J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
25-4 (1985) 627–633

Über Längen- und Flächenverzerrungen für die Carathéodorysche Klasse

Herrn Professor Yukio Kusunoki zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

Von

Yûsaku KOMATU

(Communicated by Prof. Kusunoki June 1, 1984)

Einleitung

Es sei $\mathscr{F}$ die Klasse derjenigen im Einheitskreis $E=\{|z|<1\}$ regulär analytischen Funktionen f, die durch $f(0)=0$ und $f'(0)=1$ normiert sind. In einer früheren Note [4], und mehr ausführlich in [5], haben wir den linearen Operator $\mathscr{L}$ eingeleitet, der auf der Klasse $\mathscr{F}$ durch die Gleichung

$$\mathscr{L}f(z)=\int_I \frac{f(zt)}{t}\, d\sigma(t)$$

mit einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß σ auf dem Intervall $I=[0, 1]$ definiert wird. Es läßt sich dabei zeigen, daß dieser Operator immer in eine in bezug auf einen reellen Parameter $\lambda\geqq 0$ additive Familie $\{\mathscr{L}^\lambda\}$ mit $\mathscr{L}^1=\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}^0=\mathrm{id}$ eingebettet wird und sogar, daß es unter gewisser zugefügter Einschränkung an σ ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß σ_λ für jedes λ gibt, das die Integraldarstellung

$$\mathscr{L}^\lambda f(z)=\int_I \frac{f(zt)}{t}\, d\sigma_\lambda(t)$$

zuläß. Im folgenden soll es sich um diese Familie $\{\mathscr{L}^\lambda\}$ handeln und der Kürze halber wird $f_\lambda=\mathscr{L}^\lambda f$ geschrieben.

Für das besondere Maß $\sigma(t)=t$ tritt ein ausgezeichneter Fall auf. In der Tat, läßt sich zeigen, daß das Maß σ_λ dann die Dichte besitzt und sogar der Operator $\mathscr{L}^\lambda$ explizit durch

$$\mathscr{L}^\lambda f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 \frac{f(zt)}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} dt$$

bestimmt wird. Dieser Operator führt sich demgemäß auf die fraktionale Integration der Ordnung λ in bezug auf $\log z$ zurück; nämlich läßt er sich in die Gestalt

$$\mathscr{L}^\lambda f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_\infty^{\log z} f(e^\omega)\,(\log z-\omega)^{\lambda-1}d\omega$$

umformen, wobei das Integral längs der zur reellen Achse parallelen Halbgerade anzunehmen ist, die in der Halbebene $\{\mathrm{Re}\,\omega<0\}$ verläuft.

Wir haben in [6] die Längenverzerrung von f_λ für einige bestimmte Unterklassen von $\mathscr{F}$ hergeleitet. Andrerseits haben wir die Carathéodorysche Klasse $\mathscr{P}(\alpha)$ der Ordnung $\alpha<1$ betrachtet, die aus den in E regulären, $p(0)=1$ und $\mathrm{Re}\,p(z)>\alpha$ genügenden Funktionen p besteht. Die Klasse $\mathscr{F}(\alpha)$ derjenigen Funktionen f, die die Gestalt $f(z)=zp(z)$ mit $p\in\mathscr{P}(\alpha)$ besitzen, ist eine Unterklasse von $\mathscr{F}$. Da aus $f(z)/z\in\mathscr{P}(\alpha)$ ersichtlich $f_\lambda(z)/z\in\mathscr{P}(\alpha)$ für jedes λ folgt, so zieht $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ nach sich $f_\lambda\in\mathscr{F}(\alpha)$. Für diese Klasse $\mathscr{F}(\alpha)$ haben wir in [7] den Wertevorrat von f_λ erörtet. Nebenbei bemerkt, daß die übliche Klasse der konvexen Abbildungen eine echte Unterklasse von $\mathscr{F}(1/2)$ ist, wie schon von Strohhäcker [9] gezeigt wurde.

In der vorliegenden Note werden wir die Längen- und Flächenverzerrungen über $f_\lambda(z)/z$ für $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ mit $\alpha<1$ und $\lambda\geqq 0$ betrachten. Die hier gebrauchten Beweismittel sind zwar denjenigen in den früheren Noten ähnlich, aber wir werden sie im folgenden wegen der Selbstabgeschlossenheit umständlich wiederholen.

Hilfssätze

Wir beginnen mit den Hilfssätzen für $\lambda=0$.

