, on peut trouver un transport de $\mathfrak{S}_1$ à $\mathfrak{S}_2$ en E, où $\mathfrak{S}_2$ est le système holomorphe défini par f_2 dans D.*

En effet, formons aussi un système holomorphe $\mathfrak{S}^*$, transversal à $\mathfrak{S}_1$, dans D. Soit $\{(g_p, v_p)\}$ une donnée de $\mathfrak{S}^*$ telle que, pour chaque point p de D, deux dérivées partielles $\partial g_p/\partial x$ et $\partial g_p/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de v_p. Comme ce qui précède, prenons, pour chaque point q de $\bar{E}$, un voisinage δ_q de q et un dicylindre (γ_1, γ_2) de la forme $|z|<\eta_1$ et $|w|<\eta_2$ dans l'espace de z et w qui correspondent analytiquement et biunivoquement par l'application ϕ_q donnée par

$$z=f_1-a \qquad \text{et} \qquad w=g_q-b,$$

où a et b sont les valeurs de f_1 et g_q en q respectivement. On désigne par (γ'_1, γ'_2) le dicylindre de la forme $|z|<\eta_1/2$ et $|w|<\eta_2/2$, et désigne par δ'_q l'image inverse de (γ'_1, γ'_2) par ϕ_q. En ce moment, on peut toujours trouver un nombre positif ε_q, de manière que, pour toute fonction holomorphe f dans (γ_1, γ_2) telle que l'on ait $|f-z|<\varepsilon_q$ dans (γ_1, γ_2), l'application donnée par

$$z' = f(z, w) \qquad \text{et} \qquad w' = w$$

soit biunivoque dans (γ'_1, γ'_2). Ceci signifie évidemment que, si une fonction holomorphe f_2 dans D satisfait à l'inégalité $|f_1-f_2|<\varepsilon_q$ dans δ_q, on peut trouver un transport local $\mathfrak{T}_q$ de $\mathfrak{S}_1$ à $\mathfrak{S}_2$ en $\delta'_q \cap E$.

D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut prendre un nombre fini au plus de tels voisinages δ_q de manière que la somme de δ'_q recouvre entièrement $\bar{E}$. Désignons-les, de nouveaux, par δ'_j et δ_j $(j=1, \ldots, n)$ et par ε_j $(j=1, \ldots, n)$ les nombres que l'on détermine comme ci-dessus pour δ'_j. Soit ε le plus petit nombre des ε_j $(j=1, \ldots, n)$ et soit V la somme des δ_j $(j=1, \ldots, n)$. Maintenant, prenons une fonction holomorphe f_2 dans D satisfaisant à l'inégalité $|f_1-f_2|<\varepsilon$ dans V mais d'ailleurs quelconque. Désignons par $\mathfrak{S}_2$ le système holomorphe défini par f_2 et par $\mathfrak{T}_j$ $(j=1, \ldots, n)$ le transport local de $\mathfrak{S}_1$ à $\mathfrak{S}_2$ en $\delta'_j \cap E$ donné comme ci-dessus. Posons $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_j$ dans $\delta'_j \cap E$ $(j=1, \ldots, n)$. Il est alors aisé de voir que l'application $\mathfrak{T}$ est bien déterminée dans tout E et satisfait à la condition demandée complètement. Donc, le lemme a été démontré.

II. Tube normal non singulier.

5. Généralité. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x et y. Toute surface première S de f peut être regardée comme une surface de Riemann d'une variable complexe de la façon habituelle. Comme une surface de Riemann abstraite, elle est nécessairement ouverte, mais il n'y a aucune autre restriction. Une surface première S de f sera dite *parabolique* ou *hyperbolique* suivant qu'elle l'est comme une surface de Riemann. Outre cela, S sera dite *de type* (g, n) si elle est de genre g et si elle a n composantes de frontière, où g et n sont des nombres entiers tels que l'on ait $g \geqq 0$ et $n \geqq 1$, pouvant être l'infini. Lorsque g et n sont tous finis, S sera dite *de type fini*. En particulier, si S est parabolique et de type fini, elle sera dite simplement *algébrique*.

On appelera, dans la suite, *classe* (E) la classe formée de toutes les fonctions entières de deux variables complexes. La classe formée de toutes les fonctions de la classe (E) n'ayant aucune surface première hyperbolique sera appelée *classe* (P) et celle de toutes les fonctions de la classe (P), telle que toute leur surface première soit algébrique, sera appelée *classe* (A). Une fonction de la classe (E), ayant au moins une surface première hyperbolique, est, je crois, très compliquée. Donc, nous nous bornons, dan le mémoire actuel, à étudier des fonctions de la classe (P).

Considérons, par exemple, un polynôme quelconque $P(x', y')$ de x' et y', un automorphisme analytique donné par

$$x' = \Phi(x, y) \qquad \text{et} \qquad y' = \Psi(x, y)$$

dans tout l'espace de x et y et une fonction entière quelconque $F(z)$ d'une variable complexe z. Posons

$$f(x, y) = F[P(\Phi(x, y), \Psi(x, y))]. \tag{2}$$

Alors, par définition, f appartient à la classe (A). Je traitera, plus tard, le problème si l'inverse est aussi vrai ou non.

Nous allons ici définir un ordre entre les types des surfaces premières S de f. On définit $(g, n) \leqq (g', n')$ si et seulement si l'on a $g \leqq g'$ et $g + n \leqq g' + n'$. Une surface première de type (g, n) sera dite quelque fois *de type* (g', n') *au plus*, si l'on a $(g, n) \leqq (g', n')$. Une fonction entière f sera dite *de type* (g, n) si toute sa surface première est de type (g, n) au plus et s'il y a au moins une surface première justement de type (g, n). Lorsque g et n sont tous fini, f sera dite simplement *de type fini*. Toute fonction de la forme (2) est toujours de type fini. De plus, lorsqu'elle est de type (g, n), toutes ses surfaces premières sont aussi de type (g, n) sauf un nombre fini d'elles. Le but du mémoire actuel est de trouver une condition pour qu'une fonction de la classe (P) appartienne à la classe (A) et de voir le fait que toute fonction de la classe (A) est de type fini et que, lorsqu'elle est de type (g, n), presque toute sa surface première est de type (g, n).

6. Surfaces de Riemann paraboliques. Nous allons rappeler, dans la section actuelle, la théorie classique sur les fonctions analytiques d'une variable complexe. Soit R une surface de Riemann ouverte et parabolique. Prenons un point quelconque P de R et fixons-le dans la suite. Soient w une coordonnée locale en P et W un voisinage de coordonnée locale pour w. Soit W_0 un cercle de la forme $|w|<\eta$, où η est un nombre positif plus petit que l'unité. Dénotons ∂W_0 sa circonférence $|w|=\eta$ et R_0 la partie de R donnée par l'exception de W_0 dans R.

Alors, comme on sait bien, on a l'énoncé que

Lorsqu'on donne une fonction réelle et continue $\psi(p)$ sur ∂W_0, on peut toujours former une fonction $h(p)$, continue sur R_0 et harmonique à l'intérieur de R_0, qui coïncide avec ψ sur ∂W_0. Elle est déterminée uniquement quand on y impose la condition que $h(p)$ est bornée sur tout R. Dans ce cas, elle atteint sur ∂W_0 sa plus grande valeur.

Il suit de là que, pour tout nombre entier positif ν, on peut trouver d'une façon unique deux fonctions réelles $h_\nu(p)$ et $k_\nu(p)$, univalentes sur tout R, bornées dans R_0, et harmoniques sur tout R sauf au point P, dans le voisinage duquel W, elles pouvent s'écrire

$$h_\nu(w)=\mathrm{Re}(1/w^\nu)+u(w)$$

et

$$k_\nu(w)=\mathrm{Im}(1/w^\nu)+v(w)$$

respectivement, où $u(w)$ et $v(w)$ sont des fonctions continues, donc nécessairement harmoniques, et s'annulent en P. Elles seront appelées fonctions harmoniques devenant infinies en P seulement comme $\mathrm{Re}(1/w^\nu)$ et $\mathrm{Im}(1/w^\nu)$ respectivement.

Maintenant, on supposera que R est de genre fini g. Alors, à R correspond une surface de Riemann compacte et de genre g, que l'on désigne par $\bar{R}$, telle que l'on puisse regarder R comme une partie de $\bar{R}$ obtenue par l'exception d'un ensemble fermé e de capacité logarithmique nulle. Elle est déterminée uniquement à l'équivalence analytique près. En ce moment, $h_\nu(p)$ et $k_\nu(p)$ peuvent se prolonger harmoniquement en tout point de e. Traçons $2g$ cycles fondamentaux C_j et D_j $(j=1, \ldots, g)$ sur $\bar{R}$ de la façon habituelle. On peut supposer évidemment qu'ils se trouvent dans R_0. Soit $\tau_\nu^1(p)$ une fonction analytique ayant $h_\nu(p)$ comme sa partie réelle et soit $\tau_\nu^2(p)$ celle qui a $k_\nu(p)$ comme sa partie imaginaire. Elles se mettent dans W sous la même forme

$$\frac{1}{w^\nu}+U(w),$$

où $U(w)$ est une fonction holomorphe en P. Suivant les cycles C_j et D_j $(j=1, \ldots, g)$, $\tau_\nu^1(p)$ posséde des périodes $i\cdot c_{\nu j}^1$ et $i\cdot d_{\nu j}^1$, i étant l'unité imaginaire, qui sont toutes purement imaginaires et $\tau_\nu^2(p)$ des périodes $c_{\nu j}^2$ et $d_{\nu j}^2$ qui sont toutes réelles. N'admettant pas d'autres périodes, elle sont toutes deux des intégrales de deuxième espece sur $\bar{R}$.

Posons ici

$$\sigma_\nu(p)=\tau_\nu^2(p)-\tau_\nu^1(p) \qquad (\nu=1, 2, \ldots).$$

Elles sont évidemment intégrales de première espèce sur $\bar{R}$. Leurs périodes correspondant à C_j et à D_j $(j=1, \ldots, g)$ sont, par définition, de la forme

$$\alpha_{\nu j}=c_{\nu j}^2-i\cdot c_{\nu j}^1 \qquad \text{et} \qquad \beta_{\nu j}=d_{\nu j}^2-i\cdot d_{\nu j}^1.$$

Cela posé, on aura l'énoncé que

Pour que les premières g intégrales de première espèce $\sigma_\nu(p)$ $(\nu=1, \ldots, g)$ soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit que P ne soit pas point de Weierstrass de $\bar{R}$.

En effect, s'il y a g nombres complexes $a_1, \ldots, a_g$, n'étant pas tous nuls, tels que l'on ait

$$a_1\cdot\sigma_1(p)+ \ldots +a_g\cdot\sigma_g(p)=\text{constante},$$

la fonction donnée par

$$\varphi=\bar{a}_1(\tau_1^2+\tau_1^1)+\cdots+\bar{a}_g(\tau_g^2+\tau_g^1)$$

est uniforme sur tout $\bar{R}$ puisque toutes ses périodes correspondant à C_j et D_j $(j=1, \ldots, g)$ sont nulles et elle n'a son pôle qu'en P, avec un ordre g au plus. Ceci signifie que P est un point de Weierstrass de $\bar{R}$. Inversement, s'il y a une fonction φ uniforme et méromorphe sur $\bar{R}$ ayant en P son seul pôle d'ordre g au plus, tandis que $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$ sont linéairement indépendantes, on pourra écrire φ sous la forme

$$\varphi=a_0+a_1\sigma_1+\cdots+a_g\sigma_g+b_1(\tau_1^2+\tau_1^1)+\cdots+b_g(\tau_g^2+\tau_g^1),$$

où a_ν $(\nu=0, 1, \ldots, g)$ et b_ν $(\nu=1, \ldots, g)$ sont des nombres complexes convenables. Ceci signifie que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\nu j}, & \overline{\alpha_{\nu j}} \\ \beta_{\nu j}, & \overline{\beta_{\nu j}} \end{pmatrix}$$

est plus petit que $2g$. Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que $\sigma_\nu(p)$ $(\nu=1, \ldots, g)$ sont linéairement indépendantes. Donc, l'énoncé a été démontré.

Il suit de là que si P n'est pas point de Weierstrass de $\bar{R}$, on peut former une fonction uniforme et méromorphe sur R, qui a en P son seul pôle d'ordre $g+1$, de la forme

$$\varphi=a_0+\sum_{\nu=1}^{g} a_\nu(\tau_\nu^2-\tau_\nu^1)+\sum_{\nu=1}^{g+1} b_\nu(\tau_\nu^2+\tau_\nu^1),$$

où a_ν $(\nu=0, 1, \ldots, g)$ et b_ν $(\nu=1, \ldots, g+1)$ sont des nombres complexes convenables. D'après le théorème de *Riemann-Roch*, cette fonction est unique à la multiplication et l'addition d'une constante près.

7. Relation entre deux surfaces de Riemann. Nous considérons, dans la section actuelle, deux surfaces de Riemann ouvertes et paraboliques R^1 et R^2. Supposons que R^l $(l=1, 2)$ contiennent respectivement des parties connexes et relativement compactes Δ^l $(l=1, 2)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. Il y a une application analytique et biunivoque ζ de Δ^1 sur Δ^2.
2. Δ^l $(l=1, 2)$ sont limitées par n courbes simples fermées de Jordan γ_i^l $(l=1, 2;\ i=1, \ldots, n)$ respectivement.

Alors, ζ peut être regardée comme un homéomorphisme de $\bar{\Delta}^1$ sur $\bar{\Delta}^2$. On suppose donc que l'image de γ_i^1 par ζ est γ_i^2 $(i=1, \ldots, n)$.

Prenons un point quelconque P_1 dans Δ^1 et une coordonnée locale w_1 en P_1 sur R^1, et fixons-les dans toute la suite. On suppose que le voisinage W^1 de coordonnée pour w_1 se trouve à l'intérieur de Δ^1. Posons $P_2=\zeta(P_1)$, $W^2=\zeta(W^1)$ et $w_2=w_1\cdot\zeta^{-1}$. Alors, w_2 est aussi une coordonnée locale en P_2 ayant W^2 comme son voisinage de coordonnée locale sur R^2. Ensuite, soient W_λ^l $(l=1, 2;\ \lambda=1, 2)$ deux cercles concentriques de la forme $|w_l|<\eta_\lambda$, où η_λ $(\lambda=1, 2)$ sont des nombres positifs, déterminés plus tard, tels que l'on ait $\eta_1<\eta_2<1$. Dénotons ∂W_λ^l $(l=1, 2;\ \lambda=1, 2)$ les circonférences $|w_l|=\eta_\lambda$. Posons, de plus, $R_0^l=R^l-W_1^l$ et $\Delta_0^l=\Delta^l-W_1^l$ $(l=1, 2)$.

On formera ici une fonction $U(p)$ continue dans $\bar{\Delta}_0^1$ et harmonique dans Δ_0^1, telle que l'on ait $U(p)=0$ sur ∂W_1^1 et $U(p)=1$ sur toutes les γ_i^1 $(i=1, \ldots, n)$. D'après le problème de *Dirichlet*, elle est bien déterminée d'une façon unique. Soit E un ensemble compact contenant ∂W_2^1 mais d'ailleurs quelconque à l'intérieur complet de Δ_0^1 et posons

$$\varepsilon=\operatorname*{Max}_{p\in E} U(p).$$

Comme on sait bien, le nombre ε ne dépend essentiellement que de la grandeur de la frontière de Δ^1. De plus, on peut dire qu'il y a une relation très intime entre R^1 et R^2 si le nombre ε est suffisamment petit.

Maintenant, donnons des fonctions continues réelles quelconques ψ_1 et ψ_2 sur ∂W_1^1 et sur ∂W_1^2 respectivement et formons les fonctions harmoniques et bornées $v^1(p)$ et $v^2(p)$ sur R_0^1 et sur R_0^2 de manière que l'on ait $v^1=\psi_1$ et $v^2=\psi_2$ sur ∂W_1^1 et sur ∂W_1^2 respectivement. Comme on l'a dit dans la section précédente, elles sont aussi déterminées uniquement puisque, par hypothèse, R^1 et R^2 sont toutes paraboliques.

