J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
25-2 (1985) 341-355

Non-unicité dans le problème de Cauchy caractéristique

— Cas de type de Fuchs —

Dédié au Professeur Shigeru Mizohata à l'occasion de son soixantième anniversaire

Par

Katsuju IGARI

(Communiqué par Prof. S. Mizohata le 5 mars 1984)

Introduction.

Soient $P(x, \partial_x)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$, $x\in \boldsymbol{R}^n$, un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans un voisinage de l'origine et P_m la partie principale de P. Soit S une hypersurface définie par l'équation $\varphi(x)=0$, où $\varphi(x)$ est une fonction analytique à valeurs réelles, définie dans un voisinage de l'origine, qui satisfait $\varphi(0)=0$ et $\varphi_x(0)\equiv \mathrm{grad}\,\varphi(0)\neq 0$. On appelle *solution nulle* une solution $u\in\mathcal{D}'(V)$, V un voisinage do l'origine, de l'équation $Pu=0$ telle que $0\in\mathrm{supp}[u]\subset V_+=\{x\in V\,;\ \varphi(x)\geqq 0\}$.

Si l'hypersurface S est non-caractéristique pour l'opérateur P, il n'y a pas de solution nulle (Théorème de l'unicité de Holmgren). Au contraire, si l'hypersurface S est caractéristique pour l'opérateur P, c'est-à-dire, si $P_m(x, \varphi_x(x))=0$ sur S, existe-t-il une solution nulle?

Il y a déjà beaucoup d'articles concernant ce problème; l'étude de L. Hörmander [5] pour les équations à coefficients constants; celle de S. Mizohata [7] pour le cas où l'hypersurface caractéristique serait simple; celle de J. Persson [10] et celle de H. Komatsu [6] pour le cas où l'hypersurface caractéristique serait de multiplicité constante; celle de S. Ouchi [9] pour le cas plus général; etc.

A propos, il y a des équations qui s'appellent équation du type de Fuchs. Elles sont les équations qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$(0.1)\qquad P(x, y\,;\partial_x, \partial_y)u=\sum_{s=0}^{k} x^{k-s}a_{m-s}(y)\partial_x^{m-s}u$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\sum_{|\beta|\leq s} x^{\max\{k-s+1,0\}}a_{m-s,\beta}(x, y)\partial_x^{m-s}\partial_y^\beta u=0,$$

où $a_m(y)=1$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y=(y_1, \cdots, y_d)\in\boldsymbol{R}^d$, m, k, $d\in\boldsymbol{N}$, $0<k\leqq m$, $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_d)\in\boldsymbol{N}^d$, $|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_d$, $\partial_x=\partial/\partial x$, $\partial_j=\partial/\partial y_j$, $\partial_y^\beta=\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_d^{\beta_d}$, les coefficients $a_{m-s}(y)$, $a_{m-s,\beta}(x, y)$ sont analytiques dans un voisinage de l'origine.

L'hyperplan $x=0$ est caractéristique pour cette équation. Mais nous voudrions remarquer que l'équation (0.1) ne satisfait pas aux conditions requises dans les articles cités au-dessus.

Ce type d'équation a été étudié primitivement par Y. Hasegawa [3], [4]. Elle a envisagé le problème de Cauchy dans la catégorie de fonctions analytiques et obtenu un théorème du type de Cauchy-Kowalewski. M. S. Baouendi et C. Goulaouic [1] ont traité le problème d'une manière plus systématique. Ils ont aussi donné une extension du théorème de l'unicité de Holmgren, [2] : Il n'existe pas de solution nulle de l'équation (0.1) dans un espace de distributions régulières en variable x.

Notre but dans cet article est de montrer que pour l'équation (0.1) l'unicité n'est plus vraie dans l'espace de toutes les distributions ; nous construissons des solutions nulles de l'éqation (0.1), qui sont bien entendu moins régulières en variable x que dans le théorème de Baouendi-Goulaouic, [2].

1. Enoncé du résultat.

On associe à l'équation (0.1) un polynôme de λ d'ordre m

$$C_m(\lambda\,;y)=(\lambda)_m+a_{m-1}(y)(\lambda)_{m-1}+\cdots+a_{m-k}(y)(\lambda)_{m-k} \tag{1.1}$$

où $(\lambda)_m=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)$. Ce polynôme s'appelle polynôme indiciel. Posons

$$C_k(\lambda\,;y)=(\lambda)_k+a_{m-1}(y)(\lambda)_{k-1}+\cdots+a_{m-k}(y). \tag{1.2}$$

Désignons les racines de $C_k(\lambda\,;y)$ par $\rho_1(y),\cdots,\rho_k(y)$. Puisque $C_m(\lambda\,;y)=(\lambda)_{m-k}C_k(\lambda-m+k\,;y)$, les racines du polyôme indiciel (1.1) sont

$$0,\ 1,\ \cdots,\ m-k+1,\ \rho_1(y)+m-k,\ \rho_k(y)+m-k. \tag{1.3}$$

Soit $\rho(y)$ une racine de $C_k(\lambda\,;y)$. On dit qu'elle est normale, si elle est analytique dans un voisinage de l'origine et satisfait à

$$C_k(\rho(0)+i\,;0)\neq 0, \qquad \text{pour } i=1,\ 2,\ \cdots. \tag{1.4}$$

Au cas où $k=1$, la seule racine de $C_1(\lambda\,;y)$ est necessairement normale. Si toutes les racines de $C_k(\lambda\,;y)$ sont analytiques, il y a au moins une racine normale. En général, on suppose l'hypothèse suivante :

Hypothèse N. Il existe au moins une racine normale de $C_k(\lambda\,;y)$.

Soit $\rho(y)$ une racine normale de $C_k(\lambda\,;y)$. On lui associe un entier naturel μ comme suite :

$$\begin{aligned} &\text{Si } \operatorname{Re}\rho(0)+m-k>\max\{-1,\ m-k-2\},\ \text{alors } \mu=0.\\ &\text{Sinon, } \mu \text{ est l'entier positif tel que}\\ &\max\{0,\ m-k-1\}\geqq \operatorname{Re}\rho(0)+m-k+\mu>\max\{-1,\ m-k-2\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème. *Sous l'hypothèse N, soient $\rho(y)$ une racine normale de $C_k(\lambda; y)$ et μ l'entier naturel associé à $\rho(y)$. Soit $g(y)$ une fonction analytique quelconque, définie dans un voisinage de l'origine. Alors il existe m fontions analytiques $f_j(x, z, y)$, $(x, z, y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^d$, $j=1, \cdots, m$, définies dans un voisinage de l'origine, telles que $f_1(0, 0, y)=g(y)$ et que si on met*

$$u=x^{\rho(y)+m-k+\mu}\left\{f_1(x, x(\log x)^m, y)+\sum_{k=1}^{m-1}x(\log x)^k f_{k+1}(x, x(\log x)^m, y)\right\}$$

$$u_+=u \quad pour\ x>0, \ =0 \quad pour\ x\leqq 0,$$

$$U=\partial_x^\mu u_+, \quad au\ sens\ de\ distribution,$$

alors la distribution U est une solution de l'équation (0.1) *dans un voisinage de l'origine.*

Remarque 1. Si $\rho(y)$ est une constante, il n'apparait pas de $\log x$, c'est-à-dire, $f_1(x, z, y)=f(x, y)$, $f_j(x, z, y)=0$ pour $j=2, \cdots, m$.