Hilssatz 1. *Es sei $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ und $L(r)=L(r;f)$ bezeichne die Länge der Bildkurve von $\{|z|=r<1\}$ bei der Abbildung $w=f(z)/z$. Dann gilt*

$$L(r)\leqq(1-\alpha)\frac{4\pi r}{1-r^2}.$$

Die Schranke wird für jedes $r>0$ dann und nur dann erreicht, wenn $f(z)/z$ den Einheitskreis E auf die Halbebene $\{\mathrm{Re}\,w>\alpha\}$ abbildet, nämlich, wenn f die Gestalt

$$f(z)=z\frac{1+(1-2\alpha)\varepsilon z}{1-\varepsilon z} \quad \textit{mit } |\varepsilon|=1$$

besitzt.

Beweis. Aus $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ ergibt sich

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{f(z)}{z}-\alpha\right)\in\mathscr{P}(0)$$

und folglich gibt es mittels der Darstellung von Herglotz [1] ein auf $(-\pi,\pi]$ gestütztes Wahrscheinlichkeitsmaß τ derart, daß die Darstellung

$$g(z)\equiv\frac{f(z)}{z}=(1-\alpha)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\tau(\varphi)+\alpha$$

$$=2(1-\alpha)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z}d\tau(\varphi)-(1-2\alpha)$$

gilt. So ergibt sich durch direkte Rechnung

$$\begin{aligned}
L(r) &= r\int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|\,d\theta \\
&\leqq 2(1-\alpha)r\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}\,d\tau(\varphi) \\
&= 2(1-\alpha)r\int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}\,d\theta \\
&= 2(1-\alpha)r\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{1-r^2}\,d\tau(\varphi) \\
&= (1-\alpha)\frac{4\pi r}{1-r^2}\,.
\end{aligned}$$

Nun, um die Schranke in dieser Abschätzung für ein $r>0$ erreicht zu werden, ist es notwendig und hinreichend, daß die Größe $e^{i\varphi}/(e^{i\varphi}-re^{i\theta})^2$ für jedes θ dasselbe Argument für $\varphi\in(-\pi,\pi]$ mit $d\tau(\varphi)>0$ besitzt. So kommt es darauf hinaus, daß das assozierte Maß τ sich an einer einzigen Stelle φ_0 konzentriert. Mithin nimmt die Extremalfunktion die Gestalt

$$f(z)=z\left((1-\alpha)\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}+\alpha\right)=z\,\frac{1+(1-2\alpha)\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\,,\quad \varepsilon=e^{-i\varphi_0}.$$

Dieser Hilfssatz erwähnt eine Erweiterung des von Rogosinski [8] hergeleiteten Resultats für die Klasse $\mathscr{F}(0)$; vgl. auch [2], [3].

Hilfssatz 2. *Es sei $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ und $A(r)=A(r;f)$ bezeichne den nach der Vielfachheit berechneten Flächeninhalt des Bildes von der Kreisscheibe $\{|z|<r<1\}$ bei der Abbildung $w=f(z)/z$. Dann gilt*

$$A(r)\leqq(1-\alpha)^2\frac{4\pi r^2}{(1-r^2)^2}\,.$$

Die Schranke wird wieder durch die im Hilfssatz 1 angegebene Extremalfunktion erreicht.

Beweis. Den Bezeichnungen im Beweis des Hilfssatzes 1 folgend, erhalten wir durch direkte Rechnung nacheinander

$$\begin{aligned}
A(r) &= \int_0^r \rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi}|g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \\
&\leqq 4(1-\alpha)^2\int_0^r \rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|e^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}|^4}\,d\tau(\varphi) \\
&= 4(1-\alpha)^2\int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi)\int_0^r \rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|e^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}|^4}\,d\theta \\
&= 4(1-\alpha)^2\int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi)\int_0^r 2\pi\frac{\rho(1+\rho^2)}{(1-\rho^2)^3}\,d\rho \\
&= 4(1-\alpha)^2\int_{-\pi}^{\pi}\pi\frac{r^2}{(1-r^2)^2}\,d\tau(\varphi) \\
&= (1-\alpha)^2\frac{4\pi r^2}{(1-r^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Die Extremalaussage läßt sich ebenso wie im vorigen Hilfssatz bestätigen.

Während der eben angegebene Beweisgang sich auf direkte Rechnung stützt, könnten wir auch den Hilfssatz 1 zusammen mit der isoperimetrischen Ungleichung brauchen, die bei der nicht schlichten Abbildung gültig bleibt. In der Tat, erhalten wir damit einfach

$$\begin{aligned} A(r) &\leqq \frac{1}{4\pi} L(r)^2 \\ &\leqq \frac{1}{4\pi}\left((1-\alpha)\frac{4\pi r}{1-r^2}\right)^2 = (1-\alpha)^2 \frac{4\pi r^2}{(1-r^2)^2}. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen in der ersten Ungleichung tritt dann und nur dann auf, wenn $g \in \mathscr{P}(\alpha)$ eine lineare Funktion ist, die den Kreis $\{|z|<r\}$ auf eine Kreisscheibe und sogar E auf die Halbebene $\{\mathrm{Re}\, w>\alpha\}$ abbildet.

Längenverzerrung

Nun leiten wir die dem Hilfssatz 1 entsprechende Längenverzerrung für $\lambda>0$.

Satz 1. *Es sei $\lambda>0$ und $L_\lambda(r)$ bezeichne die Länge der Bildkurve von $\{|z| = r<1\}$ bei der Abbildung $w=f_\lambda(z)/z$ mit einem aus $f\in \mathscr{F}(\alpha)$ erzeugten f_λ. Dann gilt*

$$L_\lambda(r) \leqq \int_I L(rt)d\sigma_\lambda(t),$$

worin $L=L_0$ der im Hilfssatz 1 angegebenen Abschätzung genügt.

Beweis. Es seien $g(z)=f(z)/z$ und $g_\lambda(z)=f_\lambda(z)/z$. Dann erhalten wir

$$g_\lambda(z) = \frac{f_\lambda(z)}{z} = \int_I \frac{f(zt)}{zt}\, d\sigma_\lambda(t) = \int_I g(zt)d\sigma_\lambda(t)$$

und folglich

$$\begin{aligned} L_\lambda(r) &= r\int_{-\pi}^{\pi} |g'_\lambda(re^{i\theta})|d\theta \\ &= r\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left|\int_I tg'(rte^{i\theta})d\sigma_\lambda(t)\right| \\ &\leqq r\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_I t|g'(rte^{i\theta})|d\sigma_\lambda(t) \\ &= \int_I d\sigma_\lambda(t) rt \int_{-\pi}^{\pi} |g'(rte^{i\theta})|d\theta \\ &= \int_I L(rt)d\sigma_\lambda(t). \end{aligned}$$

Flächenverzerrung

Das dem Satz 1 ähnliche Resultat über die Flächenverzerrung nimmt die folgende Gestalt.

Satz 2. *Es sei $\lambda>0$ und $A_\lambda(r)$ bezeichne den nach der Vielfachheit berechneten Flächeninhalt des Bildes von der Kreisscheibe $\{|z|<r<1\}$ bei der Abbildung $w=f_\lambda(z)/z$ mit einem aus $f\in\mathscr{F}(\alpha)$ erzeugten f_λ. Dann gilt*

$$A_\lambda(r)\leqq\int_I A(rt)\,d\sigma_\lambda(t),$$

worin $A=A_0$ der im Hilfssatz 2 angegebenen Abschätzung genügt.

Beweis. Die direkte Rechnung wie im Satz 1 zeigt

$$\begin{aligned}A_\lambda(r)&=\int_0^r\rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi}|g_\lambda'(\rho e^{i\theta})|^2d\theta\\&=\int_0^r\rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\left|\int_I tg'(\rho te^{i\theta})\,d\sigma_\lambda(t)\right|^2\end{aligned}$$

und mittles der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}A_\lambda(r)&\leqq\int_0^r\rho\,d\rho\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_I d\sigma_\lambda(t)\int_I t^2|g'(\rho te^{i\theta})|^2d\sigma_\lambda(t)\\&=\int_I d\sigma_\lambda(t)\int_0^r\rho t^2d\rho\int_{-\pi}^{\pi}|g'(\rho te^{i\theta})|^2d\theta\\&=\int_I d\sigma_\lambda(t)\int_0^{rt}\xi\,d\xi\int_{-\pi}^{\pi}|g'(\xi e^{i\theta})|^2d\theta\\&=\int_I A(rt)\,d\sigma_\lambda(t).\end{aligned}$$

Andrerseits führt uns die am Schluß im Beweis des Hilfssatzes 2 erwähnte Bemerkung zur gleichartigen Abschätzung. Das lautet wie folgt.

Satz 3. *Mit Bezeichnungen in den Sätzen 2 und 1 gilt*

$$A_\lambda(r)\leqq\frac{1}{4\pi}L_\lambda(r)^2.$$

Der Satz 2 liefert zusammen mit dem Hilfssatz 2 die Ungleichung

$$A_\lambda(r)\leqq(1-\alpha)^2 4\pi r^2\int_I\frac{t^2}{(1-r^2t^2)^2}\,d\sigma_\lambda(t),$$

während der Satz 3 zusammen mit dem Satz 1 und dem Hilfssatz 1 die Ungleichung

$$A_\lambda(r)\leqq(1-\alpha)^2 4\pi r^2\left(\int_I\frac{t}{1-r^2t^2}\,d\sigma_\lambda(t)\right)^2$$

liefert. Da die Schwarzsche Ungleichung im allgemeinen die Beziehung angibt, daß die letztere Schranke stets nicht größer als die vordere ist, so sieht man ein, daß die letztere Abschätzung schärfer als die vordere ist.

Nebenbei bemerkt, daß eine Ungleichung umgekehrter Natur immer gilt. In der Tat, bekommen wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^r \frac{L_\lambda(\rho)^2}{\rho}\,d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \rho\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g'_\lambda(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\right)^2 d\rho$$

$$\leqq \int_0^r \rho\, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} |g'_\lambda(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = A_\lambda(r).$$

Ausgezeichneter Fall

Zum Schluß betrachten wir den ausgezeichnetn Fall, der aus dem besonderen Maß $\sigma(t)=t$ erzeugt wird. Dann wird das Maß σ_λ durch

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t \left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{\lambda-1} d\tau$$

gegeben und demgemäß werden die oben erwähnten Abschätzungen in die mehr konkrete Form gebracht.

Satz 4. *Im ausgezeichneten Fall genügt die Größe $L_\lambda(r)$ der Ungleichung*

$$L_\lambda(r) \leqq (1-\alpha)\frac{4\pi r}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 \frac{t}{1-r^2t^2}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} dt$$

$$= (1-\alpha)\,\frac{4\pi}{2^\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^{2\nu-1}}{\nu^\lambda}.$$

Beweis. In der Abschätzung im Satz 1 haben wir nur das obengenannte Maß σ_λ und die Schranke im Hilfssatz 1 zu ersetzen. Die Reihenform folgt mit Hilfe der bekannten Formel

$$\int_0^1 t^{\nu-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} dt = \frac{\Gamma(\lambda)}{\nu^\lambda}.$$

Insbesondere gilt für $\lambda=1$

$$L_1(r) \leqq (1-\alpha)4\pi r\int_0^1 \frac{t}{1-r^2t^2}\,dt = (1-\alpha)\frac{2\pi}{r}\log\frac{1}{1-r^2}.$$

Während diese Schranke in bezug auf $r\in(0,1)$ unbeschränkt ist, bleibt $L_\lambda(r)$ beschränkt für jedes $\lambda>1$. In der Tat, erhalten wir

$$L_\lambda(r) \leqq (1-\alpha)\frac{4\pi}{2^\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\lambda} = (1-\alpha)\frac{4\pi}{2^\lambda}\zeta(\lambda).$$

worin ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

Indem wir den Satz 3 mit dem Satz 1 verbinden, bekommen wir die folgende Abschätzung.

Satz 5. *Im ausgezeichneten Fall genügt die Größe $A_\lambda(r)$ der Ungleichung*

$$A_\lambda(r) \leqq (1-\alpha)^2 \frac{4\pi r^2}{\Gamma(\lambda)^2} \left(\int_0^1 \frac{t}{1-r^2t^2} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\lambda-1} dt \right)^2$$

$$= (1-\alpha)^2 \frac{4\pi}{4^\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{2\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(\kappa(\nu-\kappa+1))^2} .$$

In bezug auf die Beschränktheit von der Schranke für A_λ ist der Umstand gleich wie für L_λ. Wenn wir uns auf den Satz 2 und Hilfssatz 2 gestützt hätten, so gewönnen wir bloß eine schwächere Abschätzung

$$A_\lambda(r) \leqq (1-\alpha)^2 \frac{4\pi r^2}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 \frac{t^2}{(1-r^2t^2)^2} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\lambda-1} dt$$

$$= (1-\alpha)^2 4\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu r^{2\nu}}{(2\nu+1)^\lambda} ,$$

deren Schranke nur für $\lambda > 2$ beschränkt ist.

MATHEMATISCHES SEMINAR,
INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE ZU KANAZAWA

Literatur

[1] A. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreise, Leipziger Ber., **63** (1911), 501–511.

[2] Y. Komatsu, On analytic functions with positive real part in a circle, Kōdai Math. Sem. Rep., **10** (1958), 64–83.

[3] Y. Komatu, On mean distortion for analytic functions with positive real part in a circle, Nagoya Math. J., **29** (1967), 221–228.

[4] Y. Komatu, A one-parameter family of operators defined on analytic functions in a circle, Lecture Notes in Math. No. 768, Proc. Anal. Func./Kozubnik 1979, ed. by J. Lawrynowicz, Springer (1980), 292–300.

[5] Y. Komatu, On a one-parameter additive family of operators defined on analytic functions regular in the unit disk, Bull. Fac. Sci.-Eng., Chuo Univ., **22** (1979), 1–22.

[6] Y. Komatu, On length distortion for certain classes of functions analytic in a circle, Bull. Fac. Sci.-Eng., Chuo Univ., **25** (1982), 45–49.

[7] Y. Komatu, On the range of analytic functions related to Carathéodory class, Ann. Polon. Math., **46** (1985), 145–149.

[8] W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch reelle Potenzreihen, Math. Z., **35** (1932), 93–121.

[9] E. Strohhäcker, Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Z., **37** (1933), 356–380.