Cela posé, on aura le

Lemme 3. *Si l'on a les inégalités*

$$|\psi_1(p)|<M, \quad |\psi_2(\zeta(p))|<N \quad \textit{et} \quad |\psi_1(p)-\psi_2(\zeta(p))|<a$$

sur ∂W_1^1, *on a toujours l'inégalité*

$$|v^1(p)-v^2(\zeta(p))|<a+\varepsilon(M+N)$$

sur E.

En effect, la fonction $v^*(p)=v^1(p)-v^2(\zeta(p))$ est continue dans Δ_0^1 et harmonique dans l'intérieur de Δ_0^1. De plus, on a les inégalités $|v^*(p)|<a$ sur ∂W_1^1 et $|v^*(p)|<M+N$ sur toutes les γ_i^1 $(i=1, \ldots, n)$. Donc, on a l'inégalité

$$|v^*(p)|<a+(M+N)\cdot U(p)$$

dans tout Δ_0^1. Il s'ensuit immédiatement que l'on a l'inégalité demandée. Le lemme a été donc démontré certainement.

Soient $h_\nu^l(p)$ et $k_\nu^l(p)$ $(l=1, 2)$ les fonctions harmoniques devenant infinies en P_l seulement comme $\mathrm{Re}(1/w_l^\nu)$ et comme $\mathrm{Im}(1/w_l^\nu)$ sur tout R^l respectivement, où ν est un nombre entier positif quelconque.

Alors, on aura le

Théorème 2. *On a toujours les inégalités*

$$|h_\nu^1(p)-h_\nu^2(\zeta(p))|<\varepsilon\cdot K, \quad |k_\nu^1(p)-k_\nu^2(\zeta(p))|<\varepsilon\cdot K$$

sur E, *où* K *est un nombre positif ne dépendant que des rayons* η_1 *et* η_2 *seulement.*

En effect[5], comme on sait bien, la fonction $h_\nu^1(p)$, par exemple, est formée par le procédé alterné que voici. Posons, d'abord, $u_0^1(p)=\mathrm{Re}(1/w_1^\nu)$. Cette fonction prend certaines valeurs sur ∂W_1^1. On forme alors une fonction harmonique $v_1^1(p)$ dans R_0^1 prenant les mêmes valeurs que u_0^1 sur ∂W_1^1. On forme ensuite une fonction harmonique $u_1^1(p)$ dans W_2^1 prenant les mêmes valeurs que $v_1^1-u_0^1$ sur ∂W_2^1. On forme désormais une fonction harmonique $v_2^1(p)$ dans R_0^1 prenant les mêmes valeurs que u_1^1 sur ∂W_1^1 et la fonction $u_2^1(p)$ dans W_2^1 prenant les mêmes valeurs que v_2^1 sur ∂W_2^1 et l'on continue ainsi indéfiniment.

5) Voir, à titre d'indication, Picard, Traité d'analyse, Tome II pp. 518–523.

Nous avons donc deux suites de fonctions harmoniques

$$u_0^1, u_1^1, u_2^1, \dots \qquad \text{et} \qquad v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots .$$

En ce moment, si l'on choisit les nombres η_1 et η_2 de manière que l'on ait l'inégalité

$$\eta_0 = \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_2-\eta_1)^2} < 1.$$

on peut facilement voir que deux séries

$$u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + \cdots \qquad \text{et} \qquad v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 + \cdots$$

tendent uniformément vers la fonction $h_\nu^1(p)$ dans W_2^1 et dans R_0^1 respectivement.

Or, formons les fonctions $u_m^2(p)$ $(m=0, 1, 2, \dots)$ dans W_2^2 et $v_m^2(p)$ $(m=1, 2, 3, \dots)$ dans R_0^2 de la même manière que pour les fonctions $u_m^1(p)$ et $v_m^1(p)$ respectivement. Alors, d'après le lemme 3, on a l'inégalité

$$|v_m^1(p) - v_m^2(\zeta(p))| < 4\varepsilon m \cdot \eta_0^{m-1}/\eta_1 \qquad (m=1, 2, \dots)$$

sur E. Il suit de là que l'on a l'inégalité

$$|h_\nu^1(p) - h_\nu^2(\zeta(p))| < 4\varepsilon/\eta_1(1-\eta_0)^2$$

sur E. Il en est de même pour $k_\nu^1(p)$ et $k_\nu^2(p)$. Donc le théorème a été certainement démontré.

Maintenant, supposons en outre que R^l $(l=1, 2)$ sont toutes de genre fini g. Soient $\bar{R}^l$ $(l=1, 2)$ les surfaces de Riemann, compactes et de genre g, qui contiennent R^l respectivement. Supposons, de plus, que l'on peut décrire leurs $2g$ cycles fondamentaux C_j^l et D_j^l $(l=1, 2;$ $j=1, \dots, g)$ à l'intérieur de Δ_0^l. Alors, on peut supposer que C_j^2, et D_j^2 $(j=1, \dots, g)$ coïncident avec les images de C_j^1 et D_j^1 par ζ. Ici, on prend E de façon que E contienne tous les cycles C_j^1 et D_j^1 $(j=1,$ $\dots, g)$. Formons, comme ce qui précède, les intégrales de deuxième espèce $\tau_\nu^{1\,l}(p)$ et $\tau_\nu^{2\,l}(p)$ $(l=1, 2;)$ sur $\bar{R}^l$ ayant $h_\nu^l(p)$ et $k_\nu^l(p)$ comme partie réelle et partie imaginaire respectivement, ν étant un nombre entire quelconque. Dénotons $i\cdot c_{\nu j}^{1l}$, $i\cdot d_{\nu j}^{1l}$ et $c_{\nu j}^{2l}$, $d_{\nu j}^{2l}$ $(l=1, 2; j=1,\dots, g)$ les périodes de τ_ν^{1l} et de τ_ν^{2l} correspondant à C_j^l et à D_j^l respectivement.

Alors, on aura le

Corollaire 1. *On a les inégalités*

$$|c_{\nu j}^{\mu 1}-c_{\nu j}^{\mu 2}|<\varepsilon\cdot K', \quad |d_{\nu j}^{\mu 1}-d_{\nu j}^{\mu 1}|<\varepsilon\cdot K'$$
$$(\mu=1, 2;\ j=1, \dots, g)$$

où K' est un nombre positif ne dépendant que des C_j^1 et D_j $(j=1, \dots, g)$ et K.

D'après le théorème 2, ceci sera facilement démontré.

Ensuite, supponsons que P_1 n'est pas point de Weierstrass de $\bar{R}^1$ et posons

$$\sigma_\nu^l(p)=\tau_\nu^{2l}(p)-\tau_\nu^{1l}(p) \qquad (l=1, 2;\ \nu=1, \dots, g)$$

et

$$\alpha_{\nu j}^l=c_{\nu j}^{2l}-i\cdot c_{\nu j}^{1l}, \quad \beta_{\nu j}^l=d_{\nu j}^{2l}-i\cdot d_{\nu j}^{1l} \qquad (l=1, 2;\ \nu=1, \dots, g).$$

Alors, d'après l'énoncé dans la section précédente, les premières g intégrales de premières espèce $\sigma_\nu^1(p)$ $(\nu=1, \dots, g)$ sont linéairement indépendantes. Par suite, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{\nu j}^1, & \bar{\alpha}_{\nu j}^1 \\ \beta_{\nu j}^1, & \bar{\beta}_{\nu j}^1 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Donc, d'après le corollaire 1, on a facilement le

Corollaire 2. *Si ε est suffisamment petit, P_2 n'est pas encore point de Weierstrass de R_2.*

Enfin, formons une fonction uniforme et méromorphe de la forme

$$\varphi^l=a_0^l+\sum_{\nu=1}^{g}a_\nu^l(\tau_\nu^{2l}-\tau_\nu^{1l})+\sum_{\nu=1}^{g+1}b_\nu^l(\tau_\nu^{2l}+\tau_\nu^{1l})$$

sur chaque $\bar{R}^l$ $(l=1, 2)$, où a_ν^l $(\nu=0, 1, \ldots, g)$ et b_ν^l $(\nu=1, \ldots, g+1)$ sont des nombres complexes convenables. Elles sont déterminées uniquement quand on y impose les conditions que, par exemple, on a

$$\varphi^l(q_0^l)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi^l(q_1^l)=1$$

où q_0^1 et q_1^1 sont deux points convenables dans E et $q_\mu^2=\zeta(q_\mu^1)$ $(\mu=0.1)$.

On aura alors le

Corollaire 3. *On a l'inégalité*

$$|\varphi^1(p)-\varphi^2(\zeta(p))|<\varepsilon\cdot K''$$

dans E, où K'' est un nombre positif ne dépendant que des q_0^1, q_1^1, K et K'.

Ceci sera aussi facilement démontré.

8. Tube normal non singulier. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x et y. On traitera, dans la suite, une surface première de f comme une surface de Riemann. Considérons comme d'habitude un tube normal Σ_Γ autour d'une surface première S_0 de f, avec une valeur a_0 et d'ordre un. Mais, dans le cas actuel, on prend, comme L, une surface analytique non singulière passant par un point régulier P_0 de S_0 transversalement, que l'on déterminera plus tard, au lieu d'une droite analytique. Γ est aussi une partie de L donnée par l'inégalité $|f-a_0|<\rho$, où ρ est un nombre positif suffisamment petit pour satisfaire aux conditions indiquées dans le mémoire I[6], et Σ_Γ est un ensemble de tous les points qui se trouvent sur quelqu'une des surfaces premières passant par Γ. Γ^* signifie le cercle $|z-a_0|<\rho$ sur le plan de z. Ici, supposons que toute surface première S_z de f dans Σ_Γ est non singulière, parabolique et de même genre fini g. On désigne par $\bar{S}_z$ une surface de Riemann compact et de genre g, qui contient S_z. En général, Q^r signifiera, dans toute la suite, une hypersphère de la forme $|x|^2+|y|^2<r^2$.

Formons, d'abord, un système holomorphe $\mathfrak{S}^*$ transversal à celui défini par f dans Σ_Γ. Ceci est possible certainement puisque

6) loc. cit., p. 71.

Σ_Γ est un domaine d'holomorphie et que, par hypothèse, deux dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne s'annulent à la fois en aucun point de Σ_Γ. Au moyen de $\mathfrak{S}^*$, on peut trouver une rétraction analytique ζ_0 autour de S_0 définie dans un voisinage V_0 de S_0. On suppose ici que L coïncide avec $\zeta_0^{-1}(P_0)$. Ceci est possible certainement en diminuant, si nécessaire, ρ suffisamment.

Eécrivons, ensuite, $2g$ cycles fondamentaux C_j^0 et D_j^0 $(j=1, \dots, g)$ de $\bar{S}_0$, dans S_0, ne passant pas par P_0, mais d'ailleurs de la façon habituelle et décrivons une hypersphère Q^{r_0} tellement que tous les cycles C_j^0 et D_j^0 $(j=1, \dots, g)$ soient contenus dans la composante connexe $S_0^{r_0}$ de $S_0 \cap Q^{r_0}$ contenant P_0. Maintenant, considérons un tube normal Σ_{Γ_0} autour de la même S_0 tel que, pour toute surface première S_z dans Σ_{Γ_0}, $\zeta_0(S_z \cap V_0)$ contienne $S_0^{r_0}$. Ceci est toujours possible pourvu que le nombre positif ρ_0, avec lequel Γ_0 est donné par $|f-a_0|<\rho_0$ sur L, soit pris suffisamment petit. Alors, pour chaque S_z dans Σ_{Γ_0}, on peut prendre $2g$ cycles fondamentaux C_j^z et D_j^z $(j=1, \dots, g)$ de manière que l'on ait $\zeta_0(C_j^z)=C_j^0$ et $\zeta_0(D_j^z)=D_j^0$.

Prenons, enfin, une coordonnée locale w_0 en P_0 sur S_0 et un voisinage W^0 de coordonnée locale pour w_0, supposé assez petit pour que W^0 ne contienne aucun point de C_j^0 ni de D_j^0 $(j=1, \dots, g)$. Posons $w(x, y)=w_0\cdot\zeta_0$ et $W=\zeta_0^{-1}(W_0)\cap\Sigma_{\Gamma_0}$. Alors $w(x, y)$ est une fonction holomorphe dans W. De plus, on peut faire correspondre à W le dicylindre W^* de la forme $|w|<1$ et $|z-a_0|<\rho_0$ dans l'espace de w et z par la transformation

$$z=f(x, y) \qquad \text{et} \qquad w=w(x, y)$$

d'une façon analytique et biunivoque. Par suite, en posant $P_z=S_z\cap\Gamma_0$ et $W^z=W\cap S_z$, la restriction w_z de $w(x, y)$ à S_z est une coordonnée locale en P_z ayant W^z comme son voisinage de coordonnée locale sur S_z. On désigne, pour chaque S_z dans Σ_{Γ_0}, par W_1^z le cercle $|w_z|<\eta$, $(0<\eta<1)$, par ∂W_1^z la circonférence $|w_z|=\eta$ et par E_z la partie de $\zeta_0^{-1}(S_0^{r_0})\cap S_z$ obtenue par l'exception de W_1^z.

Formons, sur chaque surface première S_z de f avec la valeur z dans Σ_{Γ_0} et pour chaque nombre entier positif ν, les fonctions harmoniques $h_\nu(p, z)$ et $k_\nu(p, z)$, sur $\bar{S}_z$, devenant infinies seulement en P_z

comme $\mathrm{Re}(1/w_z^\nu)$ et comme $\mathrm{Im}(1/w_z^\nu)$ respectivement et posons

$$H_\nu(x, y) = h_\nu(p, z) \quad \text{et} \quad K_\nu(x, y) = k_\nu(p, z)$$

sur chaque S_z dans Σ_{Γ_0}.

Alors, on aura d'abord le

Théorème 3. *Les fonctions $H_\nu(x, y)$ et $K_\nu(x, y)$ sont continues dans tout Σ_{Γ_0} sauf sur Γ_0, en lequel elles deviennent infinies comme*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(w(x, y))^\nu}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(w(x, y))^\nu}\right)$$

respectivement.

En effect, considérons une surface première quelconque S_{z_1} de f avec une valeur z_1 dans Σ_{Γ_0}, et décrivons une hypersphère Q^r ($r_0 < r$). Soit $S_{z_1}^r$ la composante connexe de $S_{z_1} \cap Q^r$ contenant P_{z_1} et soit $\gamma_{z_1}^r$ la frontière de $S_{z_1}^r$. On suppose ici que $\gamma_{z_1}^r$ consiste en un nombre fini de courbes simples fermées. Ceci est possible en variant r, si nécessaire, en peu. Formons, ensuite, une fonction $U_{z_1}^r(p)$ harmonique dans $S_{z_1}^r - W_1^{z_1}$ telle que l'on ait $U_{z_1}^r(p) = 0$ sur $\partial W_1^{z_1}$ et $U_{z_1}^r(p) = 1$ sur $\gamma_{z_1}^r$, et posons

$$\varepsilon_r = \operatorname*{Max}_{p \in E z_1} U_{z_1}^r(p).$$

Alors, d'après l'hypothèse, on peut dire que, pour tout nombre positif ε_0, on peut avoir un nombre positif r^* tel que l'on ait $\varepsilon_r < \varepsilon_0$ pour $r^* < r$. D'autre part, avec le système holomorphe $\mathfrak{S}^*$, on peut former une rétraction analytique ζ_1 autour de S_{z_1} définie dans un voisinage V_1 de S_{z_1}. Par suite, on peut prendre un tube normal Σ_{Γ_1} autour de S_{z_1} de manière que, pour toute surface première S_z dans Σ_{Γ_1}, $\zeta_1(S_z \cap V_1)$ contienne $S_{z_1}^r$. Alors, en désignant par ψ_z l'application inverse de la restriction de ζ_1 à $S_z \cap V_1$, on a, d'après le théorème 2, les inégalités

$$|h_\nu(p, z_1) - h_\nu(\psi_z(p), z)| < \varepsilon_0 \cdot K$$

et

$$|k_\nu(p, z_1) - k_\nu(\psi_z(p), z)| < \varepsilon_0 \cdot K$$

sur E_{z_1} pour toute S_z dans Σ_{Γ_1}, où K ne dépend que de S_{z_1} seulement. Ceci signifie évidemment que $H_\nu(x, y)$ et $K_\nu(x, y)$ sont continues en tout point de S_{z_1} sauf P_{z_1}. Donc le lemme a été démontré.

