J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
18-2 (1978) 353-375

Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateur de type "Schrödinger"

Par

PHAM THE LAI

(Communicated by Prof. S. Mizohata, June 1, 1977)

§0. Introduction

Ce travail est consacré à l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur:

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0+V$$

dans $\boldsymbol{R}^n$, où $\mathscr{A}_0$ est un opérateur différentiel d'ordre $2m$, à coefficients constants, formellement auto-adjoint et elliptique, et V un potentiel tel que $V(x)\geq 1$ et $\lim_{|x|\to\infty} V(x)=+\infty$.

Soit $N(\lambda)$ le nombre des valeurs propres de $\mathscr{A}$ qui sont plus petites ou égales à λ. Alors

$$N(\lambda)\sim l\phi(\lambda, V) \qquad \lambda \longrightarrow +\infty$$

où $\phi(\lambda, V)$ est la fonction:

$$\phi(\lambda, V)=\int(\lambda-V(x))_+^{n/2m}dx \tag{0.1}$$

(f_+ désigne la partie positive de f) et l est une constante qui dépend du symbole principal $\mathscr{A}'(\xi)$ de $\mathscr{A}$:

$$l=(2\pi)^{-n}\int_{\mathscr{A}'(\xi)\leq 1} d\xi. \tag{0.2}$$

Le cas de l'opérateur de Schrödinger, c'est-à-dire le cas $\mathscr{A}_0=$ Laplacien, a été étudié par G. V. Rosenbljum [5]. Notre travail généralise donc celui de [5].

Les hypothèses faites sur V sont celles de [5] et sont énoncées au §1.

La méthode utilisée pour étudier $N(\lambda)$ est la méthode variationnelle de R. Courant, développée dans les travaux de [1] [3] par exemple. Elle consiste à étudier un ''modèle qui est dans notre cas un opérateur $\mathscr{A}$ avec $\mathscr{A}_0$ homogène et

V un potentiel ayant une certaine régularité ponctuelle. Ce modèle est étudié au § 3. Nous passons au cas général par une méthode de perturbation décrite au § 5. C'est une perturbation dans les formes hermitiennes elles-mêmes. Elle est donc plus naturelle et plus simple que la méthode de [5] qui utilise la perturbation des opérateurs compacts. Auparavant, nous aurons besoin d'une caractérisation du domaine de l'opérateur $\mathscr{A}$, elle est donnée au § 4. La bibliographie donnée à la fin de ce travail est succinte; pour une bibliographie plus complète, nous renvoyons à celle de [5].

Le plan de ce travail est le suivant:

§ 1. Notation et énoncé du résultat
§ 2. Résultats auxiliaires
§ 3. Etude du modèle
§ 4. Domaine de l'opérateur
§ 5. Perturbation asymptotique de formes hermitiennes.

§ 1. Notations et Enoncé du Résultat

Pour un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^n$ et m entier ≥ 0, nous notons $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre m sur Ω et comme d'habitude $L_2(\Omega)$ l'espace $H^0(\Omega)$.

Pour $u \in H^m(\Omega)$ et $l=0,\dots, m$, nous notons la semi-norme

$$|u|^2_{H^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

où D^α est la dérivation

$$(-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

et $\| \ \|_{L_2(\Omega)}$ la norme de $L_2(\Omega)$ issue du produit scalaire usuel noté $< \ , \ >_{L_2(\Omega)}$.

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = |u|^2_{H^m(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Nous notons $H^m_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Lorsque $\Omega = \boldsymbol{R}^n$, nous notons H^m au lieu de $H^m(\boldsymbol{R}^n)$; de même, les notations $< \ , \ >, \int f(x)dx$, etc..

Suite à l'introduction, nous considérons un opérateur différentiel d'ordre $2m$ à coefficients constants

$$\mathscr{A}_0(D) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta}$$

avec $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\alpha\beta}}$ pour tout α, β; $\mathscr{A}_0(D)$ est donc formellement auto-adjoint.

Nous faisons l'hypothèse d'ellipticité suivante: il existe une constante $E>0$ telle que, pour tout système de nombres complexes $\tau = (\tau_\alpha)$, $|\alpha| = m$, nous avons:

$$(1.1) \qquad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \tau_\alpha \overline{\tau_\beta} \geq E \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\tau_\alpha|.$$

Il est clair que (1.1) entraîne la condition d'ellipticité usuelle:

$$\mathscr{A}'(\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \geq E|\xi|^{2m} \qquad \xi \in \boldsymbol{R}^n.$$

Considérons la forme intégro-différentielle sur $\boldsymbol{R}^n$:

$$a_0(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta v} \, dx$$

Puisque $\mathscr{A}_0(D)$ est formellement auto-adjoint, $a_0(u, v)$ est hermitienne sur $\mathscr{C}_0^\infty$. Comme $a_0(u, v)$ est continue sur $H^m \times H^m$ et $\mathscr{C}_0^\infty$ est dense dans H^m, $a_0(u, v)$ est hermitienne sur H^m.

D'après L. Gårding, la forme $a_0(u, v)$ est coercive sur H^m c'est-à-dire qu'il existe des constantes α, C positives telles que:

$$a_0(u, u) + \alpha\|u\|_{L_2}^2 \geq C\|u\|_{H^m}^2 \qquad u \in H^m. \tag{1.2}$$

Considérons un potentiel V sur $\boldsymbol{R}^n$, vérifiant:

$$\begin{gathered} V \in L_{\mathrm{loc}}^\infty, \qquad V \geq 1 \\ \lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Remarquons tout de suite que l'hypothèse $V \geq 1$ est faite par commodité; on peut seulement supposer que le potentiel V est borné inférieurement car on se ramène au cas précédent en changeant $\mathscr{A}_0$ par $\mathscr{A}_0 + \mathrm{cte}$.

Notons

$$H_V^m = \{u \in H^m;\ V^{1/2}u \in L_2\}.$$

C'est un espace de Hilbert avec la norme naturelle

$$\|u\|_{H_V^m}^2 = \|u\|_{H^m}^2 + \|V^{1/2}u\|_{L_2}^2.$$

Considérons la forme intégro-différentielle:

$$a_V(u, v) = a_0(u, v) + \int V u \bar{v} dx. \tag{1.4}$$

Elle est définie et continue sur $H_V^m \times H_V^m$.

Puisque V est réel, $a_V(u, v)$ est hermitienne sur H_V^m.

Elle est coercive sur H_V^m car de (1.2), nous avons:

$$a_V(u, u) + \alpha\|u\|_{L_2}^2 \geq C\|u\|_{H_V^m}^2 \qquad u \in H_V^m. \tag{1.5}$$

(Dans la suite, les constantes issues des majorations seront notées par la lettre générale C; par conséquent, différentes C se suivent sans être forcément égales).

Soit A l'opérateur non borné dans L_2, auto-adjoint, engendré par le triplet $(a_V(u, v); H_V^m, L_2)$. A est une réalisation auto-adjointe de l'opérateur différentiel $\mathscr{A}(\cdot, D) = \mathscr{A}_0(D) + V(\cdot)$ c'est-à-dire que, pour u du domaine de A, nous avons:

$$Au = \mathscr{A}(\cdot, D)u$$

au sens des distributions.

D'après (1.5), le spectre de A, qui est réel, est semi-borné inférieurement. Il est formé de valeurs propres réelles à multiplicités finies dont le seul point d'accumulation est $+\infty$ en vertu du:

Lemme 1.1. *L'injection de H_V^m dans L_2 est compacte, lorsque $m>0$.*

Preuve: Cela résulte de l'hypothèse (1.3). En effet, soit $(u_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ une suite bornée d'éléments de H_V^m. Il existe une sous-suite, notée encore $(u_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$, qui converge faiblement dans H_V^m vers une limite, notée u. Nous allons prouver qu'elle converge dans L_2 vers u.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\lim_{|x|\to\infty} V(x)=+\infty$, il existe $\rho(\varepsilon)>0$ tel que:

$$\int_{|x|>\rho(\varepsilon)} |u_k(x)-u(x)|^2 dx \le \varepsilon/2 \qquad k\in \boldsymbol{N}.$$

Dans la boule $B(\varepsilon)$ de centre 0, de rayon $\rho(\varepsilon)$, l'injection de $H^m(B(\varepsilon))$ dans $L_2(B(\varepsilon))$ est compacte car $m>0$. Il existe donc $k(\varepsilon)$ tel que:

$$\int_{|x|\le\rho(\varepsilon)} |u_k(x)-u(x)|^2 dx \le \varepsilon/2 \qquad k\ge k(\varepsilon).$$

Il en résulte que $\|u_k-u\|_{L^2}^2\le\varepsilon$ pour $k\ge k(\varepsilon)$, d'où le lemme.