Remarque 2. Considérons un exemple très simple : $x(d/dx)u-mu=0$, $m\in \boldsymbol{C}$. Soit μ le plus petit des entiers non-négatifs tels que $\mathrm{Re}\, m+\mu>-1$. Alors la solution nulle obtenue dans le théorème est

$$U=\text{const.}\, \partial_x^\mu x_+^{m+\mu}=\text{const.}\, Y_{m+1}(x),$$

où $Y_{m+1}(x)=\Gamma(m+1)^{-1}\mathrm{Pf.}(x^m)_{x>0}$, lorsque $m\neq -1, -2, \cdots$, et $Y_{m+1}(x)=\delta_x^{(-m-1)}$ lorsque $m=-1, -2, \cdots$, voir L. Schwartz [11].

Remarque 3. Soient $k\in \boldsymbol{N}$, $I=(-r, r)$, $r>0$, et Ω un voisinage de l'origine de $\boldsymbol{R}^d$. Par $u\in C^k(I, \mathcal{D}'(\Omega))$, on désigne que l'application $I\ni x\to u(x)\in \mathcal{D}'(\Omega)$ est de classe C^k. $C^{-k}(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ est l'ensemble de $u(x)\in \mathcal{D}'(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ qui peut se mettre $u(x)=\sum_{j=0}^k \partial_x^j u_j(x)$, avec $u_j(x)\in C^0(I, \mathcal{D}'(\Omega))$. Soient I et Ω assez petits et l le plus grand des entiers tels que $l<\mathrm{Re}\,\rho(y)+m-k$. Alors les solutions nulles obtenues dans le théorème appartiennent à $C^l(I, \mathcal{D}'(\Omega))$. D'autre part, soit L un entier tel que $\mathrm{Re}\,\rho_j(y)+m-k<L$, $y\in\Omega$, $j=1, 2, \cdots, k$, où ρ_j sont les racines de $C_k(\lambda; y)$. M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont démontré la non-existence de solution nulle appartenant à $C^L(I, \mathcal{D}'(\Omega))$, [2].

Remarque 4. H. Tahara [12] a construit un système fondamental de solutions pour l'équation (0.1). On connaît à partir de son résultat l'existence de solution nulle quand il y a une racine normale $\rho(y)$ de $C_k(\lambda; y)$ telle que $\mathrm{Re}\,\rho(0)>-1$ au cas où $m>k$, où $\rho(0)\neq -1, -2, \cdots$ au cas où $m=k$, voir [12], Th. 1.2.14, Cor. 1.2.15, Prop. 2.3.10, etc. T. Oaku [8] a démontré un théorème de l'unicité dans un espace d'hyperfonctions régulières en variable x.

L'idée de la démonstration. On considère l'équation

$$P_\mu u=P(x, y; \partial_x, \partial_y)\partial_x^\mu u=0.$$

On cherche une solution de la forme

$$u=x^{\rho(y)+m-k+\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{mi}\frac{x^i}{i!}\frac{(\log x)^j}{j!}u_{ij}(y), \qquad u_{00}(y)=g(y).$$

Dans le paragraphe 2 on obtient une relation de récurrence et l'examine. Dans le paragraphe 3, on montre la convergence de la série obtenue. Finalement dans le paragraphe 4, en posant $u_+=u$ pour $x>0$ et $u_+=0$ pour $x\leqq 0$, on démontre que $P_\mu u_+=0$ au sens de distribution.

Nous voudrions remarquer que au cas où $\rho(0)=-2, -3, \cdots$, il faut des considérations spéciales.

2. Méthode de Frobenius.

On considère l'équation

$$P_\mu u=P(x, y; \partial_x, \partial_y)\partial_x^\mu u=0. \tag{2.1}$$

On cherche une solution de la forme

$$u=x^{\lambda(y)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{mi}\frac{x^i}{i!}\frac{(\log x)^j}{j!}u_{ij}(y), \qquad u_{00}(y)=g(y). \tag{2.2}$$

En développant les coefficients en série:

$$x^{\max(k-s+1,0)}a_{m-s,\beta}(x, y)=\sum_i a_{m-s,\beta,i}(y)x^i/i!, \tag{2.3}$$

$i\geqq\max\{k-s+1, 0\}$, on pose

$$\begin{aligned} P_\mu^\circ &= \sum_{s=0}^{k} x^{k-s}a_{m-s}(y)\partial_x^{m-s+\mu}, \qquad a_m(y)=1 \\ P_\mu' &= \sum_{s,\beta,i}\frac{x^i}{i!}a_{m-s,\beta,i}(y)\partial_x^{m-s+\mu}\partial_y^\beta, \qquad 1\leqq s\leqq m, \quad |\beta|\leqq s, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$i\geqq\max\{k-s+1, 0\}$. Evidemment

$$P_\mu=P_\mu^0+P_\mu'. \tag{2.5}$$

Lemme 1. *Soient d_{nh}; $n, h\in \boldsymbol{N}$, $0\leqq h\leqq n$, définis par*

$$d_{n+1,h}=-nd_{n,h}+d_{n,h-1}, \quad \textit{avec } d_{00}=1, \ d_{n0}=0 \textit{ si } n\geqq 1.$$

Alors

$$(d/dx)^n(\log x)^j/j!=x^{-n}\sum_h d_{nh}(\log x)^{j-h}/(j-h)!. \tag{2.6}$$

On peut vérifier ce lemme aisément par récurrence.

Lemme 2. *Soit $\lambda(y)$ une fonction analytique définie dans un voisinage de l'origine. Pour tout $\beta\in\boldsymbol{N}^d$, il existe des fonctions onalytiques $q_{\beta r}(y)$; $r\in\boldsymbol{N}$, $r\leqq|\beta|$, telles que*

$$\partial_y^\beta x^{\lambda(y)}=x^{\lambda(y)}\sum_r q_{\beta r}(y)(\log x)^r. \tag{2.7}$$

En particulier, $q_{00}=1$, $q_{\beta 0}=0$ si $\beta\neq 0$.

L'existence de telles fonctions $q_{\beta r}(y)$ est claire. En plus, on peut montrer sans difficulté que

$$q_{\beta r}=\frac{1}{r\,!}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-\lambda)^s\partial_y^\beta(\lambda)^{r-s}.$$

Pourtant, on n'emploi pas ici cette relation-ci.

Par Lemme 1,

$$P_\mu^\circ u=\sum_{i,j,s,h,n}a_{m-s}C_h^{m+\mu-s}\frac{(\lambda+i)_h}{i\,!}x^{\lambda+i-m-\mu+k}d_{h',n}\frac{(\log x)^j}{j\,!}u_{i,j+n}.$$

Ici $h+h'=m+\mu-s$. Par Lemmes 1 et 2,

$$\partial_x^{m-s+\mu}\partial_y^\beta\sum_{i_2,j}\frac{x^{\lambda(y)+i_2}}{i_2\,!}\frac{(\log x)^j}{j\,!}u_{i_2,j}(y)$$

$$=\sum_{i_2,j,\gamma,r,h,n}C_h^{m-s+\mu}\frac{(\lambda+i_2)_h}{i_2\,!}x^{\lambda+i_2-m+s-\mu}C_\gamma^\beta q_{\gamma\,r}$$

$$\times d_{h',n}(j+r)_r\frac{(\log x)^{j+r-n}}{(j+r-n)\,!}\partial_y^{\gamma'}u_{i_2,j}.$$

Ici $h+h'=m-s+\mu$, $\gamma+\gamma'=\beta$. Donc

$$P'_\mu u=\sum_{i,j,s,\beta,i_2,h,n,\gamma,r}a_{m-s,\beta,i_1}C_h^{m-s+\mu}\frac{(\lambda+i_2)_h}{i_1\,!\,i_2\,!}$$

$$\times x^{\lambda+i-m+k-\mu}\frac{(\log x)^j}{j\,!}d_{h',n}C_\gamma^\beta q_{\gamma,r}(j+n)_r\partial_y^{\gamma'}u_{i_2,j+n-r}.$$

Ici $i_1+i_2+s=i+k$. On a ainsi la relation de récurrence:

$$\sum_{s,h,n}a_{m-s}C_h^{m+\mu-s}(\lambda+i)_h d_{h',n}u_{i,j+n}+\sum_{s,\beta,i_2,h,n,\gamma,r}a_{m-s,\beta,i_1}C_h^{m-s+\mu}\frac{i\,!(\lambda+i_2)_h}{i_1\,!\,i_2\,!}\tag{2.8}$$

$$\times d_{h',n}C_\gamma^\beta q_{\gamma,r}(j+n)_r\partial_y^{\gamma'}u_{i_2,j+n-r}=0,$$

où au premier terme $s\leqq k$, $h+h'=m+\mu-s$, $n\leqq h'$; au deuxième terme $1\leqq s\leqq m$, $|\beta|\leqq s$, $i_1+i_2+s=i+k$, $h+h'=m+\mu-s$, $n\leqq h'$, $\gamma+\gamma'=\beta$, $r\leqq|\gamma|$. Remarquons que $i_2\leqq i+k-s-\max\{k-s+1,0\}\leqq i-1$.

Le coefficient de u_{ij} est

$$C_{m+\mu}(\lambda+i\,;y)=\sum_{s=0}^{k}a_{m-s}(\lambda+i)_{m-s+\mu}\tag{2.9}$$

$$=(\lambda+i)_{m+\mu-k}C_k(\lambda+i-m-\mu+k\,;y).$$

Mettons

$$\lambda^*(y)=\rho(y)+m+\mu-k.\tag{2.10}$$

Puisque $\rho(y)$ est une racine normale de $C_k(\lambda\,;y)$,

$$C_k(\lambda^*(y)-m-\mu+k\,;y)=0,\quad C_k(\lambda^*(0)-m-\mu+k+i\,;0)\neq0,\quad \text{si } i\geqq1.\tag{2.11}$$

Il faut noter que le polynôme $(\lambda)_{m+\mu-k}$ a les racines:

$$0,\ 1,\ \cdots,\ m-k-2,\ m-k-1,\ \cdots,\ m-k+\mu-1.\tag{2.12}$$

Rappelons la définition de μ. On sait alors que $C_{m+\mu}(\lambda^*(0)+i\,;0)=0$ pour quelques $i\in \boldsymbol{N}$, $i\geqq 1$, si et seulement si $\rho(0)=-2, -3, \cdots$. Nous distinguons trois cas:

Cas A. $\rho(0)\neq -2, -3, \cdots$

Cas B. $\rho(0)=-2, -3, \cdots$, mais $\rho(y)$ n'est pas une constante.

Cas C. $\rho(y)\equiv -2, -3, \cdots$ ($\rho(y)$ est une constante).

Au Cas A, $C_{m+\mu}(\lambda^*(0)+i\,;0)\neq 0$ pour $i\in \boldsymbol{N}$, $i\geqq 1$. Donc, donnés $u_{00}=g$, on peut déterminer uniquement u_{ij}; $i, j\in \boldsymbol{N}$, $j\leqq mi$, dans un voisinage de $y=0$ par la relation de récurrence (2.8).

Au Cas B, $C_{m+\mu}(\lambda^*(0)+i\,;0)=0$ pour $i=1, \cdots, \mu^*$. Ici $\mu^*=\mu$ quand $m>k$, et $\mu^*=\mu-1$ quand $m=k$. Dans ce cas aussi, la relation de récurrence (2.8) détermine uniquement u_{ij}; $i, j\in \boldsymbol{N}$, $1\leqq i$, $0\leqq j\leqq mi$. On le démontre par récurrence: en supposant $u_{i',j'}$ déjà déterminés pour $0\leqq i'<i<\mu^*$, $0\leqq j'\leqq mi'$, on montre que u_{ij} sont déterminés uniquement pour $0\leqq j\leqq mi$.

Mettons

$$\tilde{\lambda}=\lambda-\lambda_0\,,\quad \tilde{\lambda}^*(y)=\lambda^*(y)-\lambda_0\,,\quad \lambda_0=\max\{0,\, m-k-1\}. \tag{2.13}$$

Remarquons d'abord que

$$C_{m+\mu}(\lambda+i\,;y)=\tilde{\lambda}G_i(\tilde{\lambda}\,;y)\,,\quad G_i(0\,;0)\neq 0\,,\quad i=1, \cdots, \mu^*. \tag{2.14}$$

On prend la relation de récurrence (2.8) pour un polynôme de $\tilde{\lambda}$ de degré $m+\mu$, ce qu'on note

$$p_j(\tilde{\lambda})=p_{j0}+p_{j1}\tilde{\lambda}+\cdots+p_{j,m+\mu}\tilde{\lambda}^{m+\mu}. \tag{2.15}$$

Lemme 3. *Dans le polynôme* $(\lambda+i)_h$,

$$\textit{Le coefficient de } \lambda^\nu=\sum_{s'\geqq\nu} C_s^h(i)_s d_{s',\nu}\,, \tag{2.16}$$

où $s+s'=h$, $\nu=0, 1, \cdots, h$, *et* $d_{s',\nu}$ *sont les nombres définis dans le Lemme* 1.

Démonstration.

$$\frac{1}{\nu\,!}\partial_\lambda^\nu\partial_x^h x^{\lambda+i}=\frac{1}{\nu\,!}\partial_\lambda^\nu(\lambda+i)_h x^{\lambda+i-h}=\frac{1}{\nu\,!}\sum_\mu C_\mu^\nu\partial_\lambda^\mu(\lambda+i)_h x^{\lambda+i-h}(\log x)^{\nu-\mu}.$$

$$\partial_x^h\frac{1}{\nu\,!}\partial_\lambda^\nu x^{\lambda+i}=\partial_x^h x^{\lambda+i}\frac{(\log x)^\nu}{\nu\,!}=\sum_s C_s^h(\lambda+i)_s x^{\lambda+i-h}\sum_l d_{s',l}\frac{(\log x)^{\nu-l}}{(\nu-l)\,!}.$$

Soient $x=1$ et $\lambda=0$, on a alors (2.16). C. Q. F. D.

Lemme 4.

$$\sum_{h,s} C_h^p C_s^h(i)_s d_{s',\nu} d_{h',n}=\sum_h C_h^p(i)_h d_{h',n+\nu} C_\nu^{n+\nu}\,, \tag{2.17}$$

où $s+s'=h$, $h+h'=p$.

Démonstration.

$$I\equiv\frac{1}{\nu\,!}\partial_\lambda^\nu\partial_x^p x^{\lambda+i}\frac{(\log x)^n}{n\,!}=\frac{1}{\nu\,!}\partial_\lambda^\nu\sum_h C_h^p(\lambda+i)_h x^{\lambda+i-p}\sum_l d_{h',l}\frac{(\log x)^{n-l}}{(n-l)\,!}.$$

D'autre part,

$$I=\partial_x^p x^{\lambda+i}\frac{(\log x)^{n+\nu}}{(n+\nu)!}C_\nu^{n+\nu}=\sum_h C_h^p(\lambda+i)_h x^{\lambda+i-p}\sum_l d_{h',l}\frac{(\log x)^{n+\nu-l}}{(n+\nu-l)!}C_\nu^{n+\nu}.$$

Soient $\lambda=0$ et $x=1$. On a alors (2.17) à l'aide du Lemme 2. C. Q. F. D.

Par ces deux lemmes, on a de (2.8)

$$\begin{aligned} p_{j,\nu}=&\sum_{s,h,n} a_{m-s}C_h^{m+\mu-s}(\lambda_0+i)_h d_{h',\nu+n}C_\nu^{\nu+n}u_{i,j+n}\\ &+\sum_{s,\beta,i_2,h,n,\gamma,r} a_{m-s,\beta,i_1}C_h^{m-s+\mu}(\lambda_0+i_2)_h\\ &\times d_{h',\nu+n}C_\nu^{\nu+n}\frac{i!}{i_1!\,i_2!}C_\gamma^\beta q_{\gamma,r}(j+n)_r\partial_y^{\gamma'}u_{i_2,j+n-r}. \end{aligned}$$

Posons

$$(2.18)\qquad \begin{aligned} &A_{\nu+n}^\circ(y)=\sum_{s,h} a_{m-s}C_h^{m+\mu-s}(\lambda_0+i)_h d_{h',\nu+n}\\ &A'_{i_2,\nu+n,r}(y\,;\partial_y)=\sum_{s,\beta,h,\gamma}\frac{i!}{i_1!\,i_2!}a_{m-s,\beta,i_1}C_h^{m-s+\mu}(\lambda_0+i_2)_h d_{h',\nu+n}C_\gamma^\beta q_{\gamma,r}\partial_y^{\gamma'}. \end{aligned}$$

Alors $p_{j,\nu}$ se met comme la suite:

$$(2.19)\qquad p_{j,\nu}=\sum_n C_n^{\nu+n}\{A_{\nu+n}^\circ u_{i,j+n}+\sum_{i_2,r}A'_{i_2,\nu+n,r}(j+n)_r u_{i_2,j+n-r}\}.$$

Observons d'abord que

$$(2.20)\qquad p_{mi,0}=0.$$

En effet, au cas où $\nu=0$ et $j=mi$ dans (2.19), il faut que $n=0$, $r=m$, $s=m$, et $i_2=i-1$. Alors $(\lambda_0+i)_{m+\mu-k}=0$, pour $i=1,\cdots,\mu^*$, parce que $\lambda_0+i\geqq 1$ et que $\lambda_0+i-m-\mu+k-1\leqq 0$. De plus, $(\lambda_0+i_2)_\mu=0$ parce que $\lambda_0+i_2\geqq 0$ et que $\lambda_0+i_2-\mu+1=\max\{0,m-k-1\}+i-m+k-i_1-\mu+1\leqq 0$ pour $i=1,\cdots,\mu^*$. Donc on a (2.20).
C. Q. F. D.

Comme $\lambda^*(y)$ est analytique mais pas constante, on a

$$(2.21)\qquad p_{mi}(\tilde\lambda^*)/\tilde\lambda^*=p_{mi,1}+p_{mi,2}\tilde\lambda^*+\cdots+p_{mi,m+\mu}\tilde\lambda^{*m+\mu-1}=0.$$

Dans cette relation, à cause de (14), le coefficient de $u_{i,mi}$ ne s'annule pas. Donc la relation (2.21) détermine $u_{i,mi}$ uniquement.

Ensuite, posons

$$\pi_{mi-1}(\tilde\lambda)=p_{mi-1}(\tilde\lambda)-p_{mi}(\tilde\lambda)/\tilde\lambda.$$

Si on vérifie que

$$\pi_{mi-1}(0)=p_{mi-1,0}-p_{mi,1}=0,$$

on sait de la même façon que $u_{i,mi-1}$ est déterminé uniquement.

Proposition 1.

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} &p_{j,0}-p_{j+1,1}+\cdots+(-1)^\nu p_{j+\nu,\nu}\\ &=\sum_{n=0}^{m+\mu-\nu}\{A_{\nu+n}^\circ u_{i,j+\nu+n}+\sum_{i_2,r}A'_{i_2,\nu+n,r}(j+\nu+n)_r u_{i_2,j+\nu+n-r}\}\\ &\quad\times\{C_0^{n+\nu}-C_1^{n+\nu}+\cdots+(-1)^\nu C_\nu^{n+\nu}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Lorsque $\nu=0$, c'est évident. Nous supposons ensuite que (2.22) soit vrai pour ν. Lorsque $\nu\geqq 1$, $C_0^\nu-C_1^\nu+\cdots+(-1)^\nu C_\nu^\nu=0$. Lorsque $\nu=0$, $A_0=0$ et $A'_{i_2,0,r}=0$, parce que $(\lambda_0+i)_{m+\mu-k}=0$ et $(\lambda_0+i_2)_{\mu+m-s}=0$ pour $i=1, \cdots, \mu^*$. Donc le terme de $n=0$ s'annule, et par conséquant

$$(2.23)\qquad p_{j,0}-p_{j+1,1}+\cdots+(-1)^\nu p_{j+\nu,\nu}$$
$$=\sum_{n=0}^{m+\mu-\nu-1}\{C_0^{n+\nu+1}-C_1^{n+\nu+1}+\cdots+(-1)^\nu C_\nu^{n+\nu+1}\}$$
$$\times\{A_{\nu+n+1}^\circ u_{i,j+\nu+1+n}+\sum A'_{i_2,\nu+1+n,r}(j+n+1+\nu)_r u_{i_2,j+\nu+n+1-r}\}.$$

En ajoutant $(-1)^{\nu+1}p_{j+\nu+1,\nu+1}$, on a (2.22) pour $\nu+1$. C. Q. F. D.

Soit $\nu_j=\min\{mi-j, m+\mu\}$. Alors

$$(2.24)\qquad p_{j,0}-p_{j+1,1}+\cdots+(-1)^{\nu_j}p_{j+\nu_j,\nu_j}=0.$$

Preuve: Si $\nu_j=mi-j$, alors $j+\nu_j+n+1=mi+n+1$ et $j+\nu_j+n+1-r=mi+n+1-r$. D'autre part dans (2.23) il faut que $j+\nu_j+n+1\leqq mi$ et $j+\nu_j+n+1-r\leqq m(i-1)$. Donc le membre droit de (2.23) est vide. Si $\nu_j=m+\mu$, alors $\nu_j+n+1=m+\mu+n+1$. D'autre part, il faut que $\nu_j+n+1\leqq m+\mu$. Donc le membre droit de (2.23) est encore vide. En tout cas on a (2.24). C. Q. F. D.

Mettons

$$(2.25)\qquad \pi_{mi}(\tilde\lambda)=p_{mi}(\tilde\lambda),\quad \pi_j(\tilde\lambda)=p_j(\tilde\lambda)-\pi_{j+1}(\tilde\lambda)/\tilde\lambda,\qquad j=mi-1, \cdots, 0.$$

Par (2.24) on a

$$\pi_j(0)=0,\qquad j=mi, \cdots, 0.$$

Donc on a successivement

$$(2.26)\qquad \pi_j(\tilde\lambda^*)/\tilde\lambda^*=0,\qquad j=mi, mi-1, \cdots, 0.$$

Dans cette relation, à cause de (2.14), le coefficient de $u_{i,j}$ ne s'annule pas. Donc la relation (2.26) détermine $u_{i,j}$ d'une manière unique.

Considérons finalement le Cas C; la relation de récurrence est

$$(2.27)\qquad \sum_{s,h,n}a_{m-s}C_h^{m-s+\mu}(\lambda_0+i)_h d_{h',n}u_{i,j+n}$$
$$+\sum_{s,\beta,i_2,h,n}a_{m-s,\beta,i_1}C_h^{m-s+\mu}\frac{i!(\lambda_0+i_2)_h}{i_1!i_2!}d_{h',n}\partial_y^\beta u_{i_2,j+n}=0.$$

Pour $i=1, \cdots, \mu^*$, les termes de $n=0$ s'annulent identiquement, parce que $(\lambda_0+i)_{m+\mu-k}=0$ et $(\lambda_0+i_2)_{m+\mu-s}=0$. Le coefficient de $u_{i,j+1}$ est $\sum_{s,h}a_{m-s}C_h^{m+\mu-s}\times(\lambda_0+i)_h d_{h',1}$. C'est le coefficient de degré 1 du polynôme $C_{m+\mu}(\tilde\lambda+\lambda_0+i; y)$, qui ne s'annule pas, parce que $\tilde\lambda=0$ est un zéro simple pour $i=1, \cdots, \mu^*$. Pour $i>\mu^*$ le coefficient de $u_{i,j}$ ne s'annule pas. Donc $u_{i,j}=0$ pour tous les $i\geqq 1$, $j\geqq 1$.

On note $u_{i,0}=u_i$; on a alors

$$(2.28)\qquad \sum_{s=0}^k a_{m-s}(\lambda_0+i)_{m+\mu-s}u_i+\sum_{s,\beta,i_2}a_{m-s,\beta,i_1}\frac{i!(\lambda_0+i_2)_{m-s+\mu}}{i_1!i_2!}\partial_y^\beta u_{i_2}=0.$$

Pour $i=1, \cdots, \mu^*$, on peut donner u_i arbitrairement. Mais pour $i>\mu^*$, la relation (2.28) détermine u_i uniquement.

3. Convergence.

Montrons la convergence de la série (2.2) avec $\lambda=\lambda^*(y)$ obtenue dans le paragraphe précédent.

Proposition 2. *Il existe trois constantes C_0, C, R et un voisinage V de l'origine de $\boldsymbol{R}^d$ tels que pour tous i, j, α on a*

$$|\partial_y^\alpha u_{ij}(y)| \leqq C_0 C^{(m+1)i-j} \frac{\{|\alpha|+mi\}!}{\{(m-1)i\}!} R^{|\alpha|+mi}, \qquad y \in V. \tag{3.1}$$

Démonstration. Pour $i \leqq \mu^*$, on peut supposer (3.1). Donné $i(>\mu^*)$, j, α quelconques, on suppose que (3.1) soit vrai pour tous i', j', α' tels que "$i'<i$", ou "$i'=i$, $j'>j$" ou "$i'=i$, $j'=j, \alpha'<\alpha$". Ici $\alpha'<\alpha$ implique que $\alpha_i' \leqq \alpha_i$ pour tout i, mais $|\alpha'|<|\alpha|$. Montrons que (3.1) est encore vrai pour i, j, α.

Pour $i>\mu^*$ on peut supposer

$$|C_{m+\mu}(\lambda^*+i\,;y)| \geqq i^{m+\mu}/d_0, \qquad y \in V, \tag{3.2}$$

où d_0 est une constante positive qui ne dépend pas de i. Notons

$$b_0 = \sum_{s=0}^{k} a_{m-s}(y)(\lambda^*+i)_{m+\mu-s} = C_{m+\mu}(\lambda^*+i\,;y),$$

$$b_n = \sum_{s,h} a_{m-s} C_h^{m+\mu-s}(\lambda^*+i)_h d_{h',n}, \qquad n=1, 2, \cdots, m+\mu.$$

Alors on a

$$-b_0 \partial_y^\alpha u_{ij} = \partial_y^\alpha b_0 u_{ij} - b_0 \partial_y^\alpha u_{ij} + \partial_y^\alpha \sum_{n \geqq 1} b_n u_{i,j+n} + \partial_y^\alpha S, \tag{3.3}$$

où S est le deuxième terme de la relation (2.8);

$$S = \sum_{i_1,s,n,\gamma',r} \frac{i!}{i_1!\,i_2!} b_{i,i_1,s,n,\gamma',r}(j+n)_r \partial_y^{\gamma'} u_{i_2,j+n-r},$$

$$b_{i,i_1,s,n,\gamma',r} = \sum_{\beta,h} a_{m-s,\beta,i_1} C_h^{m-s+\mu}(\lambda^*+i_2)_h C_\gamma^\beta q_{\gamma,r} d_{h',n}.$$

Lemme 5. *Supposons que*

$$|\partial_y^\alpha b_i(y)| \leqq C(i+|\alpha|)!\,\rho^{i+|\alpha|}, \quad y \in V, \quad i=0, 1, 2, \cdots$$

$$|\partial_y^\alpha f(y)| \leqq C|\alpha|!\,\rho^{|\alpha|}, \qquad y \in V,$$

où C et ρ sont des constantes positives. Alors pour n'importe quelle constante $\rho_1>\rho$, il existe une constante C' avec laquelle on a

$$|\partial_y^\alpha(b_i f)| \leqq C'(i+|\alpha|)!\,\rho_1^{i+|\alpha|}, \qquad y \in V, \quad i=0, 1, \cdots \tag{3.4}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}|\partial_y^\alpha(b_i f)| &= |\sum_\beta C_\beta^\alpha b_i^{(\beta)} f^{(\beta')}| \\ &\leqq C^2 \sum_\beta C_\beta^\alpha (i+|\beta|)!\,|\beta'|!\,\rho^{i+|\beta|+|\beta'|} \\ &= \rho^{i+|\alpha|}(i+|\alpha|)!\,C^2 \sum_\beta C_\beta^\alpha / C_{|\beta|}^{i+|\alpha|}, \qquad \beta+\beta'=\alpha.\end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{|\beta|=k} C_\beta^\alpha = C_k^{|\alpha|}$, et aussi que $|\alpha|(\rho/\rho_1)^{|\alpha|} \leqq C_1$. Ici C_1 est une certaine constante. Si on met $C'=C_1C^2$, alors on a (3.4). C.Q.F.D.

Par ce lemme, on peut supposer

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}&|\partial_y^\alpha b_n(y)| \leqq C_1|\alpha|!\,\rho^{|\alpha|} i^{m+\mu}, \qquad y\in V \\ &|\partial_y^\alpha b_{i,i_1,s,n,\gamma',r}(y)| \leqq C_1(i_1+|\alpha|)!\,\rho^{i_1+|\alpha|} i_2^{m-s+\mu},\end{aligned}$$

$y\in V$, où C_1 est une constante qui ne dépend pas non seulement de i, i_1, α, mais aussi de s, n, r, γ'.

Considérons d'abord le premier terme de (3.3);

$$\begin{aligned}|(b_0 u_{ij})^{(\alpha)} - b_0 u_{ij}^{(\alpha)}| &= |\sum_{\beta>0} C_\beta^\alpha b_0^{(\beta)} u_{ij}^{(\beta')}| \\ &\leqq \sum_{\beta>0} C_\beta^\alpha C_1 |\beta|!\,\rho^{|\beta|} i^{m+\mu} C_0 C^{(m+1)i-j} \frac{\{mi+|\beta'|\}!}{\{(m-1)i\}!} R^{|\beta'|+mi} \\ &= M_1 C_0 C^{(m+1)i-j} R^{|\alpha|+mi} \{|\alpha|+mi\}!/\{(m-1)i\}!,\end{aligned}$$

où $\beta+\beta'=\alpha$, $M_1=\sum_{\beta>0} C_1\ C_\beta^\alpha / C_{|\beta|}^{|\alpha|+mi}\ (\rho/R)^{|\beta|} i^{m+\mu}$. Remarquons que $\sum_{|\beta|=k} C_\beta^\alpha = C_k^{|\alpha|}$ et que $C_k^{|\alpha|} \leqq C_k^{|\alpha|+mi}$. Alors

$$M_1 \leqq C_1\rho/(R-\rho) i^{m+\mu}.$$

Si R est une constante satisfaisant aux conditions

$$(3.6)\qquad \rho/R<1, \qquad d_0 C_1 \rho/(R-\rho) \leqq 1/3,$$

alors on a

$$(3.7)\qquad |b_0^{-1}\{(b_0u_{ij})^{(\alpha)} - b_0 u_{ij}^{(\alpha)}\}| \leqq \frac{1}{3} C_0 C^{(m+1)i-j} R^{|\alpha|+mi} \{|\alpha|+mi\}!/\{(m-1)i\}!.$$

Considérons ensuite le deuxième terme de (3.3);

$$\begin{aligned}|\partial_y^\alpha \sum_{n\geq 1} b_n u_{i,j+n}| &= |\sum_{n\geq 1,\beta} C_\beta^\alpha b_n^{(\beta)} u_{i,j+n}^{(\beta')}| \\ &\leqq \sum_{n,\beta} C_\beta^\alpha C_1 |\beta|!\,\rho^{|\beta|} i^{m+\mu} C_0 C^{(m+1)i-j-n} \frac{\{|\beta'|+mi\}!}{\{(m-1)i\}!} R^{mi+|\beta'|} \\ &= M_2 C_0 C^{(m+1)i-j} \frac{\{|\alpha|+mi\}!}{\{(m-1)i\}!} R^{mi+|\alpha|},\end{aligned}$$

où $\beta+\beta'=\alpha$, $M_2=\sum_{n\geq 1,\beta} C_1 \{C_\beta^\alpha / C_{|\beta|}^{|\alpha|+mi}\}(\rho/R)^{|\beta|} C^{-n} i^{m+\mu}$. Si les constantes R et C satisfont aux conditions

$$(3.8)\qquad C>1, \quad \rho/R<1, \quad C_1 d_0/\{(1-\rho/R)(C-1)\} \leqq \frac{1}{3},$$

on a

$$(3.9)\qquad |b_0^{-1}\partial_y^\alpha \sum_{n\geqq 1} b_n u_{i,j+n}| \leqq \frac{1}{3} C_0 C^{(m+1)i-j} R^{|\alpha|+mi} \frac{\{|\alpha|+mi\}\,!}{\{(m-1)i\}\,!}.$$

Finalement on considère le dernier terme de (3.3);

$$|\partial_y^\alpha S| = \Big|\sum_{i_1,s,n,\gamma',r,\beta} C_\beta^\alpha \frac{i\,!}{i_1\,!\,i_2\,!} b^{(\beta)}_{i,i_1,s,n,\gamma',r}(j+n)_r \partial_y^{\beta'+\gamma'} u_{i_2,j+n-r}\Big|$$

$$\leqq \sum C_\beta^\alpha \frac{i\,!}{i_1\,!\,i_2\,!} C_1(i_1+|\beta|)\,!\,\rho^{i_1+|\beta|} i_2^{m-s+\mu}(j+n)_r$$

$$\times C_0 C^{(m+1)i_2-j-n+r} R^{|\beta'|+|\gamma'|+mi_2} \frac{\{|\beta'|+|\gamma'|+mi_2\}\,!}{\{(m-1)i_2\}\,!}$$

$$= M_3 C_0 C^{(m+1)i-j} R^{|\alpha|+mi} \frac{\{|\alpha|+mi\}\,!}{\{(m-1)i\}\,!},$$

où $\beta+\beta'=\alpha$, $i_1+i_2=i+k-s$, $|\gamma'|+r\leqq s$, $i_2\leqq i-1$ et

$$M_3 = \sum_{i_1,s,n,\gamma',r,p} C_1 \frac{(i)_{i-i_2}(|\alpha|)_p(i_1+p)\,!}{i_1\,!\,p\,!} i_2^{m-s+\mu}(j+n)_r$$

$$\times \frac{((m-1)i)_{(m-1)(i-i_2)}}{(|\alpha|+mi)_{p-|\gamma'|+m(i-i_2)}} \rho^{i_1+p} C^{-(m+1)(i-i_2)-n+r} R^{-p+|\gamma'|-m(i-i_2)}.$$

Remarquons que

$$(i)_{i-i_2}(|\alpha|)_p((m-1)i)_{(m-1)(i-i_2)}/(|\alpha|+mi)_{p-|\gamma'|+m(i-i_2)}$$

$$\leqq (i)_{i-i_2}((m-1)i)_{(m-1)(i-i_2)}/(mi)_{-|\gamma'|+m(i-i_2)}$$

$$\leqq (mi_2+|\gamma'|)_{|\gamma'|}\,;\; i_2^{m-s+\mu}(j+n)_r(mi_2+|\gamma'|)_{|\gamma'|} \leqq C' i^{m+\mu},$$

où C' est une constante; $-(m+1)(i-i_2)-n+r\leqq -1$;

$$i_1+|\gamma'|-m(i-i_2) = k-s-(m-1)(i-i_2)+|\gamma'| \leqq -m+1+k\leqq 1.$$

Alors on a

$$M_3 \leqq \sum_{i_1,p} C'' C_p^{i_1+p} i^{m+\mu}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{i_1+p} C^{-1}R$$

$$\leqq C'' i^{m+\mu}(1-2\rho/R)^{-2}C^{-1}R,\quad \text{où } C'' \text{ est une constante.}$$

Si les constantes C et R satisfont aux conditions

$$(3.10)\qquad 2\rho/R<1,\qquad C''d_0(1-2\rho/R)^{-2}C^{-1}R\leqq \frac{1}{3},$$

alors on a

$$(3.11)\qquad |b_0^{-1}\partial_y^\alpha S| \leqq \frac{1}{3} C_0 C^{(m+1)i-j} R^{|\alpha|+mi} \frac{\{|\alpha|+mi\}\,!}{\{(m-1)i\}\,!}.$$

Nous avons ainsi (3.1) pour i, j, α; en effet, il y a des constantes C et R satisfaisant aux (3.6), (3.8) et (3.10) simultanément. C.Q.F.D.

Convergence de la série (2.2).

$$u = x^{\lambda \bullet} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{x^{i-j}(x(\log x)^m)^j}{i\,!\,(mj)\,!} u_{i,mj}$$

$$+x^{\lambda^*}\sum_{k=1}^{m-1}x(\log x)^k\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{x^{i-1-j}(x(\log x)^m)^j}{i\,!\,(mj+k)\,!}u_{i,mj+k}.$$

Posons

$$f_1(x, z, y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{x^{i-j}z^j}{i\,!\,(mj)\,!}u_{i,mj},$$

$$f_{k+1}(x, z, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{x^{i-1-j}z^j}{i\,!\,(mj+k)\,!}u_{i,mj+k}, \qquad k=1, \cdots, m-1.$$

Pour $|x|$, $|z|<\delta$,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}|u_{i,mj}^{(\alpha)}|\,|x|^{i-j}|z|^j/i\,!\,(mj)\,!$$

$$\leqq\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{\delta^i}{i\,!\,(mj)\,!}C_0C^{(m+1)i-mj}\frac{\{|\alpha|+mi\}\,!}{\{(m-1)i\}\,!}R^{|\alpha|+mi}$$

$$\leqq\sum_i\frac{\delta^i}{i\,!}e^{1/C}C_0C^{(m+1)i}\frac{\{|\alpha|+mi\}\,!}{\{(m-1)i\}\,!}R^{|\alpha|+mi}$$

$$\leqq C_0e^{1/C}(3R)^{|\alpha|}|\alpha|\,!\sum_{i=0}^{\infty}\{3^m\delta C^{m+1}R^m\}^i.$$

Donc, si on prend une constante positive δ comme $3^m\delta C^{m+1}R^m<1$, $f_1(x, z, y)$ est analytique dans $\{|x|<\delta\}\times\{|z|<\delta\}\times V$. Il en est de même de $f_k(x, z, y)$. Il résulte de tout cela que *la série* (2.2) *converge dans un voisinage de l'origine de* $\boldsymbol{R}^{d+1}$; *Elle est une solution de l'équation* (2.1) *sauf* $x=0$; *de plus elle peut s'écrire sous la forme*

$$u=x^{\lambda^*}f_1(x, x(\log x)^m, y)+x^{\lambda^*+1}\sum_{k=1}^{m-1}(\log x)^kf_{k+1}(x, x(\log x)^m, y)$$

avec des fonctions $f_k(x, z, y)$ *analytiques dans un voisinage de l'origine de* $\boldsymbol{R}^{d+2}$.

4. Solution nulle.

Posons

$$(4.1)\qquad u_+=\begin{cases}x^{\lambda^*(y)}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{mi}\frac{x^i(\log x)^j}{i\,!\,j\,!}u_{ij}(y), & \text{pour } x>0\\ 0, & \text{pour } x\leqq 0.\end{cases}$$

Puisque $\mathrm{Re}\,\lambda^*(y)=\mathrm{Re}\,\rho(y)+m-k+\mu>\max\{-1, m-k-2\}$, u_+ est localement sommable dans un voisinage $\Omega=\{|x|<\delta\}\times V$ de l'origine. Le but de ce paragraphe est de démontrer

$$(4.2)\qquad \langle P_\mu u_+, \varphi\rangle=0, \qquad \text{pour tout } \varphi(x, y)\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Démonstration.

$$(4.3)\qquad \langle P_\mu u_+, \varphi\rangle=\langle u_+, {}^tP_\mu\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{x>\varepsilon}u\,{}^tP_\mu\varphi\,dx\,dy.$$

On écrit ${}^tP_\mu$ sous la forme

$$(4.4)\qquad {}^tP_\mu=\sum_{s=0}^{k}\tilde{a}_{m-s}(y)x^{k-s}(-\partial_x)^{m+\mu-s}$$
$$+\sum_{s=1}^{m+\mu}{}^tA_s(x,\ y\,;\partial_y)x^{s^*}(-\partial_x)^{m+\mu-s},$$

où $s^*=\max\{0,\ k-s+1\}$, ordre $A_s\leqq\min\{s,\ m\}$.

En intégrant par partie, on a

$$(4.5)\qquad \langle P_\mu u_+,\ \varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{s,n}\int_{x=\varepsilon}\partial_x^{m+\mu-s-n}x^{k-s}\tilde{a}_{m-s}u(-\partial_x)^{n-1}\varphi dy$$
$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{s,n}\int_{x=\varepsilon}\partial_x^{m+\mu-s-n}x^{s^*}A_s(x,\ y\,;\partial_y)u(-\partial_x)^{n-1}\varphi dy.$$

Mettons

$$(4.6)\qquad v_n(x,\ y)=\sum_s\partial_x^{m+\mu-s-n}x^{k-s}\tilde{a}_{m-s}u$$
$$+\sum_{s\geqq1}\partial_x^{m+\mu-s-n}x^{s^*}A_s(x,\ y\,;\partial_y)u,\qquad n=1,\ \cdots,\ m+\mu.$$

Alors il suffit de montrer

$$(4.7)\qquad v_n(\varepsilon,\ y)\longrightarrow 0,\qquad \text{lorsque}\quad \varepsilon\to+0,\quad n=1,\ \cdots,\ m+\mu.$$

Puisque $\lambda^*+k-s-(m+\mu-s-n)=\lambda^*+k-m-\mu+n$, et que $\lambda^*+s^*-(m+\mu-s-n)\geqq\lambda^*+k-m-\mu+n+1$, on peut écrire v_n, par les Lemmes 1 et 2, sous la forme suivante:

$$(4.8)\qquad v_n(x,\ y)=x^{\lambda^*+k-m-\mu+n}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{mi}\frac{x^i(\log x)^j}{i\,!\,j\,!}v_{n,i,j}(y),$$

$n=1,\ 2,\ \cdots,\ m+\mu$. Soient

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} &i_0=i_0(n)=\min\{i\,;v_{n,i,j}(y)\not\equiv0 \text{ pour quelque } j\},\\ &j_0=j_0(n)=\max\{j\,;v_{n,i_0,j}(y)\not\equiv0\}.\end{aligned}$$

Pour avoir (4.7) il suffit de montrer

$$(4.10)\qquad \mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+k-m-\mu+n+i_0>0.$$

Supposons provisoirement que $\mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+k-m-\mu+n+i_0\leqq0$. Par le Lemme 1, on a

$$(4.11)\qquad x^n\partial_x^n v_n=(\lambda^*+k-m-\mu+n+i_0)_n x^{\lambda^*+k-m-\mu+n}\frac{x^{i_0}(\log x)^{j_0}}{i_0\,!\,j_0\,!}v_{n,i_0,j_0}$$
$$+o(x^{\mathrm{Re}\,\lambda^*+k-m-\mu+n+i_0}(\log x)^{j_0}),\qquad \text{lorsque}\quad x\to+0.$$

où "$o(\ )$" est la notation de Landau, applée petit o. D'autre part,

$$x^n\partial_x^n v_n=x^nP_\mu u-x^n\sum_{s>m+\mu-n}^{k}\partial_x^{m+\mu-s}\tilde{a}_{m-s}u-x^n\sum_{s>m+\mu-n}\partial_x^{m+\mu-s}x^{s^*}A_s(x,\ y\,;\partial_y)u.$$

Si $k\geqq m+\mu-n+1$, alors $\mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+k-m-\mu+n+i_0\geqq\mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+1>0$, ce qui est contradictoire à notre supposition. Donc le deuxième terme est vide. De plus, $\mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+s^*+n-m-\mu+s\geqq\mathrm{Re}\,\lambda^*(0)+1>0$, au troisième terme. Donc

$$(4.12)\qquad x^n\partial_x^n v_n=o(1),\qquad \text{lorsque}\quad x\to+0.$$

Au cas où $\lambda^* \not\equiv \lambda_0$ $(=\max\{0, m-k-1\})$, $(\lambda^*+k-m-\mu+n+i_0)_n \not\equiv 0$. Donc (4.11) et (4.12) sont contradictoire. On a ainsi (4.10).

Nous considérons ensuite le cas où $\lambda^* \equiv \lambda_0$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la solution u s'écrit sous la forme:

(4.13) $$u=\sum_{i=0}^{\infty} x^{\lambda_0+i} u_i(y)/i\,!, \qquad u_0=g(y).$$

C'est une fonction régulière à $x=0$, et donc la fonction $v_n(x, y)$ y est aussi régulière. Donc pour (4.7), il suffit de montrer

(4.14) $$v_n(0, y)=0, \qquad n=1, 2, \cdots, m+\mu.$$

$v_n(0, y)$ est de la forme:

(4.15) $$v_n(0, y)=\sum_s \tilde{a}_{m-s} \frac{(m+\mu-s-n)\,!}{(m+\mu-k-\lambda_0-n)\,!} u_{m+\mu-k-\lambda_0-n}$$
$$+\sum_{s,h} C_h^{m+\mu-s-n} (\partial_x^h A_s)(0, y\,; \partial_y) \frac{h'\,!}{(h'-\lambda_0-s^*)\,!} u_{h'-\lambda_0-s^*}.$$

Pour $n>\mu^*+1$, le membre droit de (4.15) est vide. Démontrons

(4.16) $$\sum_{s=0}^{k} \tilde{a}_{m-s}(m+\mu-s-n)\,!=0 \quad \text{pour } n=\mu^*+1, \ \neq 0 \quad \text{pour } n=1, \cdots, \mu^*.$$

Lemme 6.

(4.17) $$\sum_s a_{m-s}(\lambda)_{m-s+\mu}=\sum_s \tilde{a}_{m-s}(\lambda+k-s)_{m-s+\mu}.$$

Preuve. Ça suit immédiatement de la relation

$$\sum_s \partial_x^{m+\mu-s} x^{k-s} \tilde{a}_{m-s} x^{\lambda}=\sum_s a_{m-s} x^{k-s} \partial_x^{m+\mu-s} x^{\lambda}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Il suit de ce lemme que

(4.18) $$(\lambda)_{m-k+\mu} C_k(\lambda-m-\mu+k)=\sum \tilde{a}_{m-s}(\lambda+k-s)_{m+\mu-s-n}(\lambda-m-\mu+k+n)_n.$$

$\lambda=m+\mu-k-n$ est un zéro simple de $(\lambda)_{m-k+\mu}$, et aussi de $(\lambda-m-\mu+k+n)_n$. Pour $n=\mu^*+1-l$, $m+\mu-k-n=\lambda_0+l$, où $l=0, 1, \cdots \mu^*$. $C_k(\lambda_0+l-m-\mu+k)=0$ pour $l=0$ $(n=\mu^*+1)$, et $\neq 0$ pour $l=1, \cdots, \mu^*$ $(n=\mu^*, \cdots, 1)$. Donc on a (4.16).

Remarquons d'abord que $m+\mu-k-\lambda_0-n=l>m+\mu-s-n-\lambda_0-s^*$. Rappelons ensuite que $u_1, \cdots, u_{\mu^*}$ sont indéterminés. Par ces remarques, on voit que l'on peut choisir $u_1, \cdots, u_{\mu^*}$ d'une façon unique afin que (4.14) soit vrai pour $n=1, \cdots, \mu^*$.

Reconnaissance. La plupart de ce travail a été faite pendant le séjour de l'auteur à l'Ecole Polytechnique. L'auteur voudrait exprimer ses remerciements à Professeur C. Goulaouic qui l'a accepté et encouragé.

Departement de Mathématiques Appliquées
Faculté de Technologie
Université d'Ehime

Bibliographie

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, Cauchy Problem with characteristic initial hypersurface, C. P. A. M., **26** (1973), 455-475.
[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, Cauchy problem with multiple characteristics in space of regular distributions, Uspehi Math. Nauk, **29** (1974), 72-78.
[3] Y. Hasegawa, On the initial-value problems with data on a double characteristic, J. Math. Kyoto Univ., **11** (1971), 357-372.
[4] Y. Hasegawa, On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, J. Math. Kyoto Univ., **13** (1973), 579-593.
[5] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1963.
[6] H. Komatsu, Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **23** (1976), 297-342.
[7] S. Mizohata, Solutions nulles et solutions non-analytiques, J. Math. Kyoto Univ., **1-2** (1962), 271-302.
[8] T. Oaku, F-mild hyperfunctions and Fuchsian partial differential equations, à apparatîre dans Advanced Studies in Pure Math.
[9] S. Ouchi, Characteristic indices and subcharacteristic indices of surfaces for linear partial differential equations, Proc. Japan Acad., **57**, Ser. A (1981).
[10] J. Persson, Non-uniqueness in the characteristic Cauchy problem when coefficients are analytic, Mathematiche, **27** (1972), 145-152.
[11] L. Schwartz, Théorie des distributions I-II, Paris, 1950-1951.
[12] H. Tahara, Fuchsien type equations and fuchsien hyperbolic equations, Japan. J. Math., **5** (1979), 245-347.

Ajouté au moment de la correction des épreuves: Le résultat obtenu ici a été énoncé dans "K. Igari, Sur la construction de solutions nulles pour les opérateurs du type de Fuchs, Séminaire J. Vaillant, Univ. de Paris VI (1982-1983), Hermann, Paris, pp. 97-105".