Considérons les fonctions dans W^* définies par les intégrales

$$T_\nu^1(w, z)=\int\left\{\frac{\partial h_\nu(w, z)}{\partial w_1}-i\cdot\frac{\partial h_\nu(w, z)}{\partial w_2}\right\}(dw_1+i\cdot dw_2)$$

et

$$T_\nu^2(w, z)=\int\left\{\frac{\partial k_\nu(w, z)}{\partial w_2}+i\cdot\frac{\partial k_\nu(w, z)}{\partial w_1}\right\}(dw_1+i\cdot dw_2)$$

où $w=w_1+i\cdot w_2$ et $i=\sqrt{-1}$. On voit facilement qu'elles sont toutes les deux de la forme

$$\frac{1}{w^\nu}+F(w, z),$$

où $F(w, z)$ est une fonction continue par rapport à deux variables complexes w et z et, pour tout z fixé dans le cercle Γ_0^*: $|z-a_0|<\rho_0$, holomorphe par rapport à w. On suppose ici que l'on a $F(0, z)\equiv 0$ pour toutes les deux.

Les restrictions des fonctions T_ν^1 et T_ν^2 à chaque S_z dans Σ_{Γ_0} peuvent être prolongées analytiquement sans restriction sur S_z puisqu'elles sont intégrales de deuxième espèce sur $\bar{S}_z$ ayant $h_\nu(p, z)$ et $k_\nu(p, z)$ comme leux partie réelle et partie imaginaire respectivement. Par suite, apprès avoir effectué le prolongement d'autant que possible, on aura des fonctions définies sur un certain domaine $\tilde{\Sigma}_{\Gamma_0}$ multivalent étalé au-dessus de Σ_{Γ_0} sans point critique intérieur. On les désigne par les mêmes lettres $T_\nu^1(p, z)$ et $T_\nu^2(p, z)$. Évidemment, elles sont aussi continues par rapport à p et z dans $\tilde{\Sigma}_{\Gamma_0}$. Désignons par $i\cdot c_{\nu j}^1(z)$, $i\cdot d_{\nu j}^1(z)$ et $c_{\nu j}^2(z)$, $d_{\nu j}^2(z)$ $(j=1, \dots, g)$ les périodes de T_ν^1 et de T_ν^2 correspondant à C_j^z et à D_j^z $(j=1, \dots, g)$ respectivement. Elles sont bien déterminées dans Γ_0^* d'une façon univalente. De plus en raisonnant comme ce qui précède, on a le

Corollaire 1. *Les fonctions* $i\cdot c_{\nu j}^1(z)$, $i\cdot d_{\nu j}^1(z)$, $c_{\nu j}^2(z)$ *et* $d_{\nu j}^2(z)$ *sont toutes continues dans* Γ_0^*.

Posons, ensuite,

$$\alpha_{\nu j}(z)=c^2_{\nu j}(z)-i\cdot c^1_{\nu j}(z) \qquad \text{et} \qquad \beta_{\nu j}(z)=d^2_{\nu j}(z)-i\cdot d^1_{\nu j}(z)$$
$$(j=1, \ldots, g)$$

Alors, $\alpha_{\nu j}(z)$ et $\beta_{\nu j}(z)$ $(j=1, \ldots, g)$ sont aussi continues dans Γ_0^*. Donc, lorsqu'on prend P_0 tellement qu'il ne soit pas point de Weierstrass de $\bar{S}_0$, on a l'inégalité

$$\begin{vmatrix} \alpha_{\nu j}(z), & \overline{\alpha_{\nu j}(z)} \\ \beta_{\nu j}(z), & \overline{\beta_{\nu j}(z)} \end{vmatrix} \neq 0$$

dans le cercle Γ_0^*, en diminuant, si nécessaire, le rayon ρ_0 de Γ_0^* suffisamment. Il suit de là que l'on a le

Corollaire 2. *Si P_0 n'est pas point de Weierstrass de $\bar{S}_0$, aucun point P_z de Γ_0 ne l'est encore de $\bar{S}_z$ pourvu que ρ_0 soit suffisamment petit.*

En fin, prenons deux points différents q_0^1 et q_0^2 sur S_0, de mamière qu'il y a une fonction uniforme et méromorphe φ_0 sur S_0, ayant en P_0 son seul pôle d'ordre $g+1$, telle que l'on ait $\varphi_0(q_0^1)=0$ et $\varphi_0(q_0^2)=1$, posons $L_\mu=\zeta_0^{-1}(q_0^\mu)\cap\Sigma_{\Gamma_0}$ $(\mu=1, 2)$ et $q_z^\mu=L_\mu\cap S_z$ $(\mu=1, 2)$ et considérons une fonction de la forme

$$\varphi(p, z)=a_0(z)+\sum_{\nu=1}^{g} a_\nu(z)\cdot(T_\nu^2(p, z)-T_\nu^1(p, z))$$
$$+\sum_{\nu=1}^{g+1} b_\nu(z)\cdot(T_\nu^2(p, z)+T_\nu^1(p, z)).$$

où les coefficients $a_\nu(z)$ $(\nu=0, 1, \ldots, g)$ et $b_\nu(z)$ $(\nu=1, \ldots, g+1)$ sont des fonctions continues dans Γ_0^* satisfaisant aux équations linéaires homogènes simultanées

$$\sum_{\nu=1}^{g} \alpha_{\nu j}(z)\cdot a_\nu(z)+\sum_{\nu=1}^{g+1}\overline{\alpha_{\nu j}(z)}\cdot b_\nu(z)=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{g} \beta_{\nu j}(z)\cdot a_\nu(z)+\sum_{\nu=1}^{g+1}\overline{\beta_{\nu j}(z)}\cdot b_\nu(z)=0 \qquad (j=1, \ldots, g).$$

Ceci est possible certainement sous les mêmes hypothèse que dans ce qui précède. De plus, elle est déterminée uniquement quand on y impose les conditions que l'on a

$$\varphi(q_z^1, z)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(q_z^2, z)=1,$$

en diminuant, si nécessaire, le rayon ρ_0 de Γ_0^* plus suffisamment. Cela posé, on peut facilement voir que la fonction $\varphi(p, z)$ est uniforme dans Σ_{Γ_0} et continue par rapport à x et y dans Σ_{Γ_0} sauf sur Γ_0. Il suit de là que l'on a

Corollaire 3. *Sous les configulations comme ce qui précède, prenons, pour chaque surface première S_z dans Σ_{Γ_0}, une fonction uniforme et méromorphe $\varphi_z(p)$ sur $\bar{S}_z$ ayant en P_z son seul pôle d'ordre $g+1$, telle que l'on ait $\varphi_z(q_z^1)=0$ et $\varphi_z(q_z^2)=1$, et posons*

$$\varphi(x, y)=\varphi_z(p)$$

sur S_z. Alors, la fonction $\varphi(x, y)$ est bien déterminée et continue dans tout Σ_{Γ_0} sauf sur Γ_0.

Dans le cas où f soit un polynôme, la fonction $\varphi(x, y)$ est, comme on sait bien, méromorphe dans Σ_{Γ_0} par rapport aux x et y. Nous verrons plus tard le fait qu'il en est ainsi pour le cas où f soit fonction entière quelconque.

III. Revêtement d'un tube normal

9. Revêtement de type (g, n) d'une surface entière. Soit S une surface entière dans l'espace de x et y. On suppose qu'elle est irréductible et non singulière. On prend, d'abord, un point P_0 de S et le fixe dans la suite comme l'origine de S. On prend, ensuite, deux hypersphères Q^{r_λ} $(\lambda=0, 1)$, où $r_\lambda\,(r_0<r_1)$ sont des nombres positifs convenables et, de plus, r_1 peut être l'infini. Dénotons S^λ $(\lambda=0, 1)$ les composantes connexes de $S\cap Q^{r_\lambda}$ contenant P_0 respectivement. Maintenant, on suppose que S^0 est de type (g, n). Il est évidemment fini. Désignons par γ_i $(i=1, \dots, n)$ les courbes fermées qui limitent

S^0 dans S^1. On suppose qu'elles sont toutes simples. Cela posé, nous allons former un revêtement de S^1 qui est aussi de type (g, n).

Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les paires (p, l) d'un point quelconque p de S^1 et d'une courbe quelconque l joignant P_0 à p sur S^1. Définissons dans $\mathscr{E}$ une relation d'équivalence comme ce qui suit. Deux paires (p, l) et (p', l') seront dites équivalentes si et seulement si l'on a $p=p'$ et la courbe fermée donnée par le produit $l^{-1}\cdot l'$ peut être ramenée à une courbe située dans S^0, continûment dans S^1 sans faire varier les extrémités. Cette relation satisfait évidemment aux conditions d'équivalence. Par suite, on a l'ensemble $\mathscr{E}^0$ de toutes les classes par rapport à cette relation d'équivalence dans $\mathscr{E}$, et un revêtement de S^1 en introduissant à $\mathscr{E}^0$ une topologie de la façon habituelle. On le désignera par $\tilde{S}^1$; lorsque r_1 est l'infini, on le désignera simplement par $\tilde{S}$. Il est alors aisé de voir que $\tilde{S}^1$ contient une partie équivalente à S^0, qui consiste en toutes les classes qui contiennent une paire (p, l) telle que l'on ait $p\in S^0$ et $l\subset S^0$. On la désigne par la même lettre S^0 et aussi par les mêmes lettres $\gamma_i\,(i=1, \dots, n)$ les courbes simples fermées qui limitent S^0 dans $\tilde{S}^1$ d'autant qu'il n'y ait aucune ambiguïté. D'après la définition, $\tilde{S}^1$ coïncide avec S^1 si et seulement si S^1 est de type (g, n).

Nous allons ici indiquer le fait que

$\tilde{S}^1$ *est de type* (g, n).

En effet, lorsqu'on a $g=0$ et $n=1$, ceci est certainement vrai puisque, dans ce cas, $\tilde{S}^1$ est, par définition, le revêtement universel de S^1. Supposons donc que l'on a $g=0$ et $n\geqq 2$ ou bien $g\geqq 1$. On peut partager $\tilde{S}^1$ en deux parties par chaque courbe $\gamma_i\,(i=1, \dots, n)$; l'une contient S^0 et l'autre ne la contient pas. Car, sinon par exemple pour γ_{i_0}, on pourrait trouver une autre courbe simple fermée l^0 dans $\tilde{S}^1$ qui rencontre γ_{i_0} une et une seule fois. D'autre part, par définition, on peut ramener l^0 continûment à une courbe dans S^0. Ceci est l'absurde puisque le nombre d'intersection de l^0 et γ_{i_0} ne serait pas nul. Soient Δ_i $(i=1, \dots, n)$ les parties de $\tilde{S}^1$ séparées par γ_i qui ne contiennent pas S^0. Alors, on peut dire que chacune d'elles est homéomorphe à un domaine annulaire de la forme $a<|u|<b$ sur le plan de u. Car,

elle ne peut être jamais simplement connexe puisque chaque courbe γ_i $(i=1, \dots, n)$ ne peut être contractile sur S^1. De plus, toute courbe simple fermée décrite dans Δ_i peut être aussi ramenée continûment à une courbe dans S^0. Ceci signifie que le groupe fondamental de Δ_i est engendré par la seule classe d'homotopie de γ_i. Donc l'énoncé a été certainement démontré.

On appelera $\tilde{S}^1$ *revêtement de type* (g, n) *de* S^1 *par rapport à* S^0. Considérons, ensuite, les composantes connexes S^μ $(\mu=1, 2)$ de $S \cap Q^{r_\mu}$ contenant P_0, où r_1 et r_2 sont des nombres positifs tels que l'on ait $r_0 < r_1 < r_2$, et considérons leur revêtements $\tilde{S}^1$ et $\tilde{S}^2$ de type (g, n) par rapport à S^0 respectivement.

Alors, on a l'énoncé que

On peut regarder naturellement $\tilde{S}^1$ *comme une partie de* $\tilde{S}^2$.

En effet, toute paire (p, l) représentant un point de $\tilde{S}^1$ représente aussi un point de $\tilde{S}^2$ puisque p et l se trouvent sur S^2. Lorsque deux paires (p, l) et (p', l') représentent un même point de $\tilde{S}^2$, elles représentent évidemment aussi un même point de $\tilde{S}^1$. Inversement, supposont, pour réduire à l'absurde, que deux paires (p, l) et (p', l') qui représentent deux points différents de $\tilde{S}^1$ représentent un même point de $\tilde{S}^2$. Alors, d'après la définition, il y a une courbe fermée l_0 décrite dans S^0 telle que le produit $l^{-1} \cdot l' \cdot l_0$ soit contractile dans $|S^2$. Ceci est l'absurde puisque, comme on l'a vu dans la section 1 du mémoire III[7], toute courbe fermée décrite dans S^1 qui n'est pas contractile dans S^1 ne peut être jamais contractile dans S^2. Donc l'énoncé a été certainement démontré.

Comme on peut le voir facilement, $\tilde{S}^1$ ne peut être jamais parabolique pourvu que r_1 soit fini. D'autre part, si S est parabolique et de type $(0, 2)$, $\tilde{S}$ est toujours parabolique quel que soit de type de S^0. Mais, hors le cas de type $(0, 2)$, on aura le

Théorème 4. $\tilde{S}$ *devient parabolique si et seulement si* S *est parabolique et de type* (g, n). *S'il en est ainsi,* $\tilde{S}$ *coïncide avec* S.

7) loc. cit., p. 246.

En effet, considérons le revêtement universel $\tilde{\tilde{S}}$ de S. Il est, en même temps, aussi celui de $\tilde{S}$. Faisons correspondre à $\tilde{\tilde{S}}$ conformement et biunivoquement au sens de Riemann un cercle unité $\mathfrak{C}$ sur le plan d'une variable complexe t. Désignons la transformation par

$$t=\lambda(p).$$

Maintenant, on coupe S le long d'une courbe de Jordan qui rend S simplement connexe. Alors, on peut partager $\mathfrak{C}$ en une infinité dénonbrable au plus de parties δ_i $(i=1, 2, \dots)$, chacune desquelles correspond par λ biunivoquement à la surface S coupée comme ci-dessus. Comme on sait bien, les aires non euclidiennes de ces δ_i sont toutes égales l'une à l'autre et elles sont finies si et seulement si S est de type fini et parabolique. D'autre part, considérons un partage pareil $\tilde{\delta}_j$ $(j=1, 2, \dots)$ de $\mathfrak{C}$ par rapport à $\tilde{S}$. Pour ceci, on peut prendre $\tilde{\delta}_j$ de manière à être une réunion de quelquesunes des δ_i, puisque $\tilde{S}$ est un revêtement de S. De plus, si $\tilde{S}$ ne coïncide pas avec S, ladite réunion doit être en nombre infini. Donc, l'aire de $\tilde{\delta}_j$ ne peut être jamais finie d'autant que l'on ait $\tilde{S}\neq S$. Donc $\tilde{S}$ est parabolique seulement si l'on a $\tilde{S}=S$. Le théorème a été démontré certainement.

10. Revêtement de type (g, n) d'un tube normal. Il s'agit maintenant du revêtement de type (g, n) d'un tube normal. Soit f une fonction entière de x et y, et soit S_0 une surface première de f avec une valeur a_0. On suppose que S_0 est d'ordre un et non singulière. Soit P_0 un point quelconque de S_0 qui sera fixé dans la suite comme l'origine de S_0. Décrivons, d'abord, une hypersphère Q^{r_0} et dénotons S_0^0 la composante connexe de $S_0 \cap Q^{r_0}$ contenant P_0. On suppose ici que S_0^0 est de type (g, n) et que n courbes fermées γ_i^0 $(i=1, \dots, n)$ qui limitent S_0^0 dans S_0 sont toutes simples. Ensuite, en prenant une hypersphère $Q^{r'}$ $(r_0<r')$ et en désignant par S_0' la composante connexe de $S_0 \cap Q^{r'}$ contenant P_0, on peut former une rétraction analytique ζ_0 autour de S_0' définie dans un voisinage V de S_0', et on peut prendre un tube normal Σ_Γ autour de S_0 tellement que, pour toute surface première S_z de f dans Σ_Γ, on ait $\zeta_0(S_z \cap V) \supset S_0^0$. On peut supposer que Γ est la partie de la surface analytique $L=\zeta_0^{-1}(P_0)$ donnée par

l'inégalité $|f-a_0|<\rho$. Γ^* signifie le cercle $|z-a_0|<\rho$ sur le plan de z. Posons $\Sigma_\Gamma^0=\zeta_0^{-1}(S_0^0)\cap\Sigma_\Gamma$ et, pour chaque surface première S_z dans Σ_Γ, $S_z^0=\zeta_0^{-1}(S_0^0)\cap S_z$, $\mathrm{P}_z=\zeta_0^{-1}(P_0)\cap S_z$ et $\gamma_i^z=\zeta_0^{-1}(\gamma_i^0)\cap S_z(i=1, \dots, n)$. Alors, S_z^0 est évidemment de type (g, n) et limitée par n courbes simples fermées γ_i^z $(i=1, \dots, n)$ dans S_z.