Soit $(\lambda_j)_{j\in \boldsymbol{N}}$ la suite des valeurs propres de A, les valeurs propres étant rangées dans l'ordre croissant, répétées suivant la multiplicité. Notons

$$N(\lambda;A)=\sum_{\lambda_j\le\lambda} 1.$$

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur V.

Elles sont de deux sortes. La première est de caractère taubérien et concerne la fonction $\sigma(\lambda, V)=\mathrm{mes}\{x;\ V(x)<\lambda\}$.

La deuxième concerne des hypothèses locales ponctuelles et intégrales sur le potentiel V. Ces hypothèses sont:

(1.6) $$\sigma(2\lambda;V)\le C\sigma(\lambda;V)$$

pour λ suffisamment grand,

(1.7) $$V(x)\le CV(y)$$

presque partout, lorsque $|x-y|\le 1$,

(1.8) Il existe une fonction continue $\eta(t)\ge 0$, $0\le t\le 1$, $\eta(0)=0$ et un réel $\beta\in[0, 1[$ tels que:

$$\int_{\substack{|x-y|\le 1\\ |x+z-y|\le 1}} |V(x+z)-V(x)|dx \le \eta(|z|)\,|z|^\beta V(y)^{1+(\beta/2m)}$$

pour tout y, $z\in \boldsymbol{R}^n$, $|z|\le 1$.

Voici le résultat principal de ce travail:

Théorème 1.2. *Sous l'hypothèse* (1.1) *sur* $\mathscr{A}_0(D)$ *et les hypothèses* (1.3), (1.6), (1.7) *et* (1.8) *sur le potentiel* V, *nous avons*

$$N(\lambda;\, A) \sim l\phi(\lambda;\, V) \qquad \lambda \longrightarrow +\infty \tag{1.9}$$

où $\phi(\lambda;\, V)$ *et* l *sont définies par* (0.1) *et* (0.2).

(*Dans* (1.9), $f(\lambda) \sim g(\lambda)$ *signifie que* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = 1$).

Nous aurons besoin dans la suite du résultat technique suivant concernant la fonction $\phi(\lambda;\, V)$:

Lemme 1.3. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\phi(\lambda(1+\varepsilon);\, V) \leq (1 + C\sqrt{\varepsilon})^{n/2m} \phi(\lambda;\, V) \tag{1.10}$$

pour λ *suffisamment grand.*

Preuve: Il suffit de suivre la preuve du lemme 1.1 de [5]. On utilise seulement l'hypothèse (1.6) sur V.

§ 2. Résultats auxiliaires

2.1. Comparaison de formes hermitiennes

Soient $a(u, v)$ et $b(u, v)$ deux formes hermitiennes positives définies respectivement sur les domaines X et Y avec $X \subset Y$.

Soit Z un sous-espace de X. Pour $\lambda \in \boldsymbol{R}$, on note:

$$N(\lambda;\, a,\, b;\, Z) = \inf \operatorname{codim} \{U \subset Z;\, a(u, u) > \lambda b(u, u),\, u \in U\}$$

étant entendu que l'écriture $U \subset Z$ implique que nons prenons la codimension de L relativement à Z, c'est-à-dire la dimension du quotient Z/L.

Proposition 2.1. *Si* $Z_1 \subset Z_2 \subset X$, *alors*:

$$N(\lambda;\, a,\, b;\, Z_1) \leq N(\lambda;\, a,\, b;\, Z_2) \tag{2.1}$$

pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Preuve: Si le second membre de (2.1) est $+\infty$, c'est évident. Si non, pour $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace $U_2 \subset Z_2$ tel que

$$\operatorname{codim} U_2 = \dim Z_2/U_2 < N(\lambda;\, a,\, b;\, Z_2) + \varepsilon$$

et

$$a(u, u) > \lambda b(u, u) \qquad \forall u \in U_2.$$

Prenons $U_1 = U_2 \cap Z_1$.

Il reste, pour montrer (2.1), à vérifier que

$$\dim Z_1/U_1 \leq \dim Z_2/U_2. \tag{2.2}$$

Notons φ_i $(i=1, 2)$ la surjection canonique $Z_i \to Z_i/U_i$. On construit une application de Z_1/U_1 dans Z_2/U_2 de la manière suivante:

Soient $\xi \in Z_1/U_1$ et x un élément de Z_1 appartenant à la classe de ξ, on vérifie que la quantité $\eta = \varphi_2(x)$ est indépendante du choix de x car $Z_1 \subset Z_2$; on construit ainsi une application ψ en posant $\eta = \psi(\xi)$. ψ est injective car si $\psi(\xi)=0$ tout représentant x de ξ appartient à Z_1 et à U_2, donc à $U_2 \cap Z_1 = U_1$ ce qui entraîne que $\xi = 0$.

L'injectivité de ψ prouve (2.2), ce qui termine la preuve de la proposition.

Proposition 2.2. *Supposons que X muni de la forme $a(u, v)$ soit un espace de Hilbert. Soit X_0 un sous-espace fermé de X et X_1 l'orthogonal de X_0.*

Alors:

$$N(\lambda; a, b; X) \leq N((1+\varepsilon)\lambda; a, b; X_0) + N\Big(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\lambda; a, b; X_1\Big) \tag{2.3}$$

pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Preuve: On peut, comme avant, supposer que le second membre de (2.3) est fini. Notons $t = \lambda(1+\varepsilon)$ et $s = \dfrac{\lambda(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Pour $\delta > 0$, il existe des sous-espaces $U_0 \subset X_0$ et $U_1 \subset X_1$ tels que:

$$\begin{aligned} &\operatorname{codim} U_0 \leq N(t; a, b; X_0) + \frac{\delta}{2} \\ \text{et}\quad & \\ &a(u_0, u_0) > tb(u_0, u_0), \qquad u_0 \in U_0 \\ &\operatorname{codim} U_1 \leq N(s; a, b; X_1) + \frac{\delta}{2} \\ \text{et}\quad & \\ &a(u_1, u_1) > sb(u_1, u_1), \qquad u_1 \in U_1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considérons $U = U_0 \oplus U_1$.

Comme $X = X_0 \oplus X_1$, il est clair que l'on a:

$$\dim \frac{X}{U} = \dim \frac{X_0}{U_0} + \dim \frac{X_1}{U_1}.$$

Nous avons donc, en utilisant (2.4):

$$\operatorname{codim} U \leq N(t; a, b; X_0) + N(s; a, b; X_1) + \delta. \tag{2.5}$$

Pour $u \in L$, u s'écrit $u = u_0 + u_1$ avec $u_i \in U_i$ et on a:

$$a(u, u) = a(u_0, u_0) + a(u_1, u_1)$$

d'où, en utilisant (2.4) et le fait que $b(u, u)^{1/2}$ est une seminorme:

$$\frac{a(u,u)}{b(u,u)} > \frac{tb(u_0,u_0)+sb(u_1,u_1)}{(b(u_0,u_0)^{1/2}+b(u_1,u_1)^{1/2})^2} \qquad u\in U.$$

En utilisant l'inégalité:

$$(\alpha+\beta)^2 \leq (1+\varepsilon)\left(\alpha^2+\frac{1}{\varepsilon}\beta^2\right)$$

nous obtenons, de l'inégalité précédente:

$$a(u,u) > \frac{t}{1+\varepsilon}\, b(u,u) \qquad u\in U.$$

Comme $\dfrac{t}{1+\varepsilon}=\lambda$, nous obtenons (2.3) en utilisant (2.5) et en faisant δ vers 0.

