J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-3 (1973) 489-496

Sur les polynômes exponentiels

Par

Keiichiro KITAGAWA

(Communiqué par Professeur Mizohata, le 15 Octobre 1972)

1. Introduction. D'après un théorème dû à Ritt, une fonction entière d'une variable complexe, quotient de deux polynômes exponentiels, est elle-même un polynôme exponentiel. Lax et puis Allen Shields ont donné d'autres démonstrations. Allen Shields, avec sa méthode, a généralisé le théorème. Le but de cette note est de voir que sa méthode s'applique au cas de plusieurs variables complexes.

2. Notations et Définitions. Les points de C^n seront désignés par $(z)=(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $(a)_j=(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ $: j=1, 2, \dots, p.$, etc. Pour deux points (z), (w) de C^n, on posera

$$(z)\pm(w)=(z_1\pm w_1, z_2\pm w_2, \dots, z_n\pm w_n),$$
$$<(z), (w)>=z_1w_1+z_2w_2+, \dots, +z_nw_n.$$

Pour un multiindice $(m)=(m_1, m_2, \dots, m_n)$, où les m_i sont des entiers non négatifs, on posera

$$(m)!=m_1!m_2!, \cdots, m_n!;\ (z)^{(m)}=z_1^{m_1}z_2^{m_2}, \dots, z_n^{m_n}.$$

On posera aussi

$$(1)=(1, 1, \dots, 1), \quad (m)+(1)=(m_1+1, m_2+1, \dots, m_n+1).$$

Un polynôme exponentiel est, par définition, la fonction de la forme

$$f((z))=\sum_{j=1}^{p} a_j \exp<(a)_j, (z)>,$$

où les a_j de C^1 et les $(\alpha)_j$ de C^n sont des constantes; $j=1, 2, \cdots, p$. Un polynôme exponentiel avec coefficients polynômes est, par définition, la fonction de la forme

$$f((z))=\sum_{j=1}^{p} p_j((z)) \exp <(\alpha)_j, (z)>,$$

où les $(\alpha)_j$ de C^n sont des constantes et que les $p_j((z))$ sont des polynômes en (z): $j=1, 2, \cdots, p$.

3. Transformation de Fourier-Borel et Représention de Pôlya. On se contente de les énoncer sous forme de lemme.

Lemme 1. (Transformation de Fourier-Borel)

Soit $f((z))=\sum_{(m)} \frac{a_{(m)}}{(m)!}(z)^{(m)}$ *une fonction entière de type* $(1, \alpha)$. *Alors la fonction définie par l'intégrale*

$$F((w))=\int_0^{\infty}, \ldots, \int_0^{\infty} f((t)) \exp(-<(w), (t)>) dt_1, \ldots, dt_n$$

est holomorphe dans $\Omega_0=\{(w);\ Re\ w_i>\alpha,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ *et elle y est reprérentée par la série*

$$F((w))=\sum_{(m)} \frac{a_{(m)}}{(w)^{(m)+(1)}}=\frac{1}{(w)^{(1)}} \sum_{(m)} \frac{a_{(m)}}{(w)^{(m)}},$$

absoluement convergeante dans $\Omega_1=\{(w);\ w_i>\sqrt{n}\ \alpha,\ i=1,2,\ldots,n\}$.
La fonction F prolongée analytiquement par cette série est appelée la transformée de Fourier-Borel de f.

Lemme 2. (Représentation de Pôlya)

Soit $F((w))=\frac{1}{(w)^{(1)}} \sum_{(m)} \frac{a_{(m)}}{(w)^{(m)}}$ *une série absoluement convergeante dans* $\Omega=\{(w);\ |w_i|>r,\ i=1, 2, \ldots, n\}$.
Alors la fonction

(I) $$f((z))=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}, \ldots, \int_{C_n} F((w)) \exp <(w), (z)> dw_1, \ldots, dw_n,$$

où $C_i=\{w_i;\ |w_i|=r_i^*>r\}$: $i=1, 2, \ldots, n,$

est définie dans C^n, *indépendamment du choix de* $(r^*)=(r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*)$; $r_i^*>r$, $i=1, 2, \dots, n$, *et elle est représentée par la série entière absolument convergeante dans* C^n

$$f((z))=\sum_{(m)}\frac{a_{(m)}}{(m)!}(z)^{(m)}.$$

En plus, la fonction f *est de type* $(1, \alpha)$ *où* $\alpha<nr$.
L'intégrale au deuxième membre de (I) est appelée la représentation de Pôlya de F.
On voit immédiatement que la représentation de Pôlya de la transformée de Fourier-Borel d'une fonction f entière de type exponentiel de type fini est f elle-même.

Lemme 3.

Soient f, g *des fonctions entières de type* $(1, \alpha)$, $(1, \beta)$ *respectivement et* $h=fg$, *produit de ces deux fonctions. Soient* F, G, H *les transformées de Fourier-Borel de* f, g, h *respectivement. Alors pour tout* $\varepsilon>0$ *donné, on a dans* $\Omega_\varepsilon=\{(w);\ |w_i|>\sqrt{n}\,(\alpha+\beta)+\varepsilon,\ i=1, 2, \dots, n\}$

$$H((w))=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}, \dots, \int_{C_n} G((\xi))\,H((w)-(\xi))\,d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_n,$$
$$\text{où } C_i=\{\xi_i;\ |\xi_i|=\sqrt{n}\,\alpha+\varepsilon\};\ i=1, 2, \dots, n.$$

On cite ici un théorème sur les quotients de deux fonctions entières de type exponentiel de type fini.

Lemme 4. (**dû à M. Avanissian**)

Soient f, g *des fonctions entières de type* $(1, \alpha)$, $(1, \beta)$ *respectivement telles que leur quotient* $h=f/g$ *soit entière. Alors* h *est elle-même de type fini* $(1.\gamma)$ *où* γ *est majoré par*

$$\gamma\leqq(1+\lambda)\alpha+(1+\lambda)\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2-1\right)\beta: \text{ celle-ci pour tout } \lambda>0.$$

4. Polynômes exponentiels.

Théorème.

Soient f et g un polynôme exponentiel avec coefficients polynômes et un polynôme exponentiel respectivement tels que leur quotient $h=f/g$ soit une fonction entière. Alors h est elle-même un polynôme exponentiel avec coefficients polynômes. Si, en particulier, f est un polynôme exponentiel, h l'est aussi.

Démonstration.

$$\text{Soient } f((z))=\sum_{j=1}^{q} P_j((z))\exp\langle(\beta)_j,(z)\rangle$$

$$\text{où } P_j((z))=\sum_{(m)_j} b_{(m)_j}(z)^{(m)_j},\ j=1,2,\ldots,q.$$

$$\text{et } g((z))=\sum_{j=1}^{p} a_j \exp\langle(\alpha)_j,(z)\rangle.$$

En effectuant, si l'on a besoin, une transformation affine propre dans l'espace C^n de (z), on peut bien supposer

$$\alpha_{ji}\neq\alpha_{ki}\,;\ j\neq k,\quad j,k=1,2,\ldots,p,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

D'après le lemme 4., on sait que h est de type exponentiel de type $(1,\gamma)$. Soient F, G et H les transformées de Fourier-Borel de f, g et h respectivement. Alors, d'après le lemme 1, en effectuant le calcul de l'intégrale, on a

$$\text{(II)}\qquad F((w))=\sum_{j=1}^{q}\sum_{(m)_j}\frac{b_{(m)_j}}{((w)-(\beta)_j)^{(m)_j+(1)}},\ \text{qui est holomorphe}$$

dans $\Omega_F=\{(w);\ |w_i|>\sqrt{n}\,\beta,\ i=1,2,\ldots,n.$ où β est le type de $f\}$,

$$G((w))=\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{((w)-(\alpha)_j)},$$

et $H((w))$ est holomorphe dans $\Omega_H=\{(w);\ |w_i|>\sqrt{n}\,\gamma,\ i=1,2,\ldots,n\}$. Et l'on a, d'après le lemme 3, par un calcul des résidus,

$$\text{(III)}\qquad F((w))=\sum_{j=1}^{p} a_j H((w)-(\alpha)_j)\qquad \text{dans } \Omega,$$

où $\Omega=\{(w);\ |w_i|\geqq R,\ i=1, 2, \dots, n,$ avec un $R>\sqrt{n}(\beta+\gamma)\}$.
On va voir ci-après que H se prolonge analytiquement, tout en satisfaisant l'égalité (III), dans tout C^n en une fonction méromorphe de type de deuxième membre de (II).

Lemme 5.

Soient $H(z,(w))$ une fonction holomorphe dans $\Omega\times\Omega^*$, où $\Omega=\{z;\ |z|>R\}$ et $\Omega^*=\{(w);\ |w_i|>R_i^*,\ i=1, 2, \dots, n\}$, *et* $F(z,(w))=\sum_{j=1}^{q}\frac{f_j((w))}{(z-\beta_j)^{m_j}}$ *où $f_j((w))$; $j=1, 2, \dots, q$, sont des fonctions holomorphes dans Ω^*. Si l'on a, dans $\Omega\times\Omega^*$, l'égalité*

$$\text{(IV)} \qquad F(z,(w))=\sum_{j=1}^{p} a_j\, H(z-\alpha_j, (w)-(\alpha)_j)$$

où l'on suppose $\alpha_j\neq\alpha_k$; $j\neq k$, $j, k=1, 2, \dots, p$.
Alors $H(z, (w))$ se prolonge analytiquement, tout en satisfaisant l'égalité (IV), dans $C\times\Omega^{**}$; $\Omega^{**}=\{(w);\ |w_i|\geqq R_i^{**},\ i=1, 2, \dots, n\}$, en une fonction méromorphe telle que $P(z)H(z,(w))$ y soit holomorphe avec un certain polynôme en z; $P(z)=\prod_{j=1}^{r}(z-\gamma_j)^{m_j}$.

En effet, on remarque d'abord la propriété géométrique suivante : ——*Si, pour un nomber positif r donné, on a l'inégalité*

$$|z+t\, a_j|\geqq r, \text{ pour tout } z;\ |z|=r,\ c\leqq\arg z\leqq d,$$

pour tout t; $0\leqq t\leqq 1$, et pour tout j; $j=1, 2, \dots, m$, alors il existe un nombre positif S tel qu'on a l'inégalité

$$|z+a_j|\geqq r, \text{ pour tout } z;\ r-S\leqq|z|,\ c\leqq\arg z\leqq d,$$

et pour tout j; $j=1, 2, \dots, m$. Et ce nombre S est uniformément minoré pour tout r; $r\leqq R_0$, par

$$S\geqq\frac{a^2}{2R_0+a};\ \text{où } a=\operatorname{Inf}\{|a_j|;\ j=1, 2, \dots, m\}. \text{ ——}$$

Ayant ainsi remarqué, on choisit alors

$S=\frac{a^2}{2R+a}$ où $a=\mathrm{Inf}\{|a_j-a_k|;\ j\neq k,\ j,k=1,2,\ldots,p\}$

N: un nombre entier majorant R/S

$b_i=2\ \mathrm{Sup}\ |a_{ji}|;\ j=1,2,\ldots,p;\ i=1,2,\ldots,n$

et $R_i^{**}=R_i^*+Nb_i;\ i=1,2,\ldots,n.$

Soit d'autre part P le polygone convexe le plus petit sur le plan complexe de z contenant tous les a_j; $j=1,2,\ldots,p$. Soit a_{j_k}: $k=1,2,\cdots,s$, les a_j formant les sommets de P, comptés d'un certain a_{j_1} au sens (inverse) de l'aiguille de montre si P ne contient pas (contient, respectivement) l'origine dans son intérieur. Soient δ_k les angles formés de l'axe réel positif et de OP_k, (comptés du premier); $k=1,2,\ldots,s$, où chaque OP_k est la demi-droite partant de l'origine, parpendiculaire à la côté $a_{j_k}a_{j_{k+1}}$ et qui ne se croise pas à la droite portant cette côté-ci. On choisit ici a_{j_1} de sorte que δ_1 soit le plus petit. Alors on a

$$\delta_1<\delta_2<,\ \ldots,\ <\delta_s<\delta_1+2\pi\equiv\delta_{s+1}.$$

Et l'on a, pour tout k fixé; $k=1,2,\ldots,s$, l'inégalité valable pour tout z; $\delta_k\leqq\arg z\leqq\delta_{k+1}$, pour tout t; $0\leqq t\leqq 1$, et pour tout j; $j\neq j_k$, $j=1,2,\ldots,p$,

$$|z+t(a_{j_k}-a_j)|\geqq|z|.$$

Donc d'après la remarque faite ci-dessus, l'on a, pour tout k fixé; $k=1,2,\ldots,s$, et pour tout r fixé; $0\leqq r\leqq R$, l'inégalité valable pour tout z; $r-S\leqq|z|$, $\delta_k\leqq\arg z\leqq\delta_{k+1}$, et pour tout j; $j\neq j_k$, $j=1,2,\ldots,p$,

$$|z+a_{j_k}-a_j|\geqq r. \tag{V}$$

Or (IV) s'écrit pour chaque k; $k=1,2,\ldots,s$,

$$\begin{aligned}H(z,(w))=&\frac{1}{a_{j_k}}F(z+a_{j_k},(w)+(a)_{j_k})\\&-\frac{1}{a_{j_k}}\sum_{j\neq j_k}a_j\,H(z+a_{j_k}-a_j,\ (w)+(a)_{j_k}-(a)_j)\end{aligned} \tag{VI}$$

Soient alors $\Omega_{1k}=\{z;\ |z|\geqq R-S,\ \delta_k\leqq\arg z\leqq\delta_{k+1}\}$,

$$\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{s} \Omega_{1k} = \{z;\ |z| \geqq R-S\},$$

et $\Omega_1^* = \{(w);\ |w_i| \geqq R_i + b_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}$.

D'après (V), on sait que, pour chaque k fixé; $k=1, 2, \ldots, s$, pour tout $(z, (w))$ appartenant à $\Omega_{1k} \times \Omega_1^*$, et pour tout j; $j=1, 2, \ldots, p$, les points $(z + a_{j_k} - a_j,\ (\mathrm{w}) + (a)_{j_k} - (a)_j)$ sont dans $\Omega \times \Omega^*$. Par conséquent, le deuxième terme du deuxième membre de (VI) est holomorphe dans $\Omega_{1k} \times \Omega_1^*$, et l'on peut prolonger $H(z, (w))$ dans $\Omega_{1k} \times \Omega_1^*$ par le deuxième membre de (VI). $H(z, (w))$ n'a donc que des signularités provenues de celles de $F(z, (w))$. Et k étant arbitraire; $k=1, 2, \ldots, s$, on voit aisément que $H(z, (w))$ se prolonge analytiquement en une fonction univalente dans $\Omega_1 \times \Omega_1^*$, sauf des singularités provenues de celles de $F(z, (w))$. Il est alors aisé de voir, par récurrence, la conclusion du lemme 5.

Le lemme 5 étant ainsi établi, en revenant à la démonstration du théorème, on voit aisément que $H((w))$ se prolonge analytiquement, tout en satisfaisant l'égalité (III), dans C^n, en une fonction méromorphe telle que $P((w))H((w))$ soit entière avec un certain polynôme $P((w))$

(VII) $\qquad P(w)) = P_1(w_1) P_2(w_2), \ldots, P_n(w_n).$

Or, d'après le lemme 1, $H((w))$ est de la forme

$$H((w)) = \frac{1}{(w)^{(1)}} H^*((w));\ \text{où } H^*((w)) \text{ est holomorphe dans } \Omega_{\mathrm{H}}.$$

On voit alors facilement que $P((w))H((w))$ n'est qu'un polynôme $Q((w))$ et que $H((w))$ s'écrit

$$H((w)) = Q((w))/P((w)).$$

En appliquant le lemme 2, l'on a

$$h((z)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1}, \ldots, \int_{C_n} \frac{Q((w))}{P((w))} \exp <(z), (w)> dw_1, \ldots, dw_n.$$

Par un calcul des résidus de l'intégrale au deuxième membre, on voit que $h((z))$ est un polynôme exponentiel avec coefficients polynômes.

Si, en particulier, $f((z))$ est un polynôme exponentiel, alors on remarque $P_i(w_i)$ au deuxième membre de (VII) n'est que de la forme

$$P_i(w_i)=\prod_{j=1}^{p_i}(w_i-\gamma_{ji}):\ \text{où}\ \gamma_{ji}\neq\gamma_{ki};\ j\neq k,\ j,k=1,2,\cdots,p_i$$
$$\text{et}\ i=1,2,\ldots,n$$

Et on voit aisément que $h((z))$ est un polynôme exponentiel. c.q.f.d.

EHIME UNIVERSITY

Références

[1] Allen Shields: On quotients of exponential polynomials.: Comm. Pure. Appl. Math. Vol. **16**, 27–31 (1963).

[2] V. Avanissian: Fonctions plurisousharmoniques, différences de deux fonctions plurisousharmoniques de typ exponentiel.: C.R.A.S., Paris t. **252**. 499–500 (1961).

[3] P. D. Lax: The quotient of exponential polynomials.: Duke Math. J. Vol. **15**, 967–970 (1948).

[4] J. F. Ritt: A factorization theory for functions $\sum a_l\ e^{\alpha_i x}$: Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 29, 584–596, (1927).
On the zeros of exponential polynomials.: Trans, Amer. Math. Soc. Vol. **31**, 680–686. (1929).

[5] R. P. Boas: Entire functions.: Academic Press Inc. Publishers New-York. (1954).