Ensuite, décrivons une autre hypersphère Q^r $(r_0<r)$ tel que Q^r contienne Σ_Γ^0. Pour chaque surface première S_z de f dans Σ_Γ, soit S_z^r la composante connexe de $S_z\cap Q^r$ contenant P_z et soit Σ_Γ^r la réunion de toutes ces parties S_z^r pour $z\in\Gamma^*$. En ce moment, il n'y a qu'un nombre fini au plus de S_z^r qui ont au moins un point singulier sur $\bar{S}_z^r$. Désignons-les, à nouveau, par S_j^r $(j=1, \dots, m)$ et désignons par D^r le domaine obtenu à parti de Σ_Γ^r par l'exception de toutes ces surfaces exceptionnelles S_j^r $(j=1, \dots, m)$. Posons $D_0^r=D^r\cap\Sigma_\Gamma^0$, $\Gamma_r=\Gamma\cap D^r$ et $\Gamma_r^*=\Gamma^*-\{\cup a_j\}$, où a_j $(j=1, \dots, m)$ sont les valeurs de f en S_j^z.

Maintenant, formons, pour chaque S_z^r dans D^r, le revêtement $\tilde{S}_z^r$ de type (g, n) par rapport à S_z^0 comme on l'a fait dans la section précédente. Tout point de $\tilde{S}_z^r$ est représenté par la paire (p^z, l^z) d'un point p^z de S_z^r et d'une courbe l^z joignant P_z à p^z sur S_z^r. Soit $\mathscr{E}^*$ l'ensembre de tous les points qui appartiennent à quelqu'une de ces revêtements $\tilde{S}_z^r$. Alors, en formant, pour chaque S_z^r dans D^r, une rétraction analytique ζ_z autour de S_z^r, on peut définir dans $\mathscr{E}^*$ une topologie comme on l'a fait dans la section 2 du mémoire III[8]. D'où, on a un domaine multivalent sans point critique intérieur étalé au-dessus de D^r, dans lequel $\tilde{S}_z^r$ est une surface analytique non singulière de type (g, n). On l'appellera *revêtement de type* (g, n) *de* D^r *par rapport à* D_0^r, et le désignera par $\tilde{D}^r$. Comme on l'a vu dans la section précédente, $\tilde{S}_z^r$ contient S_z^0. Par suite, $\tilde{D}^r$ contient aussi une partie équivalente à D_0^r consistnant en toutes ces S_z^0. On le désignera aussi par la même lettre D_0^r. Donc, $\tilde{D}^r$ contient Γ_r et P_z $(z\in\Gamma_r^*)$ etc. naturellement. De plus, si l'on a $r_0<r_1<r_2$, $\tilde{S}_z^{r_2}$ contient $\tilde{S}_z^{r_1}$. Par suite, lorsqu'on forme $\tilde{D}^{r_1}$ et $\tilde{D}^{r_2}$ comme ce qui précède, on peut regarder naturellement $\tilde{D}^{r_1}$ comme une partie de $\tilde{D}^{r_2}$ sauf au-dessus des surfaces exceptionnelles pour D^{r_2}.

8) loc. cit., p. 249.

D'après le même raisonnement que celui fait dans la section 2 du mémoire III[9], on a l'énoncé que

Le revêtement $\tilde{D}^r$ de type (g, n) de D^r par rapport à D^r_0 est une variété de Stein.

D'où, grâce à *Oka*[10], on peut former, sur $\tilde{D}^r$, une fonction plurisousharmonique $\Theta(p)$ continue telle que, pour tout nombre réel α, la partie donnée par l'inégalité $\Theta<\alpha$ dans $\tilde{D}^r$ se trouve à l'intérieur complet de $\tilde{D}^r$. Désignons par $s^{r\alpha}_z$ la composante irréductible de la partie de $\tilde{S}^r_z$, donnée par $\Theta<\alpha$, contenant P_z, si elle existe et par $\tilde{D}^r_\alpha$ la réunion de toutes ces partie $s^{r\alpha}_z$. Cela posé, on peut dire que

Pour tout $\tilde{S}^r_z$ dans $\tilde{D}^r$, $s^{r\alpha}_z$ est de type (g, n) pourvu que α surpasse un nombre positif convenable α_z qui dépend de z.

En effet, comme on sait bien, toute fonction holomorphe g sur $s^{r\alpha}_z$ peut s'approcher uniformément d'une fonction holomorphe sur $\tilde{S}_z$ à l'intérieur complet de $s^{r\alpha}_z$ puisque $\tilde{D}^\alpha_r$ est holomorphiquement convexe par rapport à $\tilde{D}^r$ et que $s^{r\alpha}_z$ est non singulière. Ceci signifie que $s^{r\alpha}_z$ est de type (g, n) si $s^{r\alpha}_z$ contient S^0_z, puisque $\tilde{S}^r_z$ est de type (g, n). Donc, l'énoncé a été démontré.

11. Passage au domaine algébrique. On concervera, dans la section actuelle, les configulations et notations données dans la section précédente. Décrivons dans Γ^* m cercles fermés d_j $(j=1, \dots, m)$ de la forme $|z-a_j|<\varepsilon_j$ ne contenant pas a_0, où ε_j $(j=1, \dots, m)$ sont des nombres positifs suffisamment petits pour que l'on ait $d_{j_1} \cap d_{j_2}=0$ pour toute paire d_{j_1} et d_{j_2} $(j_1 \neq j_2)$, et décrivons en outre un cercle Γ' de la forme $|z-a_0|<\rho'$ où ρ' est un nombre positif, plus petit que ρ mais suffisamment voisin de ρ, pour que l'on ait $\Gamma' \supset d_j$ $(j=1, \dots, m)$. Posons $\Gamma'_r=\Gamma'-(\cup d_j)$ et désignons par E^r la partie de D^r formée de tous les points de S^r_z avec une valeur z dans Γ'_r, et par $\tilde{E}^r$ la partie de $\tilde{D}^r$ qui se trouve justement au-dessus de E^r. On pose $E^r_0=D^r_0 \cap E^r$ et $\tilde{E}^r_\alpha=\tilde{D}^r_\alpha \cap \tilde{E}^r$. On pourra alors prendre α de manière que, pour tout z dans Γ'_r, $s^{r\alpha}_z$ soit de type (g, n) et contienne S^0_z. Ceci est toujours possible certainement.

9) loc. cit., p. 251.
10) loc. cit., p. 204. On suppose de plus que posséde la propriété (P_1) au sens d'Oka.

Nous allons ici appliquer le lemme 2. Prenons une hypersphère $Q^{r''}$ $(r<r'')$ telle que la composante connexe $\mathfrak{A}$ de $(\Sigma_\Gamma - \cup S_j) \cap Q^{r''}$ contenant E^r n'ait aucun point en lequel $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ s'annulent à la fois. Alors, on peut former un système holomorphe $\mathfrak{S}^*$ transversal à celui $\mathfrak{S}_1$ défini par la fonction entière f. Donc, d'après le lemme 2, on peut trouver un polynôme $G(x, y)$ de x et y suffisamment voisin de f dans $Q^{r''}$ pour que l'on puisse avoir un transport $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{S}_1$ à $\mathfrak{S}_2$ en E^r, où $\mathfrak{S}_2$ est le système holomorphe défini par G dans $\mathfrak{A}$. C'est-à-dire, $\mathfrak{T}$ est une transformation analytique et biunivoque de E^r sur un autre domaine Δ^r. En désignant par T_z une surface première de G avec une valeur z, la restriction de $\mathfrak{T}$ à une surface première S_z^r dans E^r fait correspondre à S_z^r une surface première T_z^r dans Δ^r d'une façon biunivoque, où $T_z^r = T_z \cap \Delta^r$. On peut ici supposer que l'image de E_0^r par $\mathfrak{T}$, que l'on désigne par Δ_0^r, est contenue dans V. Cela posé, on peut prendre la partie $\Gamma(G)$ sur L donnée par $|G-a_o|<\rho$ et on peut considérer comme d'habitude le tube normal $\Sigma_{\Gamma(G)}$ autour de T_0 par rapport à G, où T_0 est la surface première de G avec la valeur a_0. Δ^r est évidemment une partie de $\Sigma_{\Gamma(G)}$.

Considérons, ensuite, l'équation algébrique de trois variables complexes x, y et z de la forme

$$z - G(x, y) = 0$$

On suppose ici que la fonction donnée par la solution de cette équation par rapport à y n'a pas de pôle dans toute portion finie de l'espace de x et z. Ceci est toujours possible, en variant, si nécessaire, G un peu. Alors, on a naturellement une projection π de tout l'espace de x et y sur le domaine d'holomorphie de la solution. Soit R^0 l'image de $\Sigma_{\Gamma(G)}$ par π. Il est un domaine multivalent étalé au-dessus du domaine produit (Γ^*, C), où C signifie tout le plan de x. Et soit R la partie de R^0 étalée justement au-dessus du domaine produit (Γ'_r, C). De plus, posons $R^r = \pi(\Delta^r)$ et $R_0^r = \pi(\Delta_0^r)$. Par définition, on a évidemment $R_0^r \subset R^r \subset R$. On désigne par $R(z')$ la section de R par la droite analytique de la forme $z = z'$ dans (Γ'_r, C). Il est l'image d'une surface première $T_{z'}$ de G avec la valeur z' dans $\Sigma_{\Gamma(G)}$ par la projection π. Considérons, ensuite, la projection de la surface critique de R dans (Γ^*, C). Désignons-la par Ξ. On suppose que Ξ ne contient aucune droite analytique de la forme $z=c$. Ceci est toujours possible en variant, si nécessaire, G un peu. Alors, Ξ est une réunion finie de parties de courbes algébriques, chacune représentée par une fonction algébrique

$$x=\xi(z).$$

Donc, il n'y a qu'un nombre fini de points dans Γ_r' en lesquels au moins une des fonctions $\xi(z)$ a un pôle, un point critique ou un point équivoque[11] ou encore quelques-unes d'elles ont un point équivoque. Désignons tous ces points par b_ν $(\nu=1, \ldots, l)$. On peut ici supposer que les b_ν sont tous distincts de a_0, en variant si nécessaire G un peu.

Considérons, mainetenant, une représentation conforme au sens de Riemann de la partie Γ_r^0 de Γ_r' obtenue par l'exception de tous les points b_ν $(\nu=1, \ldots, l)$ sur le cercle unité $\mathfrak{C}$ dans le plan d'une variable complexe t. Désignons par

$$z=\lambda(t)$$

la fonction définissant cette représentation. On peut supposer $a_0=\lambda(0)$. Alors, on aura un domaine multivalent étalé au-dessus du domaine produit $(\mathfrak{C}, C)$ comme l'image inverse de R par la représentation λ. On le désigne par $\mathfrak{B}$ et la transformation, induite par λ, de $\mathfrak{B}$ dans R par la même lettre λ. La projection de la surface critique de $\mathfrak{B}$ dans $(\mathfrak{C}, C)$ se compose d'un nombre fini de courbes analytiques, disjointes l'une de l'autre, chacune représentée par une fonction holomorphe et uniforme dans $\mathfrak{C}$:

$$x=\xi_i(t) \qquad (i=1, \ldots, \mu)$$

où $\xi_i(t)$ est une certaine branche de $\xi(\lambda(t))$. Désignons par $\mathfrak{B}_r$ l'image inverse de R^r par λ et par $\mathfrak{B}_0$ celle de R_0^r par λ.

Ceci étant, nous allons former un revêtement $\mathfrak{B}$ de type (g, n) de $\mathfrak{B}$ par rapport à $\mathfrak{B}_0$. Suivant le mode de formation indiqué dans

11) On dit qu'une fonction analytique multiforme ξ sur le plan de z a un point équivoque en z_0 si l'on a $\xi_1(z_0)=\xi_2(z_0)$, où ξ_1 et ξ_2 sont deux branches différents de ξ en z_0.

la section 2, formons, d'abord, pour chaque section $\mathfrak{V}(t')$ $(t' \in \mathfrak{C})$ de $\mathfrak{V}$ par la droite analytique $t=t'$, un revêtement $\tilde{\mathfrak{V}}(t')$ de type (g, n) de $\mathfrak{V}(t')$ par rapport à section $\mathfrak{V}_0(t')$ de $\mathfrak{V}_0$ par $t=t'$, et définissons une topologie de la façon habituelle dans l'ensemble de tous les points appartenant à quelqu'une des $\tilde{\mathfrak{V}}(t')$. On peut le faire facilement et on aura le revêtement voulu $\tilde{\mathfrak{V}}$. En ce moment, on voit que la projection de la surface critique de $\tilde{\mathfrak{V}}$ dans $(\mathfrak{C}, C)$ coïncide avec celle de $\mathfrak{V}$, puisque, par définition, $\tilde{\mathfrak{V}}$ est non ramifié au-dessus de $\mathfrak{V}$. Maintenant, considérons dans $\mathfrak{V}_r$ la composition de trois transformations $\psi=\mathfrak{T}^{-1}\cdot\pi^{-1}\cdot\lambda$. Elle est une transformation analytique de $\mathfrak{V}^r$ dans E^r. De plus, elle induit naturellement, comme on peut le voir facilement, une transformation analytique d'une partie convenable $\tilde{\mathfrak{V}}_r$ de $\tilde{\mathfrak{V}}$ dans $\tilde{E}^r$. On désigne cette transformation-ci par la même lettre ψ, ce qui ne donne naissance à aucune ambiguïté. Dénotons Ω l'image inverse de $\tilde{E}^r_\alpha$ par ψ. La section $\Omega(t')$ de Ω par $t=t'$ est l'image inverse de $s^{r_\alpha}_{z'}$ par ψ, où $z'=\lambda(t')$.

Cela posé, nous allons déformer $\tilde{\mathfrak{V}}$ selon l'idée fondamentale que l'on a exposée dans le mémoire II[12]. Soit $\mathfrak{C}^0$ le cercle $|t|<\eta^0$, où η^0 est un nombre réel positif plus petit que l'unité, mais d'ailleurs quelconque, et soient $\mathfrak{V}^0$, $\tilde{\mathfrak{V}}^0$ et Ω^0 les partie de $\mathfrak{V}$, de $\tilde{\mathfrak{V}}$ et de Ω situées justement au-dessus du domaine produit $(\mathfrak{C}^0, C)$ respectivement. Ici, pour diminuer la difficulté qui aura lieu à cause de la forme de $\tilde{\mathfrak{V}}^0$ dans le raisonnement ci-dessous, on fait correspondre à $\tilde{\mathfrak{V}}^0$ un domaine produit de la forme $(\mathfrak{C}^0, \tilde{\mathfrak{V}}(0))$, où $\tilde{\mathfrak{V}}(0)$ signifie la section de $\tilde{\mathfrak{V}}$ par $t=0$, d'une façon homéomorphe et sans changer la coordonnée t. Ceci est toujours possible puisque, comme on a vu dans la section 5 du mémoire II[13], il en est de même certainement pour $\mathfrak{V}^0$. Le domaine sera désigné par $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ pour simplifier l'écriture. Soit ϕ l'homémorphisme de $\tilde{\mathfrak{V}}^0$ sur $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ et soit $\bar{\Omega}^0$ l'image de Ω^0 par ϕ. Posons, de plus, $\xi_i^0=\xi_i(0)$ $(i=1, \dots, \mu)$. Il s'agit de la refonte de $\tilde{\mathfrak{D}}^0$.