2.2. Problème de Dirichlet et de Neumann sur un cube

Soit Q_ρ un cube de $\boldsymbol{R}^n$, de côté $\rho>0$.

Notons:

$$a_{Q_\rho}(u,v)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_{Q_\rho} a_{\alpha\beta}D^\alpha u\,\overline{D^\beta v}\,dx.$$

Grâce à l'hypothèse d'ellipticité (1.1), il est facile de voir que pour tout $\gamma>0$, la forme $a_{Q_\rho}(u,v)+\gamma<u,v>_{L_2(Q_\rho)}$ est fortement coercive sur $H^m(Q_\rho)$.

Notons:

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} N_\rho(\lambda;\gamma) &= N(\lambda;\, a_{Q_\rho}+\gamma,\ \|\ \|^2_{L_2(Q_\rho)};\, H^m(Q_\rho)) \\ N^0_\rho(\lambda;\gamma) &= N(\lambda;\, a_{Q_\rho}+\gamma,\ \|\ \|^2_{L_2(Q_\rho)};\, H^m_0(Q_\rho)). \end{aligned}$$

Ce sont respectivement les fonctions de répartition des valeurs propres des problèmes de Neumann et de Dirichlet sur le cube Q_ρ relatif à l'opérateur différentiel $\mathscr{A}'(D)+\gamma$.

Proposition 2.3. *Il existe des constantes $C>0$ et $\lambda_0>0$ telles que:*

$$\begin{aligned} &l(1-\varepsilon)^{n/2m}(\rho^{2m}(\lambda-\gamma)+1)_+^{n/2m} - C[\varepsilon^{-(n-1)/2m}(\rho^{2m}(\lambda-\gamma)+1)_+^{(n-1)/2m}+1] \\ (2.7)\quad &\leq N^0_\rho(\lambda;\gamma)\leq N_\rho(\lambda;\gamma) \\ &\leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}(\rho^{2m}(\lambda-\gamma)+1)_+^{n/2m} + C[\varepsilon^{-(n-1)/2m}(\rho^{2m}(\lambda-\gamma)+1)_+^{(n-1)/2m}+1] \end{aligned}$$

pour tout $\gamma>0$, $\rho>0$, $\varepsilon\in\,]0,1]$ et $\lambda\geq\lambda_0$.

Preuve: En utilisant la proposition 2.1, nous avons:

$$N^0_\rho(\lambda;\gamma)\leq N_\rho(\lambda;\gamma).$$

Montrons d'abord la dernière inégalité de (2.7).

Pour cela considérons l'espace $H^m_\#(Q_\rho)$ des fonctions de $H^m(Q_\rho)$ périodiques. On vérifie que l'on a:

$$(2.8)\qquad |N(\lambda;\, a_{Q_\rho},\ \|\ \|^2_{L_2(Q_\rho)};\, H^m_\#(Q_\rho)) - l\rho^n\lambda_+^{n/2m}| \leq C|\rho^{n-1}\lambda_+^{(n-1)/2m}+1|$$

pour tout λ.

Soit Z_ρ l'orthogonal de $H_0^m(Q_\rho)$ dans $H^m(Q_\rho)$, muni de la norme $a_{Q\rho}+\rho^{-2m}$. D'après G. Métivier [4] (voir aussi le cours [3] du CIME de C. Goulaouic qui traite le cas à bord régulier) nous avons, en notant $Q_1=Q$, $Z_1=Z$:

$$N(\lambda;\, a_Q+1,\ \|\ \|^2_{L_2(Q)};\, Z)\le C(\lambda_+^{(n-1)/2m}+1)$$

pour tout λ.

Il en résulte, par homothétie, que l'on a:

$$N(\lambda;\, a_{Q_\rho}+\rho^{-2m},\ \|\ \|^2_{L_2(Q_\rho)};\, Z_\rho)\le C(\rho^{n-1}\lambda_+^{(n-1)/2m}+1). \tag{2.9}$$

Nous allons maintenant comparer $H^m(Q_\rho)$ et $H^m_\sharp(Q_\rho)$.

Soient $X=H^m(Q_\rho)$, muni de la norme $a_{Q_\rho}+\dfrac{1}{\rho^{2m}}$ et $X_0=H^m_\sharp(Q_\rho)$.

Si X_1 est l'orthogonal de X_0 dans X, il est clair que:

$$X_1\subset Z_\rho.$$

Donc, d'après (2.1) et (2.9), nous avons:

$$N\Big(\lambda;\, a_{Q_\rho}+\frac{1}{\rho^{2m}},\ \|\ \|^2_{L_2(Q_\rho)};\, X_1\Big)\le C(\rho^{n-1}\lambda_+^{(n-1)/2m}+1)\,. \tag{2.10}$$

Pour $\varepsilon>0$, la proposition 2.2 et (2.8) (2.10) donnent, avec la notation (2.6):

$$\begin{aligned} N_\rho\Big(\lambda;\frac{1}{\rho^{2m}}\Big)\le{}& l\rho^n(1+\varepsilon)^{n/2m}\lambda_+^{n/2m}\\ &+C[\rho^{n-1}(1+\varepsilon)^{(n-1)/2m}\lambda_+^{(n-1)/2m}+1]\\ &+C\Big[\rho^{n-1}\Big(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{(n-1)/2m}\lambda_+^{(n-1)/2m}+1\Big]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comme:

$$N_\rho(\lambda;\gamma)=N_\rho\Big(\lambda+\frac{1}{\rho^{2m}}-\gamma;\frac{1}{\rho^{2m}}\Big).$$

Nous obtenons facilement la dernière inégalité de (2.7) en utilisant (2.11).

Pour montrer la première inégalité de (2.7), on compare $H_0^m(Q_\rho)$ et $H^m_\sharp(Q_\rho)$ de manière analogue, en utilisant encore (2.8), (2.9) et les propositions 2.1 et 2.2.

§3. Etude du modèle

Nous considérons dans ce paragraphe le cas où $\mathscr{A}_0(D)$ est homogène c'est-à-dire que:

$$\mathscr{A}_0(D)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^{\alpha+\beta}$$

et le cas où le potentiel V possède une régularité ponctuelle.

Soit Ξ un réseau laticiel de cubes unités. Par

$$W_\alpha = W_\alpha(\Xi)$$

nous notons la classe de potentiels V satisfaisant (1.3) (1.6) et l'hypothèse suivante: il existe une fonction décroissante $v(t)$, $t \in [1, \infty[$ avec $v(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et un α vérifiant $0 \leq \alpha \leq 1$ tel que pour tout cube $Q \in \Xi$ et tout x, $y \in \mathring{Q}$, l'intérieur de Q, on ait

$$|V(x) - V(y)| \leq |x-y|^\alpha V(x)^{1+(\alpha/2m)} v(V(x)) . \tag{3.1}$$

Ce paragraphe est consacré à la preuve du:

Théorème 3.1. *Si $V \in W_\alpha(\Xi)$ pour un certain réseau laticiel Ξ, alors*

$$N(\lambda) \sim l\phi(\lambda, V) \qquad \lambda \longrightarrow +\infty. \tag{3.2}$$

Preuve: Soit ρ, l'inverse d'un entier ≥ 1, et considérons Ξ_ρ le réseau laticiel obtenu en faisant une partition de chaque cube de Ξ en cube Q_ρ de côté ρ. Notons V_ρ^+, V_ρ^- respectivement les bornes supérieures et inférieures essentielles de V sur Q_ρ.

D'après le principe variationel de Courant, on a:

$$\sum_{Q_\rho \in \Xi_\rho} N^0(\lambda;\, V_\rho^+) \leq N(\lambda, A) \leq \sum_{Q_\rho \in \Xi_\rho} N(\lambda;\, V_\rho^-) . \tag{3.3}$$

D'après (2.7), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que:

$$\begin{aligned} & N(\lambda, A) \\ & \leq l(1+\varepsilon)^{n/2m} \textstyle\sum^1 (\rho^{2m}(\lambda - V_\rho^-) + 1)^{n/2m} \\ & \qquad + C(\varepsilon) \textstyle\sum^1 (\rho^m(\lambda - V_\rho^-) + 1)^{(n-1)/2m} + C \textstyle\sum^1 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\sum^1$ est la sommation des Q_ρ pour lesquels:

$$V_\rho^- \leq \lambda + \frac{1}{\rho^{2m}} . \tag{3.5}$$

Soit $\frac{1}{2} \geq \delta > 0$ fixé arbitraire et prenons $\lambda \geq \lambda_0 = \frac{1}{\delta}$.

Choisissons ρ tel que:

$$\delta\lambda \leq \rho^{-2m} \leq 2\delta\lambda. \tag{3.6}$$

Alors, pour Q_ρ figurant dans la sommation $\sum^1$, on a, en vertu de (3.5) et (3.6):

$$V_\rho^- \leq \lambda(1+2\delta) . \tag{3.7}$$

Dans le second membre de (3.4), il y a trois termes que nous notons dans l'ordre (I), (II) et (III).

En utilisant (3.6) et (3.7), nous avons:

$$(\mathrm{III}) \leq \frac{C}{\rho^n} \textstyle\sum^1 \operatorname{vol} Q_\rho \leq (2\delta\lambda)^{n/2m} \sigma(\lambda(1+2\delta)\,;\, V) .$$

En utilisant l'hypothèse (1.6) sur V, nous obtenons:

$$(\mathrm{III}) \leq C\delta^{n/2m}\phi(\lambda, V) \qquad \lambda \geq \lambda_0$$

avec C indépendante de δ, λ (et de ε).

Pour la somme (II), nous avons:

$$(\mathrm{II}) = C(\varepsilon)\sum{}^1(\rho^{2m}(\lambda - V_\rho^-) + 1)^{(n-1)/2m} \leq C(\varepsilon)(2\lambda\rho^{2m})^{(n-1)/2m} \times (\mathrm{III})$$

Il vient, en utilisant (3.6) et la majoration de (III):

$$(\mathrm{II}) \leq C(\varepsilon)\delta^{1/2m}\phi(\lambda, V) \qquad \lambda \geq \lambda_0.$$

Pour majorer (I), fixons un $t > 0$ (à choisir dans la suite) et soit $\sum^{1'}$ la sommation des cubes Q_ρ, figurant dans $\sum^1$, pour lesquels $V_\rho^- < t$ et $\sum^{1''}$ ceux des cubes Q_ρ de Σ' pour lesquels:

$$t \leq V_\rho^- \leq \lambda(1 + 2\delta).$$

Ecrivons $(\mathrm{I}) = (\mathrm{I}') + (\mathrm{I}'')$. Alors, en utilisant (3.6), nous avons

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}') &= l(1+\varepsilon)^{n/2m}\sum{}^{1'}(\rho^{2m}(\lambda - V_\rho^-) + 1)^{n/2m} \\ &\leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}(\lambda(1+2\delta))^{n/2m}\sigma(t, V)\end{aligned}$$

pour $\lambda \geq \lambda_0$,

$$(\mathrm{I}'') \leq l(1+\alpha)^{n/2m}\sum{}^{1''}\int_{Q_\rho}(\lambda(1+2\delta) - V(x) + |V(x) - V_\rho^-|)_+^{n/2m}dx.$$

En utilisant la propriété (3.1) de V, nous obtenons:

$$(\mathrm{I}'') \leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}\sum{}^{1''}\int_{Q_\rho}[\lambda(1+2\delta) - V(x) + \rho^\alpha(V_\rho^-)^{1+(\alpha/2m)}\nu(t)]_+^{n/2m}dx.$$

Choisissons maintenant $t = t_0$ suffisamment grand pour que l'on ait:

$$\delta^{-\alpha/2m}(1+2\delta)^{1+(\alpha/2m)}\nu(t_0) \leq \delta.$$

Alors, nous obtenons:

$$(\mathrm{I}'') \leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}\int(\lambda(1+3\delta) - V(x))_+^{n/2m}dx.$$

En groupant toutes les majorations, il en résulte que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, on a, d'après (3.3):

$$\begin{aligned}N(\lambda, A) \leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}&\int(\lambda(1+3\delta) - V(x))_+^{n/2m}dx + C\lambda^{n/2m}\sigma(t_0, V) \\ &+ (C(\varepsilon)\delta^{1/2m} + C\delta^{n/2m})\phi(\lambda, V)\end{aligned}$$

pour $\lambda \geq \frac{1}{\delta}$ et C des constantes indépendantes de ε, δ et λ.

En utilisant le lemme 1.3, nous obtenons:

$$N(\lambda, A) \leq l(1+\varepsilon)^{n/2m}(1+C\delta^{1/2})^{n/2m}\phi(\lambda, V) + C\lambda^{n/2m}\sigma(t_0, V)$$
$$+ (C(\varepsilon)\delta^{1/2m} + C\delta^{n/2m})\phi(\lambda, V)\,.$$

Comme $\lambda^{n/2m} = 0(\phi(\lambda, V))$ lorsque $\lambda \to +\infty$, nous obtenons, en prenant la limite supérieure, lorsque $\lambda \to +\infty$, du quotient $N(\lambda, A)/l\phi(\lambda, V)$, puis en faisant tendre d'abord $\delta \to 0$, ensuite $\varepsilon \to 0$ dans le second membre de l'inégalité précédente:

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \frac{N(\lambda, A)}{l\phi(\lambda, V)} \leq 1.$$

Un calcul analogue, en utilisant les premières inégalités de (2.7) et de (3.3), permet de prouver aussi:

$$\underline{\lim}_{\lambda \to +\infty} \frac{N(\lambda, A)}{l\phi(\lambda, V)} \geq 1.$$

Ceci termine la preuve du théorème 3.1.

§4. Domaine de l'opérateur A

Nous allons, dans ce paragraphe, caractériser le domaine $\mathscr{D}(A)$ de l'opérateur A. Cette caractérisation sera utilisée dans l'étude de la perturbation asymptotique en approximant un potentiel satisfaisant (1.8) par un potentiel satisfaisant (3.1).

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que V est un potentiel ≥ 1, vérifiant seulement l'hypothèse (1.7).

Le lemme suivant est essentiel:

Lemme 4.1. *Soit Q un cube unité et $\tilde{Q}$ le cube concentrique à Q de côté 2. Soit $u \in \mathscr{D}(A)$ telle que Au est nulle sur $\tilde{Q}$.*

Alors, pour tout $h \geq 0$, il existe une constante $C_h > 0$ (indépendante de u et de la position de Q) telle que:

(4.1) $$\int_Q V^h |u|^2 dx \leq C_h(|u|^2_{H^m(\tilde{Q})} + \|V^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde{Q})})\,.$$

Preuve: Nous allons montrer que pour tout entier $k \geq 0$, il existe $C_k > 0$ telle que:

(4.1)' $$\int_Q V^{1+(k/2m)} |u|^2 dx \leq C_k(|u|^2_{H^m(\tilde{Q})} + \|V^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde{Q})})\,.$$

Il est alors clair que (4.1)' prouve (4.1).

Nous montrons (4.1)' par la méthode de "contours successifs". Soient $Q_0 = Q$, $Q_1, \ldots, Q_{k-1}$, $Q_k = \tilde{Q}$ des cubes concentriques à Q tels que Q_j est relativement compact dans l'intérieur de Q_{j+1}.

Alors nous obtenons (4.1)' si nous montrons:

$$\int_{Q_j} V^{1+((k-j)/2m)}|u|^2dx+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_j} V^{(k-j)/2m}|D^\alpha u|^2dx$$

$$\leq C_k\Big(\int_{Q_{j+1}} V^{1+((k-j-1)/2m}|u|^2dx \tag{4.2}$$

$$+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_{j+1}} V^{(k-j-1)/2m}|D^\alpha u|^2dx\Big)$$

pour tout $j=0,\dots,k-1$.

Soit donc j fixé. Soit $\xi\in\mathscr{C}_0^\infty$, positive, égale à 1 sur Q_j, à support dans $\tilde{Q}_j$. Comme Au est nulle sur $\tilde{Q}$, on a:

$$<\xi u\cdot Au>_{L_2}=0.$$

Comme $\mathscr{D}(A)\subset H_V^m$, on a $\xi u\in H_V^m$ et l'égalité précédente donne

$$\int V\xi|u|^2dx+\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}}\int a_{\alpha\beta}D^\alpha(\xi u)\overline{D^\beta u}\,dx=0. \tag{4.3}$$

Il est facile de voir, en utilisant la règle de Leibniz, que l'on a

$$\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}}\int a_{\alpha\beta}D^\alpha(\xi u)\overline{D^\beta u}\,dx=\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}}\int a_{\alpha\beta}\xi D^\alpha u\overline{D^\beta u}\,dx+R \tag{4.4}$$

avec:

$$|R|\leq C\sum_{\substack{p\leq m\\q\leq m\\p+q\leq 2m-1}}|u|_{H^p(Q_{j+1})}|u|_{H^q(Q_{j+1})}. \tag{4.5}$$

En utilisant l'hypothèse (1.1)', nous obtenons, puisque $\xi\geq 0$ et égale à 1 sur Q_j:

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}}\int a_{\alpha\beta}\xi D^\alpha u\overline{D^\beta u}\,dx\geq E|u|^2_{H^m(Q_j)}. \tag{4.6}$$

De (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6), nous obtenons:

$$\int_{Q_j} V|u|^2dx+E|u|^2_{H^m(Q_j)}\leq C\sum_{\substack{p\leq m\\q\leq m\\p+q\leq 2m-1}}|u|_{H^p(Q_{j+1})}|u|_{H^q(Q_{j+1})} \tag{4.7}$$

Notons V_j^+, V_j^- les bornes sup et inf essentielles de V sur Q_j.

Nous avons de (4.7):

$$\int_{Q_j} V^{1+((k-j)/2m)}|u|^2dx\leq (V_j^+)^{(k-j)/2m}\int_{Q_j} V|u|^2dx \tag{4.8}$$

$$\leq C(V_j^+)^{(k-j)/2m}\sum_{\substack{p\leq m\\q\leq m\\p+q\leq 2m-1}}|u|_{H^p(Q_{j+1})}|u|_{H^q(Q_{j+1})}.$$

En utilisant l'inégalité de Young et des inégalités classiques d'interpolation dans les espaces de Sobolev, il existe C telle que:

$$\sum_{\substack{p\leq m\\ q\leq m\\ p+q\leq 2m-1}} |u|_{H^p(Q_{j+1})}|u|_{H^q(Q_{j+1})}$$

$$\leq C(\varepsilon|u|^2_{H^m(Q_{j+1})}+\varepsilon^{1-2m}\|u\|^2_{L_2(Q_{j+1})})$$

pour tout $\varepsilon>0$.

En prenant $\varepsilon=(V_j^+)^{-1/2m}$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons de (4.8):

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} & V^{1+((k-j)/2m)}|u|^2dx\\ &\leq C(V_j^+)^{(k-j-1)/2m}\left(|u|^2_{H^m(Q_{j+1})}+\frac{V_j^+}{V_{j+1}^-}\int_{Q_{j+1}}V|u|^2dx\right)\\ &\leq C\left(\frac{V_j^+}{V_{j+1}^-}\right)^{(k-j-1)/2m}\left(\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_{j+1}}V^{(k-j-1)/2m}|D^\alpha u|^2dx\right.\\ &\quad\left.+\frac{V_j^+}{V_{j+1}^-}\int_{Q_{j+1}}V^{1+((k-j-1)/2m)}|u|^2dx\right).\end{aligned}$$

L'hypothèse (1.7) sur le potentiel V prouve donc:

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} & V^{1+((k-j)/2m)}|u|^2dx\\ &\leq C\left(\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_{j+1}}V^{(k-j-1)/2m}|D^\alpha u|^2dx\right.\\ &\quad\left.+\int_{Q_{j+1}}V^{1+((k-j-1)/2m)}|u|^2dx\right).\end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant encore (4.7), nous avons aussi:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_j} & V^{(k-j)/2m}|D^\alpha u|^2dx\\ &\leq C\left(\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{Q_{j+1}}V^{(k-j-1)/2m}|D^\alpha u|^2dx\right.\\ &\quad\left.+\int_{Q_{j+1}}V^{1+((k-j-1)/2m)}|u|^2dx\right).\end{aligned}$$

Les deux dernières estimations prouvent (4.2), ce qui achève la preuve du lemme 4.1.

Théorème 4.2. *Il existe une constante $C>0$ telle que*:

$$\|Vu\|_{L_2}\leq C(\|Au\|_{L_2}+\|u\|_{L_2})\qquad \forall u\in\mathscr{D}(A). \tag{4.9}$$

Preuve: D'après (1.5), la forme $a_V+\alpha$ est fortement coercive sur H_V^m. Donc, quitte à remplacer $\mathscr{A}_0(D)$ par $\mathscr{A}_0(D)+\alpha$, on peut supposer que la forme a_V elle même est fortement coercive sur H_V^m. Dans ce cas, nous allons montrer que l'on a:

$$(4.9)' \qquad \|Vu\|_{L_2} \leq C\|Au\|_{L_2} \qquad \forall u \in \mathscr{D}(A).$$

Il est clair que (4.9)′ prouve (4.9) dans le cas général.

Puisque a_V est fortement coercive sur H_V^m, l'opérateur A est inversible et son inverse $G=A^{-1}$ est un opérateur continu de L_2 dans H_V^m. Soit $\|G\|_{L_2;H_V^m}$ la norme de cet opérateur

(4.9)′ est équivalent à:

$$(4.9)'' \qquad \|VGv\|_{L_2} \leq C\|v\|_{L_2} \qquad \forall v \in L_2.$$

Nous allons prouver (4.9)″.

Soit un réseau laticiel de cube unité Q^j. Pour chaque j, notons $\tilde{Q}^j$ le cube concentrique à Q^j, de côté 2, χ_j et $\tilde{\chi}_j$ respectivement les fonctions caractéristiques de Q^j et de $\tilde{Q}^j$.

Alors:

$$(4.10) \qquad \begin{aligned} &\|VGv\|_{L_2}^2 \\ &= \sum_j \|\chi_j VGv\|_{L_2}^2 \\ &\leq 2\Big(\sum_j \|\chi_j VG(1-\tilde{\chi}_j)v\|_{L_2}^2 + \sum_j \|\tilde{\chi}_j VG\chi_j v\|_{L_2}^2\Big) \\ &\leq 2(S_1+S_2)\,. \end{aligned}$$

Notons $u_j = G(1-\tilde{\chi}_j)v$.

Alors $u_j \in \mathscr{D}(H)$ et Au_j est nulle que $\tilde{Q}^j$.

Nous pouvons utiliser le lemme 4.1, avec $h=2$, pour obtenir:

$$\int_{Q_j} V^2|u_j|^2dx \leq C\Big(|u_j|_{H^m(\tilde{Q}_j)}^2 + \int_{\tilde{Q}_j} V|u_j|^2dx\Big)\,.$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C\sum_j \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \tilde{\chi}_j |D^\alpha G(1-\tilde{\chi}_j)v|^2dx + \int \tilde{\chi}_j V|G(1-\tilde{\chi}_j)v|^2dx\Big) \\ &\leq C\sum_j \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \tilde{\chi}_j |D^\alpha Gv|^2dx + \int \tilde{\chi}_j V|Gv|^2dx\Big) \\ &\quad + C\sum_j \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \tilde{\chi}_j |D^\alpha G\tilde{\chi}_j v|^2dx + \int \tilde{\chi}_j V|G\tilde{\chi}_j v|^2dx\Big). \end{aligned}$$

On a:

$$(4.11) \qquad \sum_j \int \tilde{\chi}_j |f|dx = 2^n \sum_j \int \chi_j |f|dx = 2^n \int |f|dx.$$

Il vient, en utilisant (4.11):

$$\sum_j \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \tilde{\chi}_j |D^\alpha G v|^2 dx + \int \tilde{\chi}_j V |Gv|^2 dx \right)$$

$$\leq C(|Gv|_{H^m}^2 + \|V^{1/2} G v\|_{L_2}^2) \leq C \|G\|_{L_2; H_V^m}^2 \|v\|_{L_2}^2.$$

De même:

$$\sum_j \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \tilde{\chi}_j |D^\alpha G \tilde{\chi}_j v|^2 dx + \int \tilde{\chi}_j V |G \tilde{\chi}_j v|^2 dx \right)$$

$$\leq \sum_j (|G\tilde{\chi}_j v|_{H^m}^2 + \|V^{1/2} G \tilde{\chi}_j v\|_{L_2}^2)$$

$$\leq C \|G\|_{L_2; H_V^m}^2 \sum_j \int \tilde{\chi}_j |v|^2 dx \leq C \|G\|_{L_2; H_V^m}^2 \|v\|_{L_2}^2.$$

En groupant les majorations, nous avons:

$$S_1 \leq C \|v\|_{L_2}^2. \tag{4.12}$$

Pour estimer S_2, nous décomposons comme G. V. Rosenbljum:

$$\chi_j V G \tilde{\chi}_j = (\chi_j V^{1/2})(V^{1/2} G^{1/2})(G^{1/2} \tilde{\chi}_j) \tilde{\chi}_j$$

pour obtenir:

$$S_2 \leq C \|v\|_{L_2}^2. \tag{4.13}$$

Alors (4.10), (4.12) et (4.13) prouvent (4.9)″, ce qui termine la preuve du théorème.

Corollaire 4.3. *Nous avons*:

$$\mathscr{D}(A) = \{u \in H^{2m},\ Vu \in L_2\}. \tag{4.14}$$

Il existe une constante $C>0$ telle que:

$$\|Vu\|_{L_2}^2 + \|\mathscr{A}_0(D)u\|_{L_2}^2 \leq C(\|Au\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2}^2), \qquad u \in \mathscr{D}(A). \tag{4.15}$$

Preuve: Notons:

$$H_{V^2}^{2m} = \{u \in H^{2m},\ Vu \in L_2\}.$$

Il est facile de voir que $H_{V^2}^{2m} \subset \mathscr{D}(A)$.

Inversement, si $u \in \mathscr{D}(A)$, alors $Vu \in L_2$ d'après le théorème 4.2. Comme $\mathscr{A}_0(D)u + Vu \in L_2$, il en résulte que $\mathscr{A}_0(D)u \in L_2$.

L'hypothèse d'ellipticité montre alors que $u \in H^{2m}$, d'où (4.14). (4.15) est alors immédiat.

Remarque: Il résulte du corollaire 4.3 que $\mathscr{C}_0^\infty$ est dense dans $\mathscr{D}(A)$, muni de la norme du graphe. Par conséquent, A est la plus petite extension fermée de A_0, A_0 étant la restriction de A à $\mathscr{C}_0^\infty$. A_0 est donc essentiellement auto-adjoint.

§5. Perturbation asymptotique de formes hermitiennes

5.1. Réduction au cas homogène

Avec les notations introduites au §2, il est bien connu que l'on a:

$$N(\lambda, A)=N(\lambda;\, a_V,\, \|\ \|_{L_2}^2;\, H_V^m) \tag{5.1}$$

avec a_V définie par (1.4).

Considérons la forme a'_V associée à la partie homogène de $\mathscr{A}_0$:

$$a'_V(u, v)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int a_{\alpha\beta}D^\alpha u\overline{D^\beta v}\,dx+\int Vu\bar{v}dx.$$

L'hypothèse d'ellipticité (1.1) prouve que a'_V est fortement coercive sur H_V^m. Soit A' l'opérateur non borné dans L_2, auto-adjoint strictement positif, engendré par le triplet (a'_V, H_V^m, L_2).

Alors nous avons aussi:

$$N(\lambda, A')=N(\lambda;\, a'_V,\, \|\ \|_{L_2}^2;\, H_V^m). \tag{5.2}$$

Voici le résultat de réduction:

Proposition 5.1. *Si le théorème* 1.2 *est vrai pour A', il est vrai aussi pour A.*

Preuve: Nous allons montrer que a'_V est une "perturbation asymptotique" de a_V. Il est clair que l'on a:

$$|a_V(u, u)-a'_V(u, u)|\le C\sum_{\substack{p\le m\\ q\le m\\ p+q\le 2m-1}}|u|_{H^p}|u|_{H^q}\qquad u\in H_V^m.$$

Nous avons, comme pour (4.8), l'inégalité d'interpolation:

$$\sum_{\substack{p\le m\\ q\le m\\ p+q\le 2m-1}}|u|_{H^p}|u|_{H^q}\le\varepsilon|u|_{H^m}^2+\varepsilon^{1-2m}\|u\|_{L_2}^2\qquad u\in H^m$$

pour tout $\varepsilon>0$.

En utilisant la coercivité de a_V, on en déduit qu'il existe une constante $\tau>0$ telle que:

$$|a_V(u, u)-a'_V(u, u)|\le\varepsilon a_V(u, u)+\tau\varepsilon^{1-2m}\|u\|_{L_2}^2\qquad u\in H_V^m$$

pour tout $\varepsilon>0$.

En utilisant (5.1) et (5.2), nous obtenons:

$$N\left(\frac{\lambda-\tau\varepsilon^{1-2m}}{1+\varepsilon}\ ;\, A'\right)\le N(\lambda;\, A)\le N(\lambda(1+\varepsilon)+\tau\varepsilon^{1-2m};\, A').$$

En prenant $\varepsilon=\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{-1/2m}$, nous voyons qu'il existe des constantes $C_1>0$, $C_2>0$

(calculées en fonction de τ) telles que:

$$N(\lambda(1-C_2\lambda^{-1/2m});\ A')\leq N(\lambda,\ A)\leq N(\lambda(1+C_1\lambda^{-1/2m});\ A'). \tag{5.3}$$

L'hypothèse donne:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda(1+C_1\lambda^{-1/2m})\,;\,A')}{l\phi(\lambda(1+C_1\lambda^{-1/2m}))}=1. \tag{5.4}$$

D'après le lemme 1.3, nous avons:

$$\phi(\lambda,\ V)\leq\phi(\lambda(1+C_1\lambda^{-1/2m}))\leq(1+CC_1^{1/2}\lambda^{-1/4m})^{n/2m}\phi(\lambda,\ V). \tag{5.5}$$

Alors (5.4) et (5.5) donnent:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda(1+C_1\lambda^{-1/2m})\,;\,A)}{l\phi(\lambda\,;\,V)}=1. \tag{5.6}$$

Il résulte de la deuxième inégalité de (5.3) et (5.6) que l'on a:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda,\ A)}{l\phi(\lambda,\ V)}\leq 1.$$

De la même manière, on montre aussi:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{N(\lambda,\ A)}{l\phi(\lambda,\ V)}\geq 1$$

ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

5.2. Perturbation du potentiel

En vertu de la proposition 5.1, nous pouvons désormais supposer *que* $\mathscr{A}_0(D)$ *est homogène d'ordre* $2m$.

Soit maintenant un potentiel V_1 équivalent à V, c'est-à-dire qu'il existe $C>0$ telle que

$$C^{-1}V_1\leq V\leq CV_1 \tag{5.7}$$

presque partout.

Il est clair que $H_V^m=H_{V_1}^m$ et $H_{V^2}^{2m}=H_{V_1^2}^{2m}$ avec des normes équivalentes.

L'homogénéité de $\mathscr{A}_0(D)$ montre que $a_V(u,\ v)$ et $a_{V_1}(u,\ v)$ sont fortement coercives sur H_V^m.

Si l'on note A_1 l'opérateur engendré par le triplet $(a_{V_1},\ H_{V_1}^m,\ L_2)$ le corollaire 4.3 prouve que:

$$\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(A_1)=H_V^{2m}. \tag{5.8}$$

Notons:

(5.9) $M(\lambda)=$

$$\inf \operatorname{codim}\left\{L\subset\mathscr{D}(A)\,;\|Au\|_{L_2}>\lambda\left(\int\frac{|V-V_1|^2}{V}\,|u|^2dx\right)^{1/2},\qquad u\in L\right\}$$

Pour $\eta>0$, nous aurons à considérer aussi:

(5.10) $L_\eta(\lambda)=$

$$\inf \operatorname{codim}\left\{L\subset\mathscr{D}(A)\,;\, a_V(u,u)+\frac{1}{\eta}\,\|Au\|_{L_2}a_V(u,u)^{1/2}>\lambda\|u\|_{L_2}^2,\qquad u\in L\right\}$$

Dans (5.9) et (5.10), les codimensions sont prises relatives à $\mathscr{D}(A)$ évidemment.

Lemme 5.2. *Nous avons*:

$$L_\eta(\lambda)\le N(\lambda;\, A_1)+M(\eta) \tag{5.11}$$

pour tout $\eta>0$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Preuve: D'après l'inégalité de Schwarz, nous avons:

$$\begin{aligned}(5.12)\qquad &|a_V(u,u)-a_{V_1}(u,u)|\\ &\le\left(\int\frac{|V-V_1|^2}{V}\,|u|^2\right)^{1/2}a_V(u,u)^{1/2}\qquad u\in H_V^m.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe des sous-espaces L, M de $\mathscr{D}(A)$ tels que:

$$\operatorname{codim} L\le N(\lambda;\, A_1)+\varepsilon/2 \text{ et } a_{V_1}(u,u)>\lambda\|u\|_{L_2}^2,\qquad u\in L$$

$$\operatorname{codim} M\le M(\eta)+\varepsilon/2 \quad\text{et}\quad \|Au\|_{L_2}>\eta\left(\int\frac{|V-V_1|^2}{V}\,|u|^2dx\right)^{1/2},\qquad u\in M$$

En utilisant (5.12), nous obtenons:

$$a_V(u,u)+\frac{1}{\eta}\,\|Au\|_{L_2}a_V(u,u)^{1/2}>\lambda\|u\|_{L_2}^2,\qquad u\in L\cap M.$$

Comme $\operatorname{codim} L\cap M\le\operatorname{codim} L+\operatorname{codim} M$, nous obtenons (5.11) en faisant tendre $\varepsilon\to 0$, ce qui termine la preuve du lemme 5.2.

Comme $\mathscr{D}(A)$ est dense dans H_V^m, nous avons:

$$N(\lambda;\, A)=\inf\operatorname{codim}\{L\subset\mathscr{D}(A);\, a_v(u,u)>\lambda\|u\|_{L_2}^2,\quad u\in L\}.$$

En utilisant la décomposition de $\mathscr{D}(A)$ suivant la base $(e_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ de vecteurs propres (orthonormée dans L_2, associée à la suite des valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ de l'opérateur A), on voit aisément que $N(\lambda;\, A)$ s'écrit encore, de manière duale:

$$N(\lambda;\, A)=\sup\dim\{R\subset\mathscr{D}(A);\, a_V(u,u)\le\lambda\|u\|_V^2,\quad u\in R\}. \tag{5.13}$$

De la même manière, nous avons aussi:

(5.14) $L_\eta(\lambda)=$

$$\sup\dim\left\{R\subset\mathscr{D}(A)\,;\, a_V(u,u)+\frac{1}{\eta}\,\|Au\|_{L_2}a_V(u,u)^{1/2}\le\lambda\|u\|_{L_2}^2,\qquad u\in R\right\}.$$

Voici le résultat de comparaison entre $N(\lambda;\, A)$ et $N(\lambda;\, A_1)$.

Proposition 5.3. *Nous avons*:

(5.15) $$N\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon}\,;\,A_1\right)-M(\varepsilon^{-1}\lambda_+^{1/2})\le N(\lambda\,;\,A)$$
$$\le N(\lambda(1+\varepsilon)\,;\,A_1)+M(\varepsilon^{-1}\lambda_+^{1/2})$$

pour tout $\varepsilon>0$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Preuve: Puisque A et A_1 sont strictement positifs, il suffit de prouver (5.15) pour $\lambda>0$. Par symétrie, il suffit de prouver seulement la deuxième inégalité de (5.15).

Soit $\varepsilon>0$ et notons $k=N(\lambda;\,A)$ pour $\lambda>0$.

Il est aisé de voir que k est l'entier vérifiant:

(5.16) $$\lambda_k\le\lambda<\lambda_{k+1}.$$

Soit E_k, le sous-espace de dimension k de $\mathscr{D}(A)$, engendré par $e_1,\ldots,e_k$.

D'après (5.16), on a:

$$\|Au\|_{L_2}^2\le\lambda a_V(u,\,u)\qquad\forall u\in E_k.$$

D'où, en prenant $\eta=\varepsilon^{-1}\lambda^{1/2}$, nous obtenons:

$$a_V(u,\,u)+\frac{1}{\eta}\|Au\|_{L_2}a_V(u,\,u)^{1/2}\le(1+\varepsilon)a_V(u,\,u)$$
$$\le\lambda(1+\varepsilon)\|u\|_{L_2}^2,\qquad u\in E_k$$

D'après (5.14), nous avons donc:

$$N(\lambda;\,A)=k\le L_{\varepsilon^{-1}\lambda^{1/2}}(\lambda(1+\varepsilon)).$$

Le lemme 5.2 donne finalement

$$N(\lambda;\,A)\le N(\lambda(1+\varepsilon);\,A_1)+M(\varepsilon^{-1}\lambda^{1/2})$$

ce qui est la deuxième inégalité de (5.11).

Pour étudier $M(\lambda)$, posons:

(5.17) $R(\lambda)=$
$$\inf\operatorname{codim}\Big\{L\subset\mathscr{D}(A)\,;$$
$$\|\mathscr{A}_0(D)u\|_{L_2}^2+\|Vu\|_{L_2}^2>\lambda^2\int\frac{|V-V_1|^2}{V}\,|u|^2dx,\qquad u\in L\Big\}$$

Nous avons le:

Lemme 5.4. *Il existe une constante* $C>0$ *telle que*:

(5.18) $$M(\lambda)\le R(C\lambda)\qquad\forall\lambda\in\boldsymbol{R}.$$

Preuve: Nous sommes dans le cas où a_V est fortement coercive sur H_V^m, puisque $\mathscr{A}_0(D)$ est supposé homogène. Nous avons donc, d'après (4.9)':

$$\|Vu\|_{L_2} \leq C\|Au\|_{L_2} \qquad u \in \mathscr{D}(A).$$

Comme $Au = \mathscr{A}_0(D)u + Vu$ au sens des distributions, nous avons:

$$\|\mathscr{A}_0(D)u\|^2_{L_2} + \|Vu\|^2_{L_2} \leq C\|Au\|^2_{L_2} \qquad u \in \mathscr{D}(A). \tag{5.19}$$

Alors (5.17) et (5.19) prouvent immédiatement (5.18).

Soit Ξ un réseau laticiel de cubes unités.
Notons

$$\delta_\Xi = \inf\left(1, \sup_{Q \in \Xi} (V_Q^-)^{-1} \int_Q |V - V_1|\, dx\right) \tag{5.20}$$

V_Q^{-1} étant la borne inf essentielle de V sur Q.

Lemme 5.5. *Soit $\sigma = \inf\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{4m}\right)$ et Ξ un réseau laticiel de cubes unités. Il existe une constante $C > 0$ telle que*:

$$R(\lambda) \leq C\delta_\Xi^\sigma \phi(\lambda^2; V) \tag{5.21}$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Preuve: Elle suit des idées de G. V. Rosenbljum et nous la donnons brièvement seulement pour le cas $4m > n$. Dans le cas $n > 4m$, nous renvoyons à [5]. Notons $f = \frac{|V - V_1|}{V^{1/2}}$.

Utilisant (5.17), nous avons:

$$R(\lambda) \leq \inf \operatorname{codim} \Big\{ L \subset \mathscr{D}(A);$$

$$\int\left(|\mathscr{A}_0(D)u|^2 + \frac{|u|^2}{2}\right)dx > \int\left(\lambda^2 f^2 - V^2 + \frac{1}{2}\right)_+ |u|^2 dx, \qquad u \in L\Big\}$$

Comme $V^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{V^2}{2}$, nous avons donc:

$$R(\lambda) \leq \inf \operatorname{codim} \Big\{ L \subset \mathscr{D}(A);$$

$$\int\left(|\mathscr{A}_0(D)u|^2 + \frac{|u|^2}{2}\right) dx > \frac{1}{2} \int (2\lambda^2 f^2 - V^2)_+ |u|^2 dx, \qquad u \in L\Big\}$$

Comme $\mathscr{D}(A)$ est dense dans H^{2m}, nous avons aussi:

$$R(\lambda) \leq \inf \operatorname{codim} \Big\{ L \subset H^{2m};$$

$$\int\left(|\mathscr{A}_0(D)u|^2 + \frac{|u|^2}{2}\right)dx > \frac{1}{2} \int (2\lambda^2 f^2 - V^2)_+ |u|^2 dx, \qquad u \in L\Big\}$$

Le cas $4m > n$ permet d'utiliser un résultat de M. S. Birman et V. V. Borzov (cf. [2]) qui donne:

$$R(\lambda) \leq C \sum_{Q \in \Xi} \|g_\lambda\|_{L_1(Q)}^{n/4m} \tag{5.22}$$

où $g_\lambda = (2\lambda^2 f^2 - V^2)_+$ et Ξ un réseau laticiel quelconque de cubes unités.

On prouve ensuite, comme dans le lemme 5.1 de [5], que:

$$\sum_{Q \in \Xi} \|g_\lambda\|_{L_1(Q)}^{n/4m} \leq C \delta_\Xi^{n/4m} \lambda^{n/m} \sigma(\lambda^2; V) \tag{5.23}$$

δ_Ξ étant donné par (5.20).

Alors (5.22) et (5.23) prouvent (5.21). Lorsque $4m < n$, la puissance de δ_Ξ dans (5.21) peut être prise égale à 1 et lorsque $4m = n$, égale à $\frac{1}{2}$ (cf. [5]).

5.3. Approximation de V par des potentiels de la classe W_1

Soit Ξ un réseau laticiel de cubes unités.

Pour $h \in]0, 1[$ et $t > 0$, définissons $\rho = \rho(t, h)$ par l'égalité:

$$\rho^\beta t^{\beta/2m} \eta(\rho n^{1/2}) = h.$$

Pour t fixé, on a $\lim_{h \to 0} \rho(t, h) = 0$.

Pour $Q \in \Xi$, notons $\rho_Q = \rho(V_Q^-, h)$, $Q_\rho(x)$ le cube de centre x et de rayon ρ_Q et définissons une fonction V_h par:

$$V_h(x) = \rho_Q^{-n} \int_{Q \cap Q_\rho(x)} V(y)\,dy \qquad x \in Q. \tag{5.24}$$

Les lemmes suivants sont analogues à ceux établis dans [5] auquel nous renvoyons par la preuve.

Lemme 5.6. *Pour tout* $h \in]0, 1[$, *le potentiel* $V_h \in W_1(\Xi)$ *et* V_h *vérifie les hypothèses* (1.6), (1.7), (1.8) *et* (5.7) *avec des constantes* C *indépendantes de* h.

Lemme 5.7. *Notons* $\delta(h) = h + \rho(1, h)$.
Il existe une constante $C > 0$ *telle que*:

$$\int_Q |V - V_h|\,dx \leq C \delta(h) V_Q^- \tag{5.25}$$

pour tout $h \in]0, 1[$ *et* $Q \in \Xi$.

Lemme 5.8. *Nous avons*:

$$\lim_{h \to 0} \varliminf_{\lambda \to \infty} \frac{\phi(\lambda; V_h)}{\phi(\lambda; V)} = 1 \text{ et } \lim_{h \to 0} \varlimsup_{\lambda \to \infty} \frac{\phi(\lambda; V_h)}{\phi(\lambda; V)} = 1 \tag{5.26}$$

Le Lemme 5.8 prouve que la famille $\phi(\lambda; V_h)$ est une perturbation asymptotique de $\phi(\lambda; V)$. Nous allons voir que cela est vrai aussi pour $N(\lambda; A_h)$ où A_h est l'opérateur non borné associé au triplet (a_{V_h}, H_V^m, L_2). Nous avons $H_V^m = H_{V_h}^m$ en vertu du lemme 5.6.

5.4. Preuve du Théorème 1.2

Soit $\varepsilon>0$, $h\in]0, 1[$ fixé.

En utilisant la deuxième inégalité de (5.15) avec $A_1=A_h$ et les estimations (5.18), (5.20), (5.21) et (5.25), nous avons:

$$N(\lambda;\, A)\le N(\lambda(1+\varepsilon);\, A_h)+C\delta(h)^\sigma\phi(\varepsilon^{-2}\lambda;\, V) \tag{5.27}$$

pour tout $\lambda\in\boldsymbol{R}$, σ étant un nombre >0, défini au lemme 5.5, $\delta(h)=h+\rho(1, h)$, C une constante >0 indépendante de ε, h, λ.

Il est facile de voir que l'on a:

$$\phi(\varepsilon^{-2}\lambda;\, V)\le C(\varepsilon)\phi(\lambda;\, V). \tag{5.28}$$

Divisant les deux membres de (5.27) par $\phi(\lambda;\, V)$, et prenant la limite supérieure lorsque $\lambda\to+\infty$, en tenant compte du théorème 3.1 (modèle appliqué à V_h qui est de la classe W_1 en vertu du lemme 5.6) et de (5.28), nous obtenons:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\frac{N(\lambda;\, A)}{l\phi(\lambda;\, V)}\le\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\frac{\phi(\lambda(1+\varepsilon);\, V_h)}{\phi(\lambda;\, V)}+\delta(h)^\sigma C(\varepsilon). \tag{5.29}$$

Faisons tendre h vers 0 dans le second membre de (5.29). La seconde égalité de (5.26) et le fait que $\lim_{h\to 0}\delta(h)^\sigma=0$ montrent que nous avons:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\frac{N(\lambda;\, A)}{l\phi(\lambda;\, V)}\le\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\frac{\phi(\lambda(1+\varepsilon);\, V)}{\phi(\lambda;\, V)}$$

En faisant tendre $\varepsilon\to 0$, nous obtenons, en utilisant le lemme 1.3:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\frac{N(\lambda;\, A)}{l\phi(\lambda;\, V)}\le 1.$$

On démontre de la même manière que

$$\underline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\frac{N(\lambda;\, A)}{l\phi(\lambda;\, V)}\ge 1.$$

ce qui achève la preuve du théorème 1.2.

UNIVERSITÉ DE NANTES
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Bibliographie

[1] M. S. Birman-M. Z. Solomjak, Spectral asymptotics of non smooth elliptic operators, I, Trans. Moscou Math. Soc., **27** (1972), 1–52.

[2] M. S. Birman-V. V. Borzov, On the asymptotic formula for the discrete spectrum of certain singular differential operator, Topics in Maths. Phys., n° **5** (1972), 19–30.

[3] C. Goulaouic, Valeurs propres de problèmes aux limites irrégulières: applications, Cours CIME, 1974.

[4] G. Métivier, Etude asymptotiques des valeurs propres et de la fonction spectrale de problèmes aux limites, Thèse de l'Université de Nice, 1976.

[5] G. V. Rozenblum, Asymptotics of the eigenvalues of the Schrödinger operator, Math. URSS Sbornik, **22** (1974), 349–371.