Soient l_i $(i=1, \dots, \mu)$ les demi-droites linéaires issues des points ξ_i^0 représentées par un paramètre réel s sous la forme

12) loc. cit., pp. 236–248.
13) loc. cit., p. 240.

$$x = s(\xi_0 - x_0) + x_0 \qquad s \geqq 1,$$

où x_0 est un point choisi de manière qu'aucune paire l_{i_1} et l_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ ne se supperposent pas l'une sur l'autre, et soient L_i $(i=1, \dots, \mu)$ les ensembles de points de la forme $\mathfrak{C}^0 \times l_i$. Coupons les feuillets de $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ le long de ces L_i $(i=1, \dots, \mu)$. Alors, $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ se sépare en une infinité dénombrable au plus de feuillets univalents st simplement connexes. Désignons les par $\mathfrak{D}_j$ $(j=1, 2, \dots)$. Soient ω_j $(j=1, 2, \dots)$ les parties de $\bar{\Omega}^0$ située sur $\mathfrak{D}_j$. Évidemment, ω_j sont vide, sauf un nombre fini au plus de ω_j puisque Ω^0 est relativement compact dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. Lorsque ω_j est non vide, il consiste respectivement en plusieurs composantes connexes ω_{jh} $(h=1, 2, \dots)$. Pour chaque j, on classifiera toutes les composantes connexes ω_{jh}, comme ce qui suit. Deux composantes ω_{jh} et $\omega_{jh}{}'$ appartiennent à même classe si et seulement si l'on peut joindre un point p dans ω_{jh} et un autre q dans $\omega_{jh}{}'$ par une courbe linéaire qui se trouve dans $\bar{\Omega}^0$ et que l'on peut ramener à une courbe située sur $\mathfrak{D}_j$, continûment dans le domaine $\tilde{\mathfrak{D}}^0$, sans varier les extrémités p et q. Il est alors aisé de voir qu'il n'y a qu'un nombre fini au plus de classe différentes sur chaque feuillet $\mathfrak{D}_j$ $(j=1, 2, \dots)$. Donc, m_j étant le nombre des classes sur $\mathfrak{D}_j$, la somme de tous les nombres m_j est aussi finie puisque m_j sont nuls sauf un nombre fini d'eux. Posons $m = \Sigma m_j$. Maintenant, on prépare m exemplaires $\mathfrak{D}'_k$ $(k=1, \dots, m)$ de $(\mathfrak{C}^0, C) - \cup L_i$ et on décrit, sur chaque exemplaire $\mathfrak{D}'_k$, toutes les composantes appartenant à une et une seule classe sur quelqu'un des $\mathfrak{D}_j$. Ensuite, on met ces exemplaires $\mathfrak{D}'_k$ en contiguïté deux à deux le long des certaines coupures, de manière à obtenir un domaine qui contient $\bar{\Omega}^0$ à son intérieur comme avant. D'après le même raisonnement que dans le mémoire II[14], ceci est certainement possible. On désigne par $\bar{\mathfrak{D}}^0$ le domaine ainsi obtenu et désigne la partie $\bar{\Omega}^0$ qui est réapparue sur $\bar{\mathfrak{D}}_0$ par la même lettre $\bar{\Omega}^0$.

On verra ici le fait que

Toute section de $\bar{\mathfrak{D}}^0$ *par* $t = t'$ $(t' \in \mathfrak{C}^0)$ *est de type* (g, n) *et parabolique.*

Pour l'effet, nous allons, d'abord, dire que toute courbe simple

14) loc. cit., pp. 243–245.

fermée $\mathscr{C}$ décrite sur $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ peut être ramenée continûment à une courbe fermée située dans $\bar{\Omega}^0$. Prenons un point quelconque p_0 sur $\mathscr{C}$ et faisons tourner un point p le long de $\mathscr{C}$ de p_0 à p_0 dans un certain sens. Supposons que p_0 se trouve sur le feuillet $\mathfrak{D}'_{k_1}$ et le point p passe par les feuillets $\mathfrak{D}'_{k_1}, \dots, \mathfrak{D}'_{k_l}$ et $\mathfrak{D}'_{k_{l+1}}$, où $\mathfrak{D}'_{k_{l+1}} = \mathfrak{D}'_{k_1}$, succesivement. Soient $L_q\,(q=1,\dots, l)$ les jointures de $\mathfrak{D}'_{k_q}$ et $\mathfrak{D}'_{k_{q+1}}$ par lesquelles p passe aussi succesivement. Sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que chaque L_{k_q} $(q=1, \dots, l)$ coupe $\bar{\Omega}^0$ effectivement en déformant $\mathscr{C}$, si nécessaire, continûment et convenablement. Désignons par ω'_q $(q=1, \dots, l)$ les composantes de $\bar{\Omega}^0$ que se trouvent sur $\mathfrak{D}'_{k_q}$ et sur $\mathfrak{D}'_{q+1}$ respectivement et qui sont contigues en L_{k_q} l'une à l'autre. Prenons, pour chaque q, un point p'_q dans ω'_q et un autre p_q dans ω_q, qui peuvent se lier par une droite linéaire c_q dans $\bar{\Omega}^0$ sur $\tilde{\mathfrak{D}}^0$, et décrivons une courbe linéaire d_q dans $\bar{\Omega}^0$, partant de p'_q et terminant à p_{q+1} $(p_{l+1}=p_1)$, qui définit ce que ω'_q et ω_{q+1} appartiennent à même classe sur le feuillet originaire de $\tilde{\mathfrak{D}}^0$. En ce moment, comme on peut le voir facilement, on peut aussi ramener d_q à une courbe située dans $\mathfrak{D}'_{k_{q+1}}$ sans varier les extrémités p'_q et p_{q+1}, continûment dans le nouveau domaine $\tilde{\mathfrak{D}}^0$. Formons ici la courbe fermée $\mathscr{C}^*$ donnée par le produit $c_1 \cdot d_1 \cdot c_2 \cdot d_2 \dots c_l \cdot d_l$. Alors, il est évident que deux courbes fermées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$ sont homotopes dans $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ puisque tout feuillet $\mathfrak{D}'_k$ est simplement connexe. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ peut être ramenée à une courbe située dans $\bar{\Omega}^0$, continûment dans $\tilde{\mathfrak{D}}^0$.

Il suit de là que toute section $\tilde{\mathfrak{D}}^0(t')$ de $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ par $t=t'$ $(t' \in \mathfrak{C}^0)$ est de type (g, n) au plus et de genre g puisque par hypothèse $\bar{\Omega}^0(t')$ est de type (g, n). Soient, ensuite, $\mathfrak{L}_i$ $(i=1, \dots, n)$ les composantes connexes de la frontière de $\bar{\Omega}^0$ dans $\tilde{\mathfrak{D}}^0$. Alors, on peut dire, d'après l'énoncé ci-dessus, que chaque $\mathfrak{L}_i$ sépare $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ en deux parties; l'une contient $\bar{\Omega}^0$ et l'autre, que l'on désigne par B_i, ne le contient pas. Maintenant, on va voir que tout B_i ne peut être bornée. Pour l'effet, rappelons encore une fois ce que la fonction donnée par la solution de l'équation $g(x, y) - z = 0$ par rapport à y n'a pas de pôle à distance fini. En tenant compte de ce fait, il est aisé de voir que chaque $\mathfrak{L}_i$ ne peut entourer aucune partie bornée sur le domaine originaire $\tilde{\mathfrak{D}}^0$.

Considérons, sur chaque feuillet $\mathfrak{D}_j$ $(j=1, 2, \dots)$ de $\tilde{\mathfrak{D}}^0$, les parties limitées par les parties de $\mathfrak{L}_i$, s'il existe, qui ne contiennent aucun point de Ω^0. D'après la forme de la coupure L_i, il est impossible que toutes ces parties soient bornées. Donc, il en est de même pour $\mathfrak{D}'_k$. Ceci signifie que B_i n'est pas bornée certainement. D'après ce que l'on a vu jusqu' ici, l'énoncé en question a été démontré complètement.

Enfin, par l'intermédiaire de l'homéomorphisme ϕ, faisons, pour le domaine $\tilde{\mathfrak{B}}^0$, ce que nous avons fait jusqu'ici pour $\tilde{\mathfrak{D}}^0$ tout parallélement. Alors, on obtiendra un domaine multivalent qui s' étalé au-dessus de $(\mathfrak{C}^0, C)$ et contient Ω^0, dont la section dequel par $t=t'$ est pour tout t' dans $\mathfrak{C}^0$ parabolique et de type (g, n). On le désigne par $\mathfrak{B}^0$.

On dira *passage au domaine algébrique par rapport à* $\tilde{E}^r_\alpha$ ce que l'on forme à partir de $\tilde{D}^r$ contenant $\tilde{E}^r_\alpha$ le domaine $\mathfrak{B}^0$ contenant Ω^0 comme ce qui précède. La transformation analytique de Ω^0, contenu dans $\mathfrak{B}^0$, sur $\tilde{E}^r_\alpha$ sera désignée aussi par la même lettre ψ.

IV. Fonctions de la classe (P).

12. Type d'une surface première. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x et y. On suppose que f appartient à la classe (P), c'est-à-dire, il n'y a aucune surface première hyperbolique de f. Nous voulons chercher, dans la partie actuelle, une condition pour que la fonction f appartienne à la classe (A), c'est-à-dire que toute surface première de f soit de type fini. Avant d'aller à ce sujet, on verra ici quelques propriétés élémentaires concernant le type d'une surface première de f.

Soit S_0 une surface première de f et soit p_0 un point régulier quelconque de S_0. En prenant deux nombres positifs r_1 et r_2 $(r_1<r_2)$, décrivons les hypersphères Q^{r_i} $(i=1, 2)$ et dénotons S_0^i la composante irréductible de $S_0 \cap Q^{r_i}$ contenant p_0. Soit (g_i, n_i) le type de S_0^i.

Alors, on peut dire que l'

On a toujours les inégalités $g_1 \leqq g_2$ *et* $g_1+n_1 \leqq g_2+n_2$.

D'après le lemme 1 du mémoire III[15]. On peut facilement le

15) loc. cit., p. 246.

démontrer.

En suite, soit S_i $(i=1, 2, \dots)$ une suite infinie de surfaces premières quelconques de f tendant vers une surface entière T. T consiste alors en un certaine nombre de surfaces premières de f, conjuguées deux à deux. On les désigne par S_0^ν $(\nu=1, \dots, l)$, l pouvant être l'infini.

On aura alors le

Théorème 5. *Si toutes les* S_i $(i=1, 2, \dots)$ *sont de type* (g, n), *chaque* S_0^ν $(\nu=1, \dots, l)$ *est de type* (g, n) *au plus.*

En effet, (g_ν, n_ν) étant le type de S_0^ν, supposons, pour réduir à l'absurd, que l'on a, par exemple, $(g_1, n_1)>(g, n)$. Prenons, sur chaque S_i $(i=1, 2, \dots)$, un point p_i de manière que la suite des points p_i tende vers un point p_0 de S_0^1, qui est un point régulier de T. On peut alors décrire une hypersphère Q^r telle que, (g'', n'') étant le type de la composante irréductible s de $S_0^1 \cap Q^r$ contenant p_0, on ait ou bien $g''>g$ ou bien $g''+n''>g+n$, que Q^r contienne tous les points p_i $(i=1, 2, \dots)$ et que la frontière de s consiste en n'' courbes linéaires simples et fermées qui ne passent par aucun point singulier de T. Soient q_j $(j=1, \dots, m)$, les points de T qui se trouvent sur s. On peut décrire, pour chaque q_j, une hypershpère fermée γ_j autour de q_j intérieurs à Q^r et assez petite pour que toute composante irréductible de $s \cap \gamma_j$ soit simplement connexe et qui ne contienne aucun des points p_i $(i=0, 1, 2, \dots)$, et que les γ_j soient disjointes l'une de l'autre. Posons $\Delta=Q^r-\cup\gamma_j$ et $s^0=s\cap\Delta$. Il est évident que s^0 est connexe. Désignons, pour chaque i, par s_i la composante irréductible de $S_i \cap Q^r$ contenant p_i et par s_i^0 celle de $s_i \cap \Delta$ contenant aussi p_i. Alors, il est aisé de voir que l'on peut regarder s_i^0 comme un revêtement topologique au-dessus de s^0 à un nombre fini de feuillets, dès que i surpasse un certaine nombre entier i_0. (g_i^0, n_i^0) étant le type de S_i^0, on aura d'abord pour $i>i_0$ $g_i^0 \geqq g''$ et $g_i^0+n_i^0 \geqq g''+n''+m$. Il en résulte que l'on a $g \geqq g''$ et $g+n \geqq g''+n''$. Ceci est, d'après l'énoncé ci-dessus, en contradiction avec l'hypothèse. Le théorème a été donc démontré.

13. Problème auxiliaire. Considérons, à nouveau, dans l'espace de x et y une fonction entière $f(x, y)$. Soit S_0 une surface première de f d'ordre un et avec une valeur a_0. et soit Σ_r un tube normal autour de S_0 sous les significations habituelles des notations. Γ^* signifie le cercle $|z-a_0|<p$ sur le plan de z. Maintenant, en désignant par e l'ensemble de tous les points z' dans Γ^* tels que la surface première $S_{z'}$ de f avec la valeur z' dans Σ_r soit non singulière, parabolique et de type (g, n), supposons que a_0 appartient à e et que, pour un nombre positif α quelque petit qu'il soit, la capacité logarithmique de $e \cap \Gamma^*_\alpha$ n'est pas nulle, où Γ^*_α est un cercle de la forme $|z-a_0|<\alpha$. Dans ces circonstances, nous nous proposons le problème auxiliaire suivant:

Touver un tube normal Σ_{r_0} autour de S_0 tel que toute surface première de f dans Σ_{r_0} est non singulière, parabolique et de type (g, n).

14. Tube normal spécial. Prenons, d'abord, un point P_0, qui n'est pas de point de Weierstrass de $\bar{S}_0$, sur S_0. Soit w_0 une coordonnée locale en P_0 sur S_0 et soit W_0 la partie donnée par $|w_0|<\eta$ sur S_0, où η est un nombre positif plus petit que l'unité. Alors, il existe par hypothèse une et une seule fonction méromorphe $\varphi_0(p)$ sur $\bar{S}_0$ telle qui ait en P_0 son seul pôle d'ordre $g+1$ et qui puisse s'écrire au voisinage de P_0 de la forme

$$\varphi_0(w_0)=\frac{1}{w_0^{g+1}}+\frac{a_1}{w_0^g}+\cdots+\frac{a_g}{w_0}+\Phi(w_0)$$

où $\Phi(w_0)$ est une fonction holomorphe en P_0 en lequel on a $\Phi(0)=0$. On dira, dans la suite, que telle fonction $\varphi_0(p)$ *satisfait aux conditions (K) par rapport à w_0.*

Considérons, ensuite, la surface de Riemann R_0 donnée par l'image de $\bar{S}_0$ de la fonction

$$w=\varphi_0(p)$$

étalée au-dessus de la sphère de Riemann d'une variable complexe w. D'après l'hypothèse, il n'y a que n points, que l'on désigne par p_i

$(i=1, \ldots, n)$, qui ne correspondent aucun point de S_0. Soient α_i $(i=1, \ldots, n)$ les coordonnées de p_i, et décrivons, pour chaque i, trois cercles concentriques γ_i^μ $(\mu=1, 2, 3)$ sur le plan de w de la forme $|w-\alpha_i|<\varepsilon_\mu$, où ε_μ $(\mu=1, 2, 3)$ sont des nombres positifs tels que l'on ait $\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3$ et $\varepsilon_2-\varepsilon_1=\varepsilon_3-\varepsilon_2=\varepsilon^*$. On suppose ici que, γ_i^μ $(\mu=1, 2, 3;\ i=1, \ldots, n)$ étant les composantes connexes, contenant p_i, des parties de R_0 qui se trouvent justement au-dessus de γ_i^μ respectivement, toutes les γ_i^μ n'ont aucun point critique que au-dessus de α_i au plus et les γ_i^3 n'ont aucun point commun deux à deux. Ceci est toujours établi pourvu que l'on prend ε_3 suffisamment petit. Alors, les γ_i^μ sont tout simplement connexes. On désigne par $\mathfrak{D}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ les parties de S_0 auxquelles correspondent à $\gamma_i^3-\gamma_i^1$ par φ_0 respectivement.

Décrivons, dans l'espace de z et y, une hypersphère Q^{r_0} suffisamment grande pour que la composante connexe S_0^0 de $S_0 \cap Q^{r_0}$ contenant P_0 contienne toutes les parties $\mathfrak{D}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Alors, il est aisé de voir que S_0^0 est de type (g, n) puisque, Δ_0 étant l'image de S_0^0 par φ_0 dans R_0, il y a dans chaque γ_i^1 $(i=1, \ldots, n)$ une et une seul composante de frontière de Δ_0. Désignons par γ_i^0 $(i=1, \ldots, n)$ ces composantes de frontière et par γ_i^* celles de S_0^0 correspondent γ_i^0 par φ_0. On pose $E_0=S_0^0-W_0$.

Ici, on peut supposer que S_0^0 satisfait aux conditions suivantes;
1. Soit R_1 une surface de Riemann compacte de genre g contenant une partie Δ_1 qui correspond à Δ_0 d'une façon analytique et biunivoque, mais d'ailleur quelconque. Dénotons ψ cette transformation de Δ_0 sur Δ_1. Cela posé, le point P_1 correspondant à P_0 par ψ n'est pas point de Weierstrass de R_1.
2. Soit w_1 la coordonnée locale en P_1 sur R_1 telle que l'on ait $w_0=w_1\cdot\psi$, et soit $\varphi_1(p)$ une fonction méromorphe, satisfaisant aux conditions (K) par rapport à w_1, sur tout R_1. Cela étant, on a l'inégalité

$$|\varphi_0(p)-\varphi_1(\psi(p))|<\varepsilon^*$$

dans E_0.

D'après les corollaires 2 et 3 du théorème 2, il suffira pour cela de prendre le rayon r_0 de Q^{r_0} suffisamment grand.

Enfin, choisissons un tube normal Σ_{Γ_0} autour de S_0 comme ce qui suit. En prenant une hypersphère $Q^{r'}$ $(r_0<r')$ et en désignant par S'_0 la composante connexe de $S_0 \cap Q^{r'}$ contenant P_0, formons une rétraction analytique ζ_0 autour de S'_0 défini dans un voisinage V de S'_0. D'après le corollaire 1 du théorème 1, on peut le toujours facilement. Cela posé, on peut trouver un tube normal Σ_{Γ_0} autour de S_0 tel que, pour toute surface première S_z de f dans Σ_{Γ_0}, l'on ait $\zeta_0(S_z \cap V) \supset S_0^0$, où Γ_0 est la partie, donnée par $|f-a_0|<\rho_0$, de la surface analytique $L_0=\zeta_0^{-1}(P_0)$ et ρ_0 est un certaine nombre positif plus petit que ρ. Posons $\Sigma_{\Gamma_0}^0=\zeta_0^{-1}(S_0^0) \cap \Sigma_{\Gamma_0}$, $P_z=S_z \cap L_0$ et $S_z^0=S_2 \cap \Sigma_{\Gamma_0}^0$, où S_z est une surface première de f dans Σ_{Γ_0} avec la valeur z.

Nous démontrerons, dans la section 16, que toute surface première de f dans Σ_{Γ_0} est parabolique et de type (g, n).

15. Fonctions η_{r_α} (z) et η_∞(z). On conserve, dans cette section, les notations dans la section précédente, mais on désigne par Σ_Γ, au lieu de Σ_{Γ_0}, le tube normal considére pour simplifier l'écriture. Rappelons ici les configurations établies dans les sections 10 et 11 sous les mêmes significations des notations. En prenant un nombre positif r plus grand que r_0 mais d'ailleurs quelconque et en décrivant une hypersphère Q^r, on considère S_z^r, D^r, D_0^r et $\tilde{D}^r$; et en prenant une fonction plurisousharmonique $\Theta(p)$ sur $\tilde{D}^r$, une partie Γ'_r dans Γ^* et un nombre positif α convenablement, on considère $\tilde{E}_\alpha^r$ tel que, pour tout z dans Γ'_r, $S_z^{r_\alpha}$ contienne S_z^0.

Cela étant, définissons, d'abord, une fonction $\eta_{\gamma_\alpha}(z)$ dans Γ'_r comme ce qui suit. Considérons, pour un point z dans Γ'_r, une surface de Riemann compacte, que l'on désigne par R'_z, de genre g contenant une partie qui correspond à $s_z^{r_\alpha}$ d'une façon analytique et biunivoque, mais d'ailleurs quelconque. Cela posé, en identifiant la partie avec $s_z^{r_\alpha}$, on dira, dans la suite, que R'_z contient $s_z^{r_\alpha}$, d'autant qu'il n'y ait aucune ambiguïté. Alors, d'après l'hypothèse, P_z n'est pas point de Weierstrass de R'_z. Par suite, on peut former une et une seule fonction méromorphe $\varphi_z(p)$, qui satisfait aux conditions (K) par rapport à w_z, sur R'_z, où w_z est la coordonnée locale en P_z sur R'_z telle que l'on ait $w_z=w_0\cdot\zeta_0$. D'après aussi l'hypothèse, la fonction $\varphi_z(p)$

satisfait à inégalité

$$|\varphi_0(\zeta_0(p))-\varphi_z(p)|<\varepsilon^*$$

sur S_z^0. Considérons ici une surface de Riemann R_z, étalé au-dessus de la sphère de Riemann de w, donnée par l'image de R_z' par la fonction

$$w=\varphi_z(p)$$

et soit $\Delta_z^{r_\alpha}$ la partie de R_z qui correspond justement à $s_z^{r_\alpha}$ par la même fonction. Alors, pour chaque cercle γ_i^3 $(i=1, \dots, n)$, il correspond une seule composante de frontière, que l'on désigne par $\beta_{zi}^{r_\alpha}$ de $\Delta_z^{r_\alpha}$, qui se trouve au-dessus de γ_i^3. Désignons par $\beta_{zi}^{r_\alpha}$ la projection de $\beta_{zi}^{r_\alpha}$ dans γ_i^3, dénotons $d(\beta_{zi}^{r_\alpha})$ le diamètre de $\beta_{zi}^{r_\alpha}$ et posont

$$D(s_z^{r_\alpha}, R_z)=\operatorname*{Max}_i\ d(\beta_{zi}^{r_\alpha}).$$

Ceci est déterminé par $s_z^{r_\alpha}$ et par R_z'. Posons enfin

$$\eta_{\gamma_\alpha}(z)=\sup\ \log D(s_z^{r_\alpha}, R_z)$$

oú sup est pris pour toutes les surfaces de Riemann compactes R_z' de genre g contenant $s_z^{r_\alpha}$, comme ce qui précède.

Il est évident que si, $s_z^{r_\alpha}\subset s_z^{s_\beta}$, on a l'ingégalité

$$\eta_{r_\alpha}(z)\geqq\eta_{s_\beta}(z),$$

puisqu'une surface de Riemann contenant $s_z^{s_\beta}$ contient naturellement $s_z^{r_\alpha}$. De plus, on aura ici le

Lemme 4. *Pour r et α fixés, $\eta_{r_\alpha}(z)$ est une fonction demi-continue supréieurement de z dans Γ_r'.*

En effet, prenons un point z_0 dans Γ_r' arbitrairement et une suite z_j $(j=1, 2,\dots)$ de points dans Γ_r' tendant vers z_0. Supposons que l'on a

$$\lim_j \eta_{r_\alpha}(z_j)=m.$$

D'après la définition, il y a, pour chaque z_j, une surface de Riemann

R'_j compacte de genre g contenant $s_{z_j}^{r_\alpha}$ et une fonction $\varphi_{z_j}(p)$ méromorphe sur tout R'_j satisfaisant aux conditions (K) par rapport à w_{z_j} $(w_{z_j}=w_0\cdot\zeta_0)$ telles que l'on ait

$$m=\lim\log D(s_{z_j}^{r_\alpha},\ R'_j).$$

Considérons une rétraction ζ' autour de $S_{z_0}^r$ définiée dans un voisinage V' de $S_{z_0}^r$ et prenons une suite de nombre réels α_ν $(\nu=1, 2,\ldots)$ s'augumentant et tendant vers α. Alors, pour chaque α_ν, on peut trouver une transformation analytique et biunivoque $\phi_{j\nu}$ de $s_{z_0}^{r_{\alpha_\nu}}$ sur une certaine partie $\sigma_{j\nu}$ dans $s_{z_j}^{r_\alpha}$ au moyen de ζ', dès que j surpasse un certain nombre entier j_ν dépendant de α_ν. Considérons, dans $s_{z_0}^{r_{\alpha_\nu}}$, des fonctions méromorphes $\varphi_{j\nu}=\varphi_{z_j}\cdot\phi_{j\nu}$ $(j>j_\nu)$. Évidemment la famille $\{\varphi_{j\nu}\}$ est normale. Donc, on peut extraire de la famille une suite $\varphi_{j_\mu\nu_\mu}$ $(\mu=1, 2,\ldots)$ qui tend uniforment vers une fonction méromorphe, que l'on désigne par φ^0, dans tout $s_{z_0}^{r_\alpha}$. En ce moment, on peut supposer que la suite de surfaces de Riemann R_μ $(\mu=1, 2,\ldots)$ étalées au-dessus de la sphère de Riemann de w, données par les images de R'_{j_μ} par les fonctions $w=\varphi_{j_\mu\nu_\mu}$, tend vers une surface de Riemann R_0 qui est compacte et de genre g et qui contient $s_{z_0}^{r_\alpha}$, puisque chaque R_μ n'a qu'un nombre déterminé de points critiques. R_0 étant déterminée, la fonction φ^0 peut se prolonger d'une façon évidente en une fonction méromorphe sur tout R_0. D'autre part, désignons par ψ_j la transformation analytique et biunivoque de $S_{z_j}^0$ sur $S_{z_0}^0$ qui est induite par la rétraction ζ_0. Alors, il est évident que la suite de transformations données par $\psi_{j_\mu}\cdot\phi_{\mu\mu}^{-1}$ $(\mu=1, 2,\ldots)$ de $S_{z_0}^0$ sur certaines parties dans $\tilde{S}_{z_0}$ tend uniformément vers la transformation identique de $S_{z_0}^0$ sur elle-même. Par suite, φ^0 satisfait aux conditions (K) par rapport à w_{z_0} $(w_{z_0}=w_0\cdot\zeta_0)$. De ce que l'on a dit jusqu'ici, il déduit immédiatement que l'on a

$$m\leqq\log D(s_{z_0}^{r_\alpha},\ R_0),$$

puisque l'on ait $\sigma_{j\nu}\subset s_{z_j}^{r_\alpha}$. Il suit de là et de la définition que l'on a l'négalité $\eta_{r_\alpha}(z_0)\geqq m$. Le lemme a été donc démontré.

Il s'agit maintenant de la fonction $\eta_\infty(z)$. Supposons qu'une surface première $S_{z'}$, de f dans Σ_r est non singulière. Alors, on peut prendre une suite de paires (r_j, α_j) $(j=1, 2,\dots)$ de nombres positifs et une suite de domaines Γ'_{r_j} de manière que z' soit contenu dans Γ'_{r_j} et que la suite $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ tende vers $\tilde{S}_{z'}$. Ceci nous permet de poser, sous les mêmes significations des notations que dans ce qui précède

$$\eta_\infty(z') = \inf \log D(s_{z'}^{r\alpha}, R'),$$

où inf est pris pour toutes les parties $s_{z'}^{r\alpha}$ de $\tilde{S}_{z'}$ contenant $S_{z'}^0$ et pour toutes les surfaces de Riemann compactes R' de genre g contenatn $s_{z'}^{r\alpha}$. Alors, on aura le

Lemme 5. *On a* $\eta_\infty(z') = -\infty$ *si et seulement si* $S_{z'}$ *est parabolique et de type* (g, n). *Inversement, s'il en est ainsi, lorsqu'on prend une suite* $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ *tendant vers* $\tilde{S}_{z'}$ *et, pour chaque* $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$, *une surface de Riemann compacte* R'_j *de genre* g *contenant* $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ *arbitrairement, on a toujours*

$$\lim \log D(s_{z'}^{r_j\alpha_j}, R'_j) = -\infty.$$

En effet, supposons, d'abord, que l'on a $\eta_\infty(z) = -\infty$. Alors, d'-après la définition, on peut prendre une suite de parties $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ de $\tilde{S}_{z'}$, une suite de surfaces de Riemann compactes R'_j de genre g contenant $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ et la suite de fonctions φ_j méromorphes sur tout R'_j satisfaisant aux conditions (K) par rapport à $w_{z'}$, de manière que l'on ait *lim log* $D(s_{z'}^{r_j\alpha_j}, R'_j) = -\infty$. Il est alors aisé de voir que la suite $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ tend vers $\tilde{S}_{z'}$. Par suite, on peut extraire de la suite φ_j la suite partielle φ_ν qui tend vers une fonction φ_0 méromorphe sur tout $\tilde{S}_{z'}$ puisque la famille $\{\varphi_j\}$ est normale. Évidemment φ_0 satsifait aux conditions (K) par rapport à $w_{z'}$. De plus, on peut faire correspondre, par la fonction $w = \varphi_0$, à $\tilde{S}_{z'}$ une surface de Riemann R^0, qui s'étale au-dessus de la sphère de Riemann de w et qui n'a que n points frontières. Ceci signifie que $\tilde{S}_{z'}$ est parabolique. Par suite, d'après le théorème 4, $S_{z'}$ est elle-même parabolique et de type (g, n). Inversement, supposons que $S_{z'}$ est parabolique et de type (g, n). Alors, il y a une et une seule surface de Riemann compacte R' de genre g contenant $S_{z'}$ à l'équivalence analytique près. Par suite, lorsqu'on prend une suite $s_{z'}^{r_j\alpha_j}$ tend vers $S_{z'}$, une suite de surfaces de Riemann compactes R'_j de genre g contenant $s_z^{r_j \alpha_j}$ et la suite de fonctions φ_j sur R'_j satisfaisant aux conditions (K) par rapport à $w_{z'}$, comme ce qui précède, on voit, d'après le corollaire 3 du théorème 2, que la suite φ_j tend uniformément vers la fonction φ_0 méromorphe sur toute R' satisfaisant aux conditions (K) par rapport à $w_{z'}$. Ceci singifie que la condition est suffisante et que le deuxième énoncé du lemme est vrai certainement. Donc le lemme a été démontré.

16. Démonstration. Supposons ici, pour réduire à l'absurde, qu'il y a dans le tube Σ_Γ considéré une surface première S_c de f avec une valeur c qui est non singulière dans tout Σ_Γ mais qui n'est pas à la fois parabolique et de type (g, n). D'après le lemme 5, on a $\eta_\infty(c) = -m > -\infty$. Soient α, r et M trois nombres positifs tels que l'on ait $r_0 < r$ et que, pour tout z dans Γ'_r, $S_z^{r_\alpha}$ contiennent S_z^0, mais d'ailleurs quelconques, et soit $e(\alpha, r, \Gamma'_r, M)$ l'ensemble de points dans Γ'_r donné par $\eta_{r_\alpha}(z) < -M$. Cet ensemble est ouvert puisque η_{r_α} est demicontinue surpérieurement. Alors, d'après le même raisonnement que dans la section 4 du mémoire III[16], on peut trouver trois nombres positifs α, r et M et une partie Γ'_r contenant c de manière que l'ensemble $e(\alpha, r, \Gamma'_r, M) = e^*$ satisfasse à la condition suivante:

Lorsqu'on forme une fonction $h(z)$, continue dans $\bar{\Gamma}^*$, sousharmonique dans Γ^* et harmonique dans $\Gamma^* - e^*$, telle que l'on ait $h(z) = -M$ sur e^* et $h(z) = 0$ sur la circonférence de Γ^*, on a l'inégalité

$$h(c) < -2m.$$

Maintenant, en concervant les significations des notations que l'on a données dans la section 11, on considère un passage au domaine algébrique par rapport à $\tilde{E}_\alpha^r$. C'est-à-dire, on considère, d'abord, une représentation conforme au sens de Riemann d'une partie de Γ_r^0, obtenue à parti de Γ'_r par l'exception d'un nombre fini de points critiques sur le cercle unité $\mathfrak{C}$: $|t| < 1$, dans le plan d'une variable complexe t. Désignons par $z = \lambda(t)$ la transformation et supposons pour la simplicité que $c = \lambda(0)$. Ensuite, on considère un cercle $\mathfrak{C}^0$: $|t| < \eta$ $(\eta < 1)$ tel que l'on ait

16) loc. cit., pp. 254–256.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\lambda(\eta e^{i\theta}))\cdot d\theta > -m.$$

Il est toujours possible si l'on prend Γ_r' et η convenablement. Enfin, on forme un domaine algébrique $\mathfrak{V}^0$ étalé au-dessus du domaine produit $(\mathfrak{C}^0, C)$, où C: $|x|<\infty$, satisfaisant aux conditions suivantes:
1. Pour tout t' dans $\mathfrak{C}^0$, la section $\mathfrak{V}^0(t')$ de $\mathfrak{V}^0$ par la droite $t=t'$ est non singulière, parabolique et de type (g, n).
2. Il y a une partie Ω^0 dans $\mathfrak{V}^0$ et une transformation analytique ψ de Ω^0 dans $\tilde{E}_r^\alpha$ telle que la restriction de ψ à toute section $\mathfrak{V}^0(t')$ $(t'\in\mathfrak{C}^0)$ fasse correspondre à la section $\Omega^0(t')$ de Ω^0 par la droite $t=t'$, $s_{z'}^{r_\alpha}$ d'une facon analytique et biunivoque, où $z'=\lambda(t')$.

En regardant $\mathfrak{V}^0(t)\,(t\in\mathfrak{C}^0)$ avec les points à l'infini comme une surface de Riemann compacte de genre g contenant $s_z^{r_\alpha}$ $(z=\lambda(t))$, formons une fonction $\varphi(p, t)$ méromorphe sur tout $\mathfrak{V}^0(t)$ satisfaisant aux conditions (K) par rapport à w_z. Alors, comme on sait bien, la fonction $\varphi(p, t)$ est une fonction méromorphe par rapport à deux variables complexes sur tout $\mathfrak{V}^0$, puisque $\mathfrak{V}^0$ est un domaine algébrique[17].

Ici, rappelons une propriété d'ensemble pseudoconcave. Soit E un ensemble pseudoconcave dans le domaine produit (δ, C) de la forme $|x|<r$ et $|y|<\infty$ dans l'espace de x et y, tel que tout section $E_{x'}$ de E par la droite $x=x'$ est bornée uniformément en module et soit $d(x)$ le diamètre de E_x. Alors, on a l'énoncé que la fonction $\log d(x)$ est sousharmonique dans δ[18].

En vertu de cette propriétés, on peut dire que

17) En effet, on peut regarder $\mathfrak{V}^0$ comme un domaine d'holomorphic d'une fonction analytique donnée par la solution de l'équation algébrique $F(t, x, y)=y^m+a_1(t, x)y^{m-1}+\cdots+a_m(t, x)=0$, où $a_j(t, x)\,(j=1, \dots, m)$ sont des polynômes de x ayant, comme leurs coefficients, des fonctions holomorphes de t dans $\mathfrak{C}^0$. Par suite, en vertu des conditions (K), la fonction φ peut être exprimée uniquement par $\varphi=\Phi(t, x, y)\{\partial F/\partial y\cdot(x-p(t))^{g+1}\}^{-1}$, où $\Phi(t, x, y)=b_0(t, x)y^{m-1}+\cdots+b_{m-1}(t, x)$, $b_k(t, x)$ $(k=0, \dots, m-1)$ sont des polynômes de même caractère que $a_j(t, x)$ et $p(t)$ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{C}^0$ telle que, au-dessus de la surface analytique $x-p(t)=0$, il y a un seul pôle de φ. De plus, les conditions qui détermine cet expression-ci sont tout analytiques par rapport à t. Donc, φ est certainement méromorphe par rapport à deux variables.

18) loc. cit., pp. 230–231.

La fonction de t donnée par

$$p(t)=\log D(s_z^{r_\alpha}, \mathfrak{B}(t) \qquad z=\lambda(t)$$

est sousharmonique dans $\mathfrak{C}^0$.

En effet, $\mathfrak{B}^0-\Omega^0$ se sépare en n ensembles pseudoconcaves $\mathscr{E}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ et $\varphi(p, t)$ est holomorphe dans chaque $\mathscr{E}_i$. De plus. l'image de $\mathscr{E}_i$ par la fonction $w=\varphi(p, t)$ se trouve, d'après l'hypothèse, dans l'un des dicylindres $(\gamma_i^3, \mathfrak{C}^0)$ dans l'espace de w et t. Donc, $p(t)$ est le maximun de n fonctions sousharmoniques et, par suite, $p(t)$ est certainement sousharmonique dans $\mathfrak{C}^0$.

Comparons, mainetenant, la fonction $p(t)$ à la fonction $h^*(t)$ donnée par

$$h^*(t)=h(\lambda(t))+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\eta^2-r^2}{\eta^2+r^2-2\eta r\cos(\varphi-\theta)}h(\lambda(\eta e^{i\theta}))d\theta$$

oú $t=r\cdot e^{i\varphi}$. D'après l'hypothèse, on a l'inégalité

$$p(t)\leqq h^*(t)$$

pour tout point frontière de $\mathfrak{C}^0$ et pour tout point de e^*, où e^* est tous les points qui correspond à un point de e par lar fonction $z=\lambda(t)$, puisque l'on a, de l'hypothèse, $p(t)\leqq 0$ sur tout $\mathfrak{C}^0$ et $p(t)\leqq \eta_{\nu_\alpha}(\lambda(t))$ dans $\mathfrak{C}^0$. Par suite, l'inégalité ci-dessus subsiste dans tout $\mathfrak{C}^0$ puisque $h^*(t)$ est harmonique dans $\mathfrak{C}^0-e^*$. Donc, on a l'inégalité

$$p(c)\leqq h^*(t)\leqq -m.$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

Il s'ensuit de là que toute surface première S_z de f dans Σ_r est parabolique et de type (g, n) pourvu qu'elle soit non singulière. D' autre part, d'après le même raisonnement que l'on a fait dans la démonstration du théorème 2 du mémoire II[19], il n'y a aucune surface première de f ayant des points singuliers dans Σ_r.

D'après ce que l'on a dit jusqu'ici, on a le

19) loc. cit., p. 269.

Lemme fondamental. *Soit f une fonction entière de x et y et soit Σ_Γ un tube normal autour d'une surface première S_0 de f, d' ordre un et avec une valeur a_0. Désignons par e l'ensemble de tous les points z dans Γ^* tels que la surface première S_z de f avec la valeur z dans Σ_Γ soit non singulière, parabolique et de type (g, n). Supposons que e contient a_0 et que, pour un nombre positif ρ' quelque petit qu'il soit, la capacité logarithmique de $e \cap \Gamma^*_{\rho'}$ est positive, où $\Gamma^*_{\rho'}$ est le cercle $|z-a_0|<\rho'$.*

Alors, il y a un tube normal Σ_{Γ_0} autour de S_0 tel que toute surface première de f dans Σ_{Γ_0} soit non singulière, parabolique et de type (g, n).

17. Conclusion. Considérons, dans l'espace de deux variables complexes x et y, une fonction entière $f(x, y)$. On suppose que f appartient à la classe (P). De plus, on suppose qu'il y a, sur le plan d'une variable complexe z, un ensemble de points e de capacité logarithmique non nulle tel que, pour tout z de e, il y ait au moins une surface première de f avec la valeur z qui est de type fini. Il est alors aisé de voir que l'on peut prendre, pour une certaine paire d'entiers g et n, un tube normal Σ_Γ qui satisfait aux conditions que l'on a données dans le lemme fondamental. Car, il n'y a qu'une infinité dénombrable de types différentes et toute réunion dénombrable au plus d'ensembles de capacité logarithmique nulle est aussi de capacité logarithmique nulle.

En ce moment, on peut dire que

Toute surface première S_z de f dans ce tube normal Σ_Γ est non singulière et de type (g, n) sauf pour la valeur z appartenant à un certain ensemble fermé de capacité logarithmique nulle.

En effet, considérons l'ensemble de tous les points z dans Γ^* tels que la surface première S_z de f avec la valeur z dans Σ_Γ soit non singulière et de type (g, n). Cet ensemble admet par hypothèse une composante connexe $\mathfrak{B}$ contenant au moins un point intérieur. Alors, d'après le lemme fondamental, $\mathfrak{B}$ est ouverte. De plus, d'après le théorème 5, pour tout point z' qui se trouve sur la frontière de $\mathfrak{B}$ et à l'intérieur de Γ^*, la surface première $S_{z'}$ de f avec la valeur z'

dans Σ_Γ est de type (g, n) au plus. Donc, la frontière de $\mathfrak{B}$ dans Γ^* est de capacité logarithmique nulle puisque toute somme finie d'ensemble de capacité logarithmique nulle est aussi de capacité logarithmique nulle. Ceci signifie que l'énoncé est vrai certainement.

D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout l'espace sauf une infinité dénombrable au plus de surfaces premières d'ordre élevé de f d'une infinité dénombrable au plus de tubes normaux Σ_{Γ_i} $(i=1, 2,\dots)$ autour de surfaces premières S_i d'ordre un de f. Alors, l'énoncé précédent sera aussi établit pour le même type (g, n) et pour tous ces tubes normaux, puisqu'on peut joindre Σ_Γ et tout $\Sigma_{\Gamma_{i0}}$ avec une suite finie de Σ_{Γ_ν} $(\nu=1, \dots, m)$ tels que l'on ait $\Sigma_\Gamma=\Sigma_{\Gamma_1}$, $\Sigma_{\Gamma_\nu}\cap\Sigma_{\Gamma_{\nu+1}}\neq 0$ et $\Sigma_{\Gamma_m}=\Sigma_{\Gamma_{i0}}$.

D'où, on a le

Théorème I. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière de x et y appartenant à la classe (P). Si l'ensemble des valeurs prises par f sur ses surfaces premières algébriques est de capacité logarithmique non nulle, f appartient à la classe (A). En outre, toutes les surfaces premières de f, sauf celles avec une valeur appartenant à un ensemble de capacité logarithmique nulle, sont de même type (g, n), et les surfaces premières exceptionnelles sont de type (g, n) au plus.*

V. Fonctions de la classe (A)

18. Fonction $h^r(p, z)$. Dans la dernière partie, on étudiera des fonctions entières appartenant à la classe (A). D'après le théorème qu'on vient d'obtenir, une fonction entière f appartenant à la classe (A) est de type (g, n), où g et n sont certains nombres entiers tels que l'on ait $g\geqq 0$ et $n\geqq 1$, et presque toute surface première de f est justement de type (g, n). En outre, on verra dans la suite qu'aucune surface première de f n'admet de surfaces premières irrégulières de type (B). Le but de cette partie est de montrer cet énoncé. Pour cela, nous commençons par préparer quelques lemmes.

Soit $f(x, y)$ une fonction entière appartenant à la classe (A) de type (g, n). Alros, une surface première de f est non singulière si elle est de type (g, n). Soit S_0 une surface première de f d'ordre un avec une valeur a_0. On suppose que S_0 est de type (g, n). Prenons, d' abord, un point quelconque P_0 de S_0 et fixérons le comme l'orgine de S_0. On désigne, comme d'habitude, par Q^r une hypersphère de la forme $|x|^2+|y|^2<r^2$ et par S_0^r la composante irréductible de $S_0 \cap Q^r$ contenant P_0. On prend une coordonnée locale w_0 en P_0 sur S_0 et on désigne par W_0 la partie de S_0 donnée par $|w_0|<\eta$ $(\eta<1)$ et par ∂W_0 la circonférence de W_0. Ensuite, on prend un nombre positif r_0 tel que $S_0^{r_0}$ soit de type (g, n) et que n composantes de la frontière de $S_0^{r_0}$, que l'on désigne par γ_i^0 $(i=1, \dots, n)$, n'aient aucun point commun deux à deux. Ceci est possible certainement. Lorsqu'on prend un nombre r plus grand que r_0, S_0^r est aussi de type (g, n) puisque, $\mathfrak{B}_i$ $(i=1, \dots, n)$ étant les parties de S_0 séparées par γ_i, il y a, dans chaque $\mathfrak{B}_i$, une et une seule composante de frontière, que l'on désigne par γ_i^r, de S_0^r. Posons $s_0^0=S_0^{r_0}-W_0$ et $s_0^r=S_0^r-W_0$.

Maintenant, formons, sur s_0^r, une fonction $h^r(p)$ continue dans $\bar{s}_0^r$ et harmonique dans s_0^r, telle que l'on ait $h^r(p)=0$ sur ∂W_0 et $h^r(p)=1$ sur toutes les γ_i^r $(i=1, \dots, n)$. Alors, il est évident que si l'on a $r_0<r'<r''$, on a toujours $h^{r'}(p)>h^{r''}(p)$ dans $s_0^{r'}$. De plus, on peut dire que

La fonction $h^r(p)$ est continue par rapport à p et r, bien que s_0^r puisse varier discontinûment avec r.

En effet, prenons une suite r_j $(j=1, 2, \dots)$ de nombres réels plus grands que r_0 qui tend vers un nombre r'. On peut supposer que la suite $s_0^{r_j}$ $(j=1, 2, \dots)$ tend vers une partie σ dans $S_0 \cap Q^{r'}$, en extrayant, si nécessaire, de la suite $s_0^{r_j}$ une suite partielle convenable. Alors, $s_0^{r'}$ est une composante connexe de σ contenant P_0. Considérons ici la suite des fonctions $h^{r_j}(p)\,(j=1, 2, \dots)$. Comme on sait bien, on peut en extraire une suite partielle $h^{r_\nu}(p)\,(\nu=1, 2, \dots)$ qui tend uniformément vers une fonction harmonique à l'intérieur de chaque composante connexe de σ. Désignons par $H(p)$ la fonction limite dans $s_0^{r'}$. Il est alors aisé de voir que $H(p)$ prend la valeur nulle sur ∂W_0 et la valeur un sur les $\gamma_i^{r'}$ $(i=1, \dots, n)$. Par suite, on a l'égalité

$$h^{r'}(p)=H(p)$$

dans $s_0^{r'}$. Ceci signifie que l'énoncé est vrai certainement.

En suite, en prenant un nombre r' plus grand que r_0 et une rétraction analytique ζ_0 autour de $S_0^{r'}$ définié dans un voisinage V de $S_0^{r'}$, on forme un tube normal Σ_Γ autour de S_0 de manière que, pour toute surface première S_z dans Σ_Γ, $\zeta({}_0S_z \cap V)$ contienne $S_0^{r_0}$, où Γ est la partie de la surface analytique $L_0 = \zeta_0^{-1}(P_0)$ donnée par $|f - a_0| < \rho$. Posons $\Sigma_\Gamma^0 = \zeta_0^{-1}(S_0^{r_0}) \cap \Sigma_\Gamma$, $P_z = L_0 \cap S_z$, $W_z = \zeta_0^{-1}(W_0) \cap S_z$, $\partial W_z = \zeta_0^{-1}(\partial W_0) \cap S_z$ et $\gamma_{zi}^r = \zeta_0^{-1}(\gamma_i^0) \cap S_z$ $(i = 1, \dots, n)$, où S_z est une surface première de f avec une valeur z, dans Γ^*: $|z - a_0| < \rho$, dans Σ_Γ. Prenons un nombre positif r plus grand que r_0, mais d'ailleurs quelconque. On désigne par S_z^r la composante irréductible de $S_z \cap Q^r$ contenant P_z et par γ_{zi}^r $(i = 1, \dots, n)$ les composantes de frontière de S_z^r correspondant aux γ_{zi}^0 respectivement. Posons $s_z^0 = S_z^0 - W_z$ et $s_z^r = S_z^r - W_z$. Alors, on peut former, pour chaque s_z^r, une fonction $h^r(p, z)$ continue dans $\bar{s}_z^r$ et harmonique dans s_z^r telle que l'on ait $h^r(p, z) = 0$ sur ∂W_z et $h^r(p, z) = 1$ sur les γ_{zi}^r $(i = 1, \dots, n)$.

On peut ici dire que

Pour le nombre r fixé, la fonction $h^r(p, z)$ est continue par rapport à p et z.

En effet, prenons une surface première $S_{z'}$ dans Σ_Γ arbitrairement. Alors, en prenant un nombre r' $(r < r')$ et une rétraction analytique ζ' autour de $S_{z'}$, on a, pour chaque surface première S_z dans Σ_Γ, une transformation analytique et biunivoque ϕ_z de S_z^r sur une partie σ_z sur $S_{z'}$, pourvu que l'on ait $|z - z'| < \varepsilon$, où ε est un nombre positif suffisamment petit. Cela posé, lorsqu'on prend une suite de points z_j $(j = 1, 2, \dots)$, tels que $0 < |z - z'| < \varepsilon$, tendant vers z', mais d'ailleurs quelconque, on peut en extraire une suite partielle z_ν $(\nu = j_1, j_2, \dots)$ telle que σ_{z_ν} tende vers une partie σ_0 dans $S_{z'} \cap Q^{r'}$. $s_{z'}^r$ est la composante irréductible de σ_0 contenant $P_{z'}$. Donc, le raisonnement précédent montre aussi que la suite de fonctions $h^r(\phi_{z_\nu}^{-1}(p), z_\nu)$ $(\nu = j_1, j_2, \dots)$ tend uniformément vers la fonction $h^r(p, z')$ à l'intérieur de $s_{z'}^r$. Ceci signifie que $h^r(p, z)$ est continue par rapport à deux variables complexes.

Posons, enfin

$$\varepsilon(r) = \max h^r(p, z),$$

où max est pris pour toutes les valeurs z dans Γ^* et pour tous les points p de s_z^0. Alors, il est aisé de voir que

Lorsque r s'augmente indéfiniment, $\varepsilon(r)$ tend toujours vers zéro.

19. Fonction adjointe locale. A toute surface première S d'une fonction f de la classe (A), correspond une surface de Riemann compacte R de genre fini g et un nombre fini de points q_i $(i=1, \ldots, n)$ sur R tels que, en posant $R^0=R-(\cup q_i)$, on puisse faire correspondre la surface première S, regardée la comme une surface de Riemann, à R^0 d'une façon analytique et biunivoque. Cette R est unique à l' équivalence analytique près. Donc, on la désignera par $\bar{S}$ et, en identifiant S avec R^0, on regardera S comme une partie de $\bar{S}$. On dira que q_i $(i=1, \ldots, n)$ sont les points à l'infini de S.

Une fonction φ méromorphe sur S sera dite algébrique sur S si elle peut se prolonger en une fonction méromorphe sur tout $\bar{S}$. Une fonction $\varphi(x, y)$ méromorphe dans tout l'espace de x et y sera appelée *fonction adjointe à* $f(x, y)$ si l'on a

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

et si la restriction de $\varphi(x, y)$ à toute surface première S de f est algébrique sur S. Lorsqu'on considère un tube normal Σ_Γ, une fonction φ méromorphe dans Σ_Γ sera appelée *fonction adjointe locale à f dans Σ_Γ* s'il en est ainsi dans tout Σ_Γ. Dans la section actuelle, on verra que l'on peut toujours former une fonction adjointe locale à f dans le tube normal considéré dans la section précédente.

En concervant les notations dans la section précédente, on suppose, de plus, qu'aucun des P_z $(z\in\Gamma^*)$ n'est point de Weierstrass de $\bar{S}_z$. Posons $W=\zeta_0^{-1}(W_0)\cap\Sigma_\Gamma$ et $w=w_0\cdot\zeta_0$. Par définition, w est une fonction holomorphe dans W. On désigne par w_z la restriction de w à $S_z\cap W$. Dans la dernière section de la partie II, on a formé une fonction $\varphi(x, y)$ comme ce qui suit:

Pour toute surface première S_z de f dans Σ_Γ, la restriction de φ à S_z est algébrique et satisfait aux conditions (K) par rapport à w_z;

c'est-à-dire elle a son seul pôle d'ordre $g+1$ en P_z, en lequel elle est de la forme

$$\varphi(w_z, z)=\frac{1}{w_z^{g+1}}+\frac{a_1}{w_z^g}+\cdots+\frac{a_g}{w_z}+\Phi(w_z, z)$$

où $\Phi(w_z, z)$ est une fonction holomorphe par rapport à w_z, s'annulant en P_z.

D'après le corollaire 3 du théorème 3, φ est continue par rapport à deux variables complexes dans tout Σ_Γ sauf aux pôles Γ. Nous allons indiquer que la fonction φ est méromorphe par rapport à deux variables complexes dans tout Σ_Γ. D'après le théorème bien connu dû à *Hartogs*, il suffit, pour cela, de voir que, $\mathfrak{L}^0$ étant une partie ouvert de s_0^0 et en posant $\mathfrak{L}=\zeta_0^{-1}(\mathfrak{L}^0)\cap\Sigma_\Gamma$, la fonction φ est holomorphe par rapport à deux variables complexes dans le domaine $\mathfrak{L}$.

D'autre part, on a, en général, le

Lemme 6. *Considérons, dans l'espace de w et z, un dicylindre (Δ_1, Δ_2) de la forme $|w|<b_1$, $|z|<b_2$ et une fonction continue $\Psi(w, z)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. *Pour tout z' fixé dans Δ_2, $\Psi(w, z')$ est holomorphe par rapport à w dans Δ_1.*
2. *Pour tout nombre positif ε, quelque petit qu'il soit, et pour tout nombre positif η' plus petit que l'unité, on peut déterminer un nombre fini de points z_j $(j=1, \ldots, l)$ dans Δ_2 et, $z=\lambda(r)$ étant représentation conforme au sens de Riemann de la partie de Δ_2 obtenue par l'exception de ces points z_j sur le cercle unité $\mathfrak{C}$: $|t|<1$ dans le plan d'une variable complexe t, on peut trouver une fonction holomorphe $\Psi^*(w, t)$ dans $(\Delta_1, \mathfrak{C}')$, où $\mathfrak{C}'$: $|t|<\eta'$, telle que l'on ait*

$$|\Psi(w, \lambda(t))-\Psi^*(w, t)|<\varepsilon$$

dans $(\Delta_1, \mathfrak{C}')$.

Alors, $\Psi(w, z)$ est holomorphe dans (Δ_1, Δ_2).

Ceci est facilement démontré selon l'idée que l'on a donnée dans la section 6 du mémoire II[20].

20) loc. cit., pp. 248–251.

Il s'agit donc du passage au domaine algébrique. D'après l'hypothèse, il n'est pas besoin dans le présent cas de former un revêtement de type (g, n) au-dessus de Σ_Γ ni d'eu excepter les surface premières de f ayant des points singuliers dans Σ_Γ. Désignons par Σ_Γ^r l'ensemble de tous les points qui se trouvent sur quelqu'une des S_z^r $(r_0<r,\ z\in\Gamma^*)$. Alors, en prenant un nombre fini au plus de points convenables z_j $(j=1, \ldots, l)$, et en représentant conformément au sens de Riemann $\Gamma^*-(\cup z_j)$ sur le cercle unité $\mathfrak{C}$: $|t|<1$ ans le plan de t, on peut former un domaine algébrique $\mathfrak{B}^0$ étalé au-dessus de $(C, \mathfrak{C}')$, où C est le tout le plan $|x|<\infty$ et $\mathfrak{C}'$ est un cercle de la forme $|t|<\eta'$ $(\eta'<1)$, de manière que

1. Pour tout t' dans $\mathfrak{C}'$, la section $\mathfrak{B}^0(t')$ de $\mathfrak{B}^0$ par la droite analytique $t=t'$ soit non singulière, algébrique et de type (g, n):
2. Il y ait une partie Ω^0 dans $\mathfrak{B}^0$ et une transformation analytique ϕ de Ω^0 dans Σ_Γ^r telles qu'á toute section $\Omega^0(t')$ $(t'\in\mathfrak{C}')$ corresponde $S_{z'}^r$, par ϕ d'une façon analytique et biunivoque, où $z'=\lambda(t')$.

Maintenant, désignons par Γ_0 l'image inverse de Γ par ϕ et par Ω_0^0 celle de Σ_Γ^0 par ϕ. Posons $P_t^0=\Gamma^0\cap\mathfrak{B}^0(t)$ et $w_t^0=w_z\cdot\phi$, où $z=\lambda(t)$. Alors, d'après le corollaire 2 du théorème 2, aucun point P_t^0 n'est point de Weierstrass de $\mathfrak{B}^0(t)$ dès que r surpasse un certain nombre r^*. Par suite, on peut former une fonction $\varphi^*(p, t)$ sur $\mathfrak{B}^0$ telle que, pour tout t' fixé dans $\mathfrak{C}'$, $\varphi^*(p, t')$ soit une fonction méromorphe sur $\mathfrak{B}^0(t')$ $(t'\in\mathfrak{C}')$ tout entière les points à l'infini compris satisfaisant aux conditions (K) par rapport à w_t.

Comme on a dit précédemment, la fonction $\varphi^*(p, t)$ est méromorphe sur tout $\mathfrak{B}^0$ par rapport à deux variables, puisque $\mathfrak{B}^0$ est algébrique.

Prenons une partie ouverte quelconque $\mathfrak{Q}^0$ de s_0^0 et dénotons $\mathfrak{Q}^*$ l'image inverse de $\mathfrak{Q}^0$ par la transformation analytique $\zeta_o\cdot\phi$ de Ω_0^0 dans $S_0^{r_0}$. Alors, d'après le corollaire 3 du théorème 3, on a l'inégalité

$$|\varphi^*(p, t)-\varphi(p, \lambda(t))|<\varepsilon(r)\cdot K_3$$

dans $\mathfrak{Q}^*$.

D'après ce qu'on a dit jusqu'ici, on a le

Théorème II. *La fonction $\varphi(p, z)$ est méromorphe par rapport* *à deux variables dans tout* Σ_Γ.

Considérons, mainetenant, la transformation T définie par les fonctions

$$z=f(x, y) \qquad \text{et} \qquad w=\varphi(x, y).$$

Elle transforme Σ_Γ sur un domaine multivalent D étalé au-dessus du domaine produit $(\Gamma^*, \bar{C})$, où $\Gamma^*: |z-a_0|<\rho$ et $\bar{C}: |w|\leqq\infty$. Soit Ξ_i $(i=1, \dots, n)$ les composantes connexes de la frontière de D située au-dessus de $(\Gamma^*, \bar{C})$. Évidemment, les projections de Ξ_i dans $(\Gamma^*, \bar{C})$ sont représentées sous la forme $w=\zeta_i(z)$, où ζ_i $(i=1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions holomorphes dans Γ^*, puisque Σ_Γ est un domaine pseudoconvexe et T est une transformation analytique. Donc, on a un domaine algébrique D^* étalé au-dessus de $(\Gamma^*, \bar{C})$ par l'adjoinction de Ξ_i $(i=1, \dots n)$ à D. Dans D^*, Ξ_i sont des surfaces analytiques.

Une fois que l'on a établi un moyen de former un domaine algébrique D^* pour le tube normal Σ_Γ, on peut facilement trouver, en vertu de la théorie classique, diverses fonctions adjointes à f dans Σ_Γ. Par exemple, Formons une fonction Ψ méromorphe sur tout D^* ayant ses pôles effectivement sur toutes les Ξ_i $(i=1, \dots, n)$ mais seulement sur elles. Ceci est toujours possible pourvu que l'on y donne des ordres de pôle suffisamment grands. Alors, on a une fonction adjointe holomorphe de f dans Σ_Γ par la composition $\Psi\cdot T$.

20. Irrégularité des surfaces premières de f. Rappelons ici la notion d'irrégilarité des surfaces premières d'une fonction entière f. Comme on l'a vu dans la section 8 du mémoire II,[21] toute fonction entière f qui n'a aucune surface première irrégulière de type (B) admet une décomposition

$$f(x, y)=F(f_0(x, y)),$$

où F est une fonction entière d'une variable complexe et f_0 est celle de x et y telle que, pour tout nombre complexe c, toutes les composantes irréductibles de la surface entière donnée par l'équation $f_0-c=0$

21) loc. cit., p. 264.

sont conjuguées de type (α) l'une à l'autre deux à deux au sens du mémoire I.[22] Cette condition-ci est appelée *propriété* (U). On va finalement montrer qu'aucune fonction appartenant à la classe (A) n'a de surface première irrégulière de type (B).

Supposons ici, pour réduire à l'absurde, qu'une fonction f de la classe (A) a une surface première S' irrégulière de type (B). Alors, comme on l'a vu dans la section 15 du mémorire I, il y a, dans un tube normal quelconque autour de S', une famille continue de surfaces premières irrégulières de type (B).[23] Par suite, il est aisé de voir qu'il y a au moins une surface première S_0 de f irrégulière de type (B), d'ordre un, telle que

1. Il y ait une surface première S'_0 de f d'ordre un qui est conjuguée de type (B) à S_0.
2. On puisse prendre un tube normal autour de S_0 de mainère que toute surface première S_z de f dans le tube normal soit non singulière et de type (g, n).

Prenons deux tubes normaux Σ_Γ et $\Sigma_{\Gamma'}$ autour de S_0 et de S'_0 respectivement définis par la même inégalité $|f-a_0|<\rho$, où a_0 est la valeur prise par f sur S_0, et ρ est un nombre positif convenable. On suppose que Σ_Γ satisfait à la condition 2 ci-dessus. Désignons par $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ les parties de Γ et Γ' contenues dans $\Sigma_{\Gamma'}$ et Σ_Γ respectivement.

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction adjointe holomorphe locale à f dans Σ_Γ telle que, pour toute surface première S_z de f dans Σ_Γ, la restriction de φ à S_z prenne ses pôles de même ordre effectivement et seulement en tous les points à l'infini de S_z. Comme on l'a dit à la fin de la section précédente, elle existe certainement en diminuant, si nécessaire, ρ suffisamment. Cela étant, considérons la restriction $\varphi^*(p)$ de φ à Γ'. Elle est holomorphe dans $\mathfrak{C}'$. Je dis ici que

La fonction $\varphi^*(p)$ a la valeur infinie en tous les points sur la frontière de $\mathfrak{C}'$ situés à l'intérieur de Γ'.

En effet, soit p'_0 un point frontière de $\mathfrak{C}'$ à l'intérieur de Γ' en lequel f prend une valeur a_1 et soient S_1 et S'_1 deux surfaces premières

22) loc. cit., pp. 62–64.
23) loc. cit., p. 27.

de f avec la valeur a_1 qui appartiennent à Σ_Γ et à $\Sigma_{\Gamma'}$ respectivement. Alors, elles sont conjuguées l'une à l'autre et elles ne se rencontrent jamais puisque S_1 est non singulière. Soit M un nombre positif quelconque et, pour chaque surface première S_z de f dans Σ_Γ, soit S_z^* la partie de S_z données par l'inégalité $|\varphi|<M$. Il est évident par hypothèse que $S_{a_1}^*$ est bornée en module. Prenons, ensuite, une hypersphère Q^r de la forme $|x|^2+|y|^2<r^2$ de manière que, S_z^r étant la composante irréductible de $S_z \cap Q^r$ contenant $S_z \cap \Gamma$, $S_{a_1}^r$ contienne $S_{a_1}^*$ et que la frontière de $S_{a_1} \cap Q^r$ consiste en courbes simples fermées. Alors, il y a un nombre positif ε tel que, pour tout z satisfaisant à l'inégalité $|z-a_1|<\varepsilon$, S_z^r contienne S_z^* et que S_z^r ne rencontre jamais Γ'. Ceci singifie que l'on a l'inégalité

$$|\varphi^*(p)|>M$$

dans la partie de $\mathfrak{C}'$ donnée par $|f-a_1|<\varepsilon$. Donc l'énoncé a été certainement démontré.

D'après cet énoncé-ci et d'après le théorème de Radó, on peut dire que la frontière de $\mathfrak{C}'$ à l'intérieur de Γ' ne contient aucun ensemble continu.[24] Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

Donc, on a le

Théorème III. *Aucune fonction de la classe* (A) *n'a de surface première irrégulière de type* (B).

Soit $f(x, y)$ une fonction entière de x et y telle que toute sa surface première S soit donnée par zéro d'un polynôme qui puisse dépendre de S. D'après la définition, elle appartient à la classe (A). Donc, il y a une décomposition

$$f(x, y)=F(f_0(x, y)),$$

ou f_0 a la propriété (U). En ce moment, on peut dire que

f_0 *est un polynôme.*

En effet, en vertu de la propriété (U), si une surface première

24) loc. cit., p. 271.

de f_0 avec une valeur a est régulière au sens du mémoire I, la surface définie par

$$f_0(x, y) - a = 0$$

est irréductible et par suite elle est donnée par zéro d'un polynôme. Or, il y a, d'après le théorème 2 du mémoire I, beacoup de surfaces premières règuliéres de f. Le théorème de Picard montre que f est nécessairement un polynôme. En résumé,

Une fonction entière de x et y telle que toute sa surface première soit donnée par zéro d'un polynôme n'est qu'une composition d'un polynôme de x et y et d'une fonction entière d'une variable complexe.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY