J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
26-4 (1986) 697-709

# Applications holomorphes injectives à jacobien constant de deux variables

Par

Yasuichiro NISHIMURA

## Introduction.

Comme une application immédiate du travail de E. Peschl [4], on obtient le théorème suivant (voir § 3).

**Théorème P.** *Soit* $F: \boldsymbol{C}^2(x, y) \to \boldsymbol{C}^2(x', y')$ *une application holomorphe satisfaisant aux conditions* $1° \sim 3°$ *suivantes:*

1° *F est bijective.*

2° $F(\{x=0\}) \subset \{x'=0\}$, $F(\{y=0\}) \subset \{y'=0\}$.

3° *Le déterminant jacobien* $J_F$ *de F est une constante c.*

*Alors F est de la forme* $x' = cxe^{-\alpha(xy)}$, $y' = ye^{\alpha(xy)}$, *où* $\alpha$ *est une fonction entière d'une variable.*

Le but principal de ce mémoire est de généraliser ce théorème. Nos résultats sont les trois théorèms suivants.

Premièrement, le théorème I montre que, si on relâche la condition 1° du théorème P, on arrive à la même conclusion.

**Théorème I.** *Soit* $F: \boldsymbol{C}^2(x, y) \to \boldsymbol{C}^2(x', y')$ *une application holomorphe satisfaisant aux conditions* $1° \sim 3°$ *suivantes:*

1° *F est injective.*

2° $F(\{x=0\}) \subset \{x'=0\}$, $F(\{y=0\}) \subset \{y'=0\}$.

3° $J_F = c$ *(une constante).*

*Alors F est de la forme* $x' = cxe^{-\alpha(xy)}$, $y' = ye^{\alpha(xy)}$, *où* $\alpha$ *est une fonction entière d'une variable.*

Deuxièmement, dans le théorème II, on remplace le domaine $\boldsymbol{C}^2$ de $F$ par $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^*$.

**Théorème II.** *Soit* $F: \boldsymbol{C}(x) \times \boldsymbol{C}^*(y) \to \boldsymbol{C}(x') \times \boldsymbol{C}^*(y')$ *une application holomorphe satisfaisant aux conditions* $1° \sim 3°$ *suivantes:*

1° *F est bijective.*

2° $F(\{x=0\}) \subset \{x'=0\}$, *et* $\hat{F}$ *étant la restriction de* $F$ *sur* $(\boldsymbol{C}^*)^2 = \{(x, y) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^* \mid x \neq 0\}$, $\hat{F}_*: \pi_1((\boldsymbol{C}^*)^2) \to \pi_1((\boldsymbol{C}^*)^2)$ *induite par* $\hat{F}$ *sur le groupe fondamental*

Communiqué par Prof. Kusunoki, Septembre 3, 1985 *est l'identité.*

3° $J_F=c$ (*une constante*).

*Alors F se prolonge en une application holomorphe:* $\boldsymbol{C}^2(x, y)\to\boldsymbol{C}^2(x', y')$ (*qui sera également désignée par F*), *et F est de la forme* $x'=cxe^{-\alpha(xy)}$, $y'=ye^{\alpha(xy)}$, *où* $\alpha$ *est une fonction entière d'une variable.*

Finalement, dans le théorème III, nous nous proposons de relâcher la condition 2° du théorème P.

**Théorème III.** *Soit* $F:\boldsymbol{C}^2(x, y)\to\boldsymbol{C}^2(x', y')$ *une application holomorphe satisfaisant aux conditions* 1°$\sim$ 3° *suivantes:*

1° *F est bijective.*

2° $F(\{y=0\})\subset\{y'=0\}$.

3° $J_F=c$ (*une constante*).

*Alors F est de la forme* $x'=cxe^{-\alpha(xy, y)}+\beta(xy, y)$, $y'=ye^{\alpha(xy, y)}$, *où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont des fonctions entières de deux variables.*

Nos démonstrations des théorèmes I, II et III ne reposent pas sur le résultat ni sur la méthode de [4]. Nous utilisons le théorème obtenu dans [3] concernant des valeurs exceptionnelles d'applications holomorphes injectives à jacobien constant (voir le théorème 2.1 dans § 2).

Dans §§ 1–2, on traite une propriété de valeurs exceptionnelles d'applications holomorphes injectives à jacobien constant, comme une suite de l'étude dans [3]. Au § 3, on explique le résultat de Peschl [4]. Au § 4, on démontre les théorèmes I, II et III, et dans le dernier paragraphe, on donne quelques exemples et problèmes ouverts à propos des théorèmes I, II et III.

## § 1. Domaines de type $\boldsymbol{C}$.

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons en l'espace à $n$ dimensions. Un domaine $D$ (ouvert et connexe) sera aussi désigné par $D(x_1, \cdots, x_n)$, quand il est nécessaire de spécifier les coordonnées de $\boldsymbol{C}^n$. Une application holomorphe $F$: $D(x_1, \cdots, x_n)\to\boldsymbol{C}^n(x'_1, \cdots, x'_n)$ sera aussi désignée par $F=(F_1, \cdots, F_n)$ avec les composantes $F_i$. Le déterminant jacobien $\det(\partial F_i/\partial x_j)$ de $F$ sera désigné par $J_F$. Désignons par $\mathcal{O}(D)$ l'espace des fonctions holomorphes dans $D$, par $L^1(D)$ l'espace des fonctions intégrables sur $D$ et par $P_+(D)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques et $\geqq 0$ dans $D$.

Introduisons l'idée suivante qui est utile quand on considère des applications holomorphes injectives à jacobien constant.

**Définition 1.1.** Un domaine $D(\neq\emptyset)$ dans $\boldsymbol{C}^n$ sera dit de type $\boldsymbol{C}$, si l'on a $L^1(D)\cap P_+(D)=\{0\}$, c'est-à-dire qu'il n'existe de fonction plurisousharmonique, $\geqq 0$ et intégrable sur $D$ que la fonction nulle.

En utilisant le lemme suivant, nous donnons deux exemples de domaines de type $\boldsymbol{C}$. Désignons par $U(a, r)$ un polydisque ouvert $\{x\in\boldsymbol{C}^n \mid |x_i-a_i|<r_i\ 1\leqq i\leqq n\}$

de centre $a=(a_1, \cdots, a_n)$ et de rayon $r=(r_1, \cdots, r_n)$ où $r_i>0$.

**Lemme 1.2.** *Soit $\varphi$ une fonction plurisousharmonique sur un voisinage du polydisque fermé $\overline{U(a, r)}$, alors on a*

$$\varphi(a)\leqq\Big(\prod_{i=1}^{n}(\pi r_i^2)\Big)^{-1}\int_{U(a,r)}\varphi(x)\,dV(x).$$

Voir par exemple [1] pour la démonstration. □

**Proposition 1.3.** *Soit $G\subset \boldsymbol{C}^{n-1}(x_2, \cdots, x_n)$ un domaine, et posons $D=\boldsymbol{C}(x_1)\times G\subset \boldsymbol{C}^n(x_1, \cdots, x_n)$. Alors $D$ est un domaine de type $\boldsymbol{C}$. ($n\geqq1$. Au cas $n=1$, $D=\boldsymbol{C}(x_1)$.)*

*Démonstration.* Prenons une fonction quelconque $\varphi\in L^1(D)\cap P_+(D)$, et posons $c=\int_D\varphi\,dV$ où $0\leqq c<+\infty$. Prenons un point quelconque $y=(y_1, \cdots, y_n)\in D$, et au cas $n\geqq2$, choisissons des nombres positifs $r_2, \cdots, r_n$ tels que on ait

$$\{(x_2, \cdots, x_n)\mid |x_i-y_i|\leqq r_i\ \ 2\leqq i\leqq n\}\subset G.$$

Pour un nombre positif quelconque $r_1$, d'après le lemme 1.2, on a

$$\varphi(y)\leqq\Big(\prod_{i=1}^{n}(\pi r_i^2)\Big)^{-1}\int_{U(y,r)}\varphi(x)\,dV(x)\leqq c\Big(\prod_{i=1}^{n}(\pi r_i^2)\Big)^{-1}.$$

Si $c=0$, on a évidemment $\varphi(y)=0$. Si $c>0$, avec $r_1\to\infty$, on a $\varphi(y)=0$. Un point $y$ étant quelconque, $\varphi=0$ sur $D$, ce qui montre que $L^1(D)\cap P_+(D)=\{0\}$. □

Posons $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}^*(x)=\{x\in\boldsymbol{C}\mid x\neq0\}$ et $(\boldsymbol{C}^*)^n=\boldsymbol{C}^*(x_1)\times\cdots\times\boldsymbol{C}^*(x_n)=\{(x_1, \cdots x_n)\mid x_1\cdots x_n\neq0\}$.

**Proposition 1.4.** *Pour $n=1$, $\boldsymbol{C}^*$ n'est pas un domaine de type $\boldsymbol{C}$. Pour $n\geqq2$, $(\boldsymbol{C}^*)^n$ est un domaine de type $\boldsymbol{C}$.*

*Démonstration.* Pour $n=1$, on a par exemple

$$\log^+\frac{1}{|x|}=\max\Big(\log\frac{1}{|x|},\ 0\Big)\in L^1(\boldsymbol{C}^*)\cap P_+(\boldsymbol{C}^*).$$

Supposons désormais que $n\geqq2$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une fonction $\varphi\in L^1(D)\cap P_+(D)$ telle que $\varphi\neq0$. Sans perdre la généralité, on suppose que $b=\varphi(1, 1, \cdots, 1)>0$. On pose $c=\int_D\varphi\,dV>0$.

Considérons l'application holomorphe $F: \boldsymbol{C}^{n-1}(u_1, \cdots, u_{n-1})\times\boldsymbol{C}^*(u_n)\to(\boldsymbol{C}^*)^n(x_1, \cdots, x_n)$ définie par $F: x_i=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,u_i)\ 1\leqq i\leqq n-1$, $x_n=u_n\exp\Big(-2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n-1}u_i\Big)$. Par un calcul immédiat, on a $J_F=(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}$, ce qui entraîne

$$F^*dV(x)=(2\pi)^{2n-2}dV(u). \tag{1}$$

Posant $a=(0, \cdots, 0, 1)\in\boldsymbol{C}^n$, et $r=(s, \cdots, s, 1/2)$ avec un nombre positif quelconque

$s$, on a $\overline{U(a, r)} \subset C^{n-1} \times C^*$. Puisque l'égalité$F(u)=F(v)$ équivaut aux $u_i - v_i \in Z$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ et $u_n = v_n$, pour tout point $x \in F(U(a, r))$ on a

$$(2) \qquad \sharp\{u \in U(a, r) \mid F(u)=x\} \leqq (2s+1)^{n-1}.$$

Maintenant, $\psi = F^*\varphi$ appartenant à $P_+(C^{n-1} \times C^*)$ et satisfaisant à $\psi(a)=b$, d'après le lemme 1.2, on a

$$(3) \qquad 4^{-1}\pi^n b s^{2n-2} \leqq \int_{U(a,r)} \psi(u)\, dV(u).$$

D'autre part, en vertu de (1) et (2), on a

$$(4) \qquad \int_{U(a,r)} \psi(u)\, dV(u) \leqq (2\pi)^{-2n+2}(2s+1)^{n-1} \int_{F(U(a,r))} \varphi(x)\, dV(x) \leqq (2\pi)^{-2n+2} c(2s+1)^{n-1}.$$

En vertu de (3) et (4), on a $4^{-1}\pi^n b s^{2n-2} \leqq (2\pi)^{-2n+2} c(2s+1)^{n-1}$, ce qui est une contradiction pour un $s$ assez grand. □

## §2. Valeurs exceptionnelles de fonctions holomorphes injectives à jacobien constant.

Dans ce paragraphe, en nous bornant à l'espace à 2 dimensions, nous nous proposons de traiter quelque propriété intéressante de certains applications holomorphes injectives à jacobien constant, comme une suite de l'étude dans [3]. Nous citerons souvent les résultats de [3]. On dira qu'une application holomorphe $F: D \to C^2$ excepte un esemble $A$, si l'on a $F(D) \cap A = \emptyset$.

**Théorème 2.1.** ([3], p. 756, Théorème 1.) *Soient $p$ et $q$ deux nombres positifs. Posons $X=\{(x, y) \in C^2 \mid y=0\}$, $Y=\{x=0, |y| \leqq q\} \cup \{|x| \leqq p, |y|=q\}$ et $A=\{|y| \leqq q, |xy| \leqq pq\}$. Soit $D \subset C^2$ un domaine de type $C$. Si une application holomorphe injective à jacobien constant $F: D \to C^2(x, y)$ excepte $X \cup Y$, alors elle excepte aussi $A$.*

**Remarque.** Dans [3], on n'a prouvé le théorème que dans le cas où $D=C^2$. Néanmoins la même démonstration marche bien au cas où $D$ est un domaine de type $C$. Le théorème 2.1 sera utilisé essentiellement au §4, pourtant nous n'aurons pas besoin du reste des résultats de ce paragraphe aux §§3-5.

Maintenant, nous énonçons un autre théorème analogue au théorème 2.1.

**Théorème 2.2.** *Soient $p$ et $q$ deux nombres positifs. Posons $Y=\{x=0, |y| \leqq q\} \cup \{|x| \leqq p, |y|=q\}$ et $B=\{|x| \leqq p, |y| \leqq q\}$. Soit $D \subset C^2$ un domaine de type $C$. Si une application holomorphe injective à jacobien constant $F: D \to C^2(x, y)$ excepte $Y$, alors elle excepte aussi $B$.*

*Démonstration.* Définissons la fonction $\varphi(x, y)$ continue et $\geqq 0$ sur $C^2 - Y$ par

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\log^{+}\dfrac{p}{|x|} & \text{dans } \{|y|<q\}\cap(\boldsymbol{C}^2-Y)\\ 0 & \text{dans } \{|y|\geqq q\}\cap(\boldsymbol{C}^2-Y).\end{cases}$$

Evidemment $\varphi$ appartient à $L^1(\boldsymbol{C}^2-Y)\cap P_+(\boldsymbol{C}^2-Y)$, et posant $L=\{0<|x|<p, |y|<q\}\subset(\boldsymbol{C}^2-Y)$, on a $\varphi>0$ sur $L$. Posons $\psi=F^*\varphi\in P_+(D)$, et posons $|J_F|^2\equiv c$. Alors on a $\int_D\psi\, dV=\frac{1}{c}\int_{F(D)}\varphi\, dV\leqq\frac{1}{c}\int_{C^2-Y}\varphi\, dV<+\infty$, ce qui montre que $\psi\in L^1(D)\cap P_+(D)$. D'après l'hypothèse, on a $\psi\equiv 0$, d'ou on a $F(D)\cap L=\emptyset$. $F(D)$ étant un ouvert, $F$ excepte $B=\bar{L}$. □

Afin de compléter les théorèmes 2.1 et 2.2, nous donnons quelque exemples. On dira qu'une application holomorphe $F: D\to\boldsymbol{C}^2$ prend une valeur $(\alpha, \beta)\in\boldsymbol{C}^2$, s'il existe un point $P\in D$ tel que $F(P)=(\alpha, \beta)$.

**Exemple 2.3.** ([3] p. 758, Exemple 2.) Pour tout $(\alpha, \beta)\in\boldsymbol{C}^2-A$, il existe une application holomorphe injective à jacobien constant $F: \boldsymbol{C}^2\to\boldsymbol{C}^2$ qui excepte $A$ et prend la valeur $(\alpha, \beta)$.

Ensuite, l'exemple suivant montre que, dans le théorème 2.1, on ne peut se dispenser de supposer que le jacobien soit constant.

**Exemple 2.4.** Soit $m$ un entier positif, et posons $Y(m)=\{|y|\leqq q, |y|\geqq p^{-(1/m)}q|x|^{1/m}\}$. Pour tout $(\alpha, \beta)\in\boldsymbol{C}^2-(X\cup Y(m))$, il existe une application holomorphe injective $F: \boldsymbol{C}^2\to\boldsymbol{C}^2(x, y)$ qui excepte $X\cup Y(m)$ et prend la valeur $(\alpha, \beta)$.

Dans [3] (p. 758, Exemple 3.), on a déjà construit une telle $F$ dans le cas $|\alpha|>p$ ou $|\beta|>q$. Donc, il ne reste qu'à construire une telle $F$ dans le cas où $0<|\alpha|\leqq p$ et $0<|\beta|<p^{-(1/m)}q|\alpha|^{1/m}$. En posant $p=q=1$ sans perdre la généralité, on a donc

$$(5)\qquad 0<|\alpha|\leqq 1,\quad 0<|\beta|,\quad |\alpha\beta^{-m}|>1.$$

Prenons une application holomorphe injective $G: \boldsymbol{C}^2\to\boldsymbol{C}^2(u, v)$ qui excepte $\{v=0\}\cup\{|u|\leqq 1, |v|\leqq 1\}$ et prend la valeur $(\alpha\beta^{-m}, \beta)$. En vertu de (5), d'après le résultat de [3] déjà cité (p. 758, Exemple 3.), il existe certainement une telle $G$. Définissons l'application holomorphe bijective $W: \boldsymbol{C}(u)\times\boldsymbol{C}^*(v)\to\boldsymbol{C}(x)\times\boldsymbol{C}^*(y)$ par $W: x=uv^m,\ y=v$, alors la composée $W\circ G: \boldsymbol{C}^2\to\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}^*\subset\boldsymbol{C}^2$ est bien définie, holomorphe et injective, et prend la valeur $(\alpha, \beta)$. Puisqu'on a $W^{-1}(\{0<|y|\leqq 1, |y|\geqq|x|^{1/m}\})=\{0<|v|\leqq 1, |u|\leqq 1\}$, $W\circ G$ excepte $X\cup Y(m)$. Il en suit que $F=W\circ G$ est une application désirée.

**Exemple 2.5.** Pour tout$(\alpha, \beta)\in\boldsymbol{C}^2-B$, il existe une application holomorphe injective à jacobien constant $F: \boldsymbol{C}^2\to\boldsymbol{C}^2$, qui excepte $B$ et prend la valeur $(\alpha, \beta)$.

En effet, d'après l'hypothèse, on a ou bien $|\alpha|>p$ ou bien $|\beta|>q$. Sans restreindre la généralité, supposons par exemple que $|\beta|>q$. Alors d'après l'exemple 2.3, une $F$ désirée existe certainement.

Finalement, l'exemple suivant montre que, dans le théorème 2.2, il est indispensable de supposer que le jacobien soit constant.

**Exemple 2.6.** Pour tout $(\alpha, \beta)\in \boldsymbol{C}^2-Y$, il existe une application holomorphe injective $F: \boldsymbol{C}^2\rightarrow \boldsymbol{C}^2$ qui excepte $Y$ et prend la valeur $(\alpha, \beta)$.

En tenant compte des exemples 2.4 et 2.5, il ne reste qu'à examiner le cas où $0<|\alpha|\leqq p$ et $\beta=0$. Sans perdre la généralité on suppose que $p=q=1$. Prenons une fonction entière $f(z)$ d'une variable telle que

$$(6) \qquad |f(z)|\leqq\frac{1}{2} \quad \text{sur} \quad |z|\leqq 1 \quad \text{et} \quad 0<|f(\alpha)|\leqq\frac{1}{4}.$$

Prenons un entier positif $m$ tel que

$$(7) \qquad \frac{1}{4}<\frac{3}{8}|\alpha|^{1/m}.$$

Posons

$$(8) \qquad r=4^m \quad \text{et} \quad s=\frac{3}{2}.$$

Maintenant prenons une application holomorphe injective $G: \boldsymbol{C}^2\rightarrow \boldsymbol{C}^2(u, v)$ telle que

(9) $G$ excepte $\{|v|\leqq s,\ |v|\geqq r^{-(1/m)}s|u|^{1/m}\}$ et prenne la valeur $(\alpha, -f(\alpha))$

D'après l'exemple 2.4, il existe certainement une telle $G$, car, en vertu de (6), (7) et (8), on a $0<|f(\alpha)|<r^{-(1/m)}s|\alpha|^{1/m}$. Ensuite, définissons une application holomorphe bijective $W: \boldsymbol{C}^2(u, v)\rightarrow \boldsymbol{C}^2(x, y)$ par $W: x=u,\ y=v+f(u)$. Puisqu'on a $W(\alpha, -f(\alpha))=(\alpha, 0)$, en vertu de (9), l'application injective $W\circ G: \boldsymbol{C}^2\rightarrow \boldsymbol{C}^2(x, y)$ prend la valeur $(\alpha, 0)$. Afin de montrer que $F=W\circ G$ est une application désirée, il ne reste qu'à vérifier que $W\circ G$ excepte $\{x=0, |y|\leqq 1\}\cup\{|x|\leqq 1, |y|=1\}$. En vertu de (9), il suffit de voir

$$W^{-1}(\{x=0,\ |y|\leqq 1\{\cup\{|x|\leqq 1,\ |y|=1\})\subset\{|v|\leqq s,\ |v|\geqq r^{-(1/m)}s|u|^{1/m}\}$$

Si $x=0$ et $|y|\leqq 1$, en vertu de (6) et (8), on a $u=0$ et $|v|\leqq|y|+|f(0)|\leqq 3/2=s$. Si $|x|\leqq 1$ et $|y|=1$, (6) entraîne $1/2\leqq|v|\leqq 3/2$, donc en vertu de (8), on a $r^{-(1/m)}s|u|^{1/m}|v|^{-1}\leqq 2r^{-(1/m)}s=3/4<1$. En conséquence $F=W\circ G$ est certainement une application désirée.

Il me semble très intéressant de comparer nos théorème 2.1 et exemple 2.6 avec le résultat de T. Ueda [5].

**Théorème 2.7.** ([5], Proposition 5.2.) *Soient $p$, $q$ et $r$ des nombres positifs tels que $r<p$. Si une application holomorphe $H: \boldsymbol{C}^2\rightarrow \boldsymbol{C}^2(x, y)$ avec $J_H\neq 0$ excepte $\{|x|\leqq r,\ |y|\leqq q\}\cup\{|x|\leqq p,\ |y|=q\}$, elle excepte aussi $\{|x|\leqq p,\ |y|\leqq q\}$.*

**Remarque.** L'exemple 2.6 montre que, si on suppose $r=0$ à la place de $r>0$, le théorème 2.7 n'est plus vrai. D'autre part, le théorème 2.2 montre que, pour des applications holomorphes injectives à jacobien constant, le théorème 2.7 est aussi vrai pour $r=0$.

Avec nos notations et suivant [5], répétons la démonstration du théorème 2.7.

Sans perdre la généralité, on suppose $p=q=1$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un point $(\alpha, \beta)\in H(\boldsymbol{C}^2)$ tel que $r<|\alpha|\leqq 1$ et $|\beta|<1$.

Tout d'abord, on va montrer qu'il existe un point $(\gamma, \delta)\in H(\boldsymbol{C}^2)$ tel que $r<|\gamma|<1$ et $|\delta|<1$. Dans le cas $|\alpha|<1$, il n'y a rien à dire. Supposons $|\alpha|=1$. Pour un point $P\in \boldsymbol{C}^2$ tel que $H(P)=(\alpha, \beta)$, on choisit une droite complexe $l$ passant par $P$ de telle manière que, posant $H=(H_1, H_2)$, les fonctions $H_1|_l : l\to \boldsymbol{C}(x)$ et $H_2|_l : l\to \boldsymbol{C}(y)$ soient non constantes l'un et l'autre. Puisqu'on a $J_H\not\equiv 0$, c'est certainement possible. $H_1|_l$ et $H_2|_l$ étant les applications ouvertes, on peut trouver un point $Q$ près de $P$ tel que $(\gamma, \delta)=H(Q)$ satisfasse aux $r<|\gamma|<1$ et $|\delta|<1$.

Dans la suite, on pose $H(Q)=(\gamma, \delta)$. Soit $\Omega$ la composante connexe contenant $Q$ du ouvert $(H|_l)^{-1}(\{|x|<1, |y|<1\})$ sur $l$. On pose $f=H_1|_l\circ i : \Omega\hookrightarrow l\to \boldsymbol{C}(x)$. La fonction sousharmonique $1/|f|$ prend la valeur 1 au bord $\partial\Omega$ dans $l$, et elle est bornée sur $\Omega: 1/|f|<1/r$. D'après le principe du maximum, on a $1/|f|<1$ sur $\Omega$, ce qui est une contradiction car on a $1/|f|(Q)=1/|\gamma|>1$. □

## § 3. Théorème de Peschl.

Dans son mémoire [4], E. Peschl a démontré le théorème suivant:

**Théorème 3.1.** *Soit $F: \boldsymbol{C}^n(x_1, \cdots, x_n)\to \boldsymbol{C}^n(x_1', \cdots, x_n')$ une application holomorphe satisfaisant aux conditions* 1° *et* 2° *suivates:*

1° *$F$ est bijective.*

2° *$F$ est de la forme $x_i'=x_i e^{f_i(x_1,\cdots,x_n)}$, où $f_i(x)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n)$ $(1\leqq i\leqq n)$.*

*Alors on a $J_F=\prod_{i=1}^{n} e^{f_i(x)}$.*

**Remarque.** Définissons $E: \boldsymbol{C}^n(u_1, \cdots, u_n)\to \boldsymbol{C}^n(x_1, \cdots, x_n)$ par $E: x_i=e^{u_i}$ $(1\leqq i\leqq n)$, et $\tilde{F}: \boldsymbol{C}^n(u_1, \cdots, u_n)\to \boldsymbol{C}^n(u_1', \cdots, u_n')$ par $\tilde{F}: u_i'=u_i+f_i(e^{u_1}, \cdots, e^{u_n})$ $(1\leqq i\leqq n)$. Observons qu'on a $F\circ E=E\circ\tilde{F}$. Alors la conclusion du théorème s'exprime par $J_{\tilde{F}}\equiv 1$.

Désormais, nous nous bornons à l'espace à 2 dimensions. Afin de fixer les notations dans ce cas, nous répétons le théorème précédent.

**Théorème 3.1′.** *Soit $F: \boldsymbol{C}^2(x, y)\to \boldsymbol{C}^2(x', y')$ une application holomorphe satisfaisant aux conditions* 1° *et* 2° *suivantes:*

1° *$F$ est bijective.*

2° *$F$ est de la forme $x'=xe^{f(x,y)}$, $y'=ye^{g(x,y)}$, où $f$ et $g\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$.*

*Alors on a $J_F=e^{f+g}$.*

**Remarque.** Les conditions 1° et 2° sont équivalentes aux 1° et 2′° suivante:

2′° $F(\{x=0\})\subset\{x'=0\}$, $F(\{y=0\})\subset\{y'=0\}$.

Comme un corollaire, on peut démontrer le théorème P mentionné dans l'introduction.

*Démonstration du théorème P.* D'après la remarque, $F$ est de la forme $x'=xe^{f(x,y)}$, $y'=ye^{g(x,y)}$, où $f$ et $g\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$. D'après 3° et le théorème 3.1′, on a

$$f+g=\log c\,. \tag{10}$$

D'après le théorème 3.1′ encore une fois, par un calcul direct, on a $J_F=e^{f+g}\left(1+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(1+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)-xy\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}=e^{f+g}$, d'où on a

$$\left(1+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(1+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)-xy\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}=1\,. \tag{11}$$

Substituant (10) à (11), on obtient l'équation différentielle suivante pour la fonction $g(x, y)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$:

$$x\frac{\partial g}{\partial x}-y\frac{\partial g}{\partial y}=0\,.$$

Cette équation montre qu'on a $g(x, y)=\alpha(xy)$ avec une fonction $\alpha\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$. En vertu de (10), on obtient $f(x, y)=-\alpha(xy)+\log c$. □

## § 4. Démonstrations des théorèmes principaux.

*Démonstration du théorème I.*

D'après les conditions 1° et 2°, pour $F=(F_1, F_2)$, on a $F_1=xe^{f(x,y)}$, $F_2=ye^{g(x,y)}$, où $f, g\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$. Puisqu'on a $J_F(0, 0)=e^{f(0,0)+g(0,0)}$, la condition 3° entraîne

$$f(0, 0)+g(0, 0)=\log c\,. \tag{12}$$

Maintenant l'image $F(\boldsymbol{C}^2)$ étant un ouvert qui contient l'origine $(x', y')=(0, 0)$, on peut choisir des nombres positifs $p$ et $q$ tels que $\{|x'|\leqq p,\ |y'|\leqq q\}\subset F(\boldsymbol{C}^2)$. Puis on choisit un nombre positif $r$ tel que $\{|x'|\leqq p,\ |y'|\leqq q\}\subset F(\{|x|<r,\ |y|<r\})$. En posant $D=\{|y|>r\}$, l'application holomorphe injective à jacobien constant $F|_D: D\to\boldsymbol{C}^2$ excepte $\{y'=0\}\cup\{|x'|\leqq p,\ |y'|\leqq q\}$ D'après la proposition 1.3 et le théorème 2.1, $F|_D$ excepte aussi $\{|y'|\leqq q,\ |x'y'|\leqq pq\}$, ce qui entraîne

$$F(\{|y|>r\})\subset\{|y'|>q\}\cup\{|x'y'|>pq\}\,.$$

En raisonnant parallèlement, on a

$$F(\{|x|>r\})\subset\{|x'|>p\}\cup\{|x'y'|>pq\}\,.$$

Il en suit qu'on a

$$F(\{|x|>r,\ |y|>r\})\subset\{|x'y'|>pq\},$$

ce qui montre que la fonction holomorphe $1/F_1F_2$ satisfait à l'inégalité $|1/F_1F_2|<1/pq$ dans $\{|x|>r,\ |y|>r\}$. En conséquence, d'après le théorème de prolongement de Riemann, $1/F_1F_2$ se prolonge de la façon holomorphe à l'infini $\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{C}^2$. Donc, la fonction $F_1F_2=xye^{f(x,y)+g(x,y)}$ doit être rationnelle. En vertu de (12), on obtient

$$f(x, y)+g(x, y)=\log c\,. \tag{13}$$

D'autre part, par un calcul direct, on a

$$J_F=e^{f+g}\left\{\left(1+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(1+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)-xy\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right\}.$$

Donc, d'après la condition 3° et (13), on a

$$\left(1+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(1+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)-xy\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}=1. \tag{14}$$

Maintenant, de même que (10) et (11) ont entraîné la conculusion du théorème P, de même (13) et (14) entraînent celle du théorème I. □

*Démonstration du théorème II.*

Posons $F=(F_1, F_2)$. D'après les conditions 1° et 2°, $F_2|_{\{x=0\}}: \boldsymbol{C}^*(y)\to\boldsymbol{C}^*(y')$ est bijective, d'où on a $F_2(0, y)=e^a y$ avec un nombre $a\in\boldsymbol{C}$. Pour tout nombre positif $r$, posant $q=(r/2)e^{-\mathrm{Re}\,a}>0$, on a $F(\{x=0, |y|\leqq q\})\subset\{x'=0, |y'|<r\}$. Prenons un nombre positif $p$ assez petit tel que $F(\{|x|\leqq p, |y|=q\})\subset\{|y'|<r\}$. En posant $D=\{|y'|>r\}$, considérons l'application holomorphe injective à jacobien constant $G=F^{-1}|_D: D\to\boldsymbol{C}^2(x, y)$. Puisque $G$ excepte $\{y=0\}$ et $\{x=0, |y|\leqq q\}\cup\{|x|\leqq p, |y|=q\}$, d'après la proposition 1.3 et le théorème 2.1, $G$ excepte aussi $\{|y|\leqq q, |xy|\leqq pq\}$· Donc, on a

$$F(\{|y|\leqq q, |xy|\leqq pq\})\subset\{|y'|\leqq r\}, \tag{15}$$

ce qui montre que $F_2: \boldsymbol{C}(x)\times\boldsymbol{C}^*(y)\to\boldsymbol{C}^*(y')$ est bornée dans un voisinage de $\{y=0\}$ dans $\boldsymbol{C}^2(x, y)$. D'après le théorème de prolongement de Riemann, $F_2$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\boldsymbol{C}^2(x, y)$ (qui sera également désignée par $F_2$). Comme $r$ est arbitraire, en faisant $r\to 0$ ($p\to 0$, $q\to 0$) dans (12), on a $F_2(0, 0)=0$. Donc, on a

$$\{F_2=0\}=\{y=0\}\,. \tag{16}$$

Ensuite, on développe $F_1$ et $F_2$ en séries autour de $\{x=0\}$:

$$\begin{aligned} &F_1(x, y)=U_1(y)x+\cdots+U_n(y)x^n+\cdots, && U_i(y)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^*) \\ &F_2(x, y)=e^a y+V_1(y)x+\cdots+V_n(y)x^n+\cdots, && V_j(y)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})\,. \end{aligned} \tag{17}$$

En substituant (17) à l'égalité $J_F=c$, et en comparant les coefficients en $x^{k-1}$ ($k=1, 2, \cdots$), on a

$$U_1 e^a=c \qquad (k=1) \tag{18}$$

$$kU_k e^a+\sum_{j=1}^{k-1} j(U_j V'_{k-j}-U'_{k-j}V_j)=0 \qquad (k\geqq 2). \tag{19}$$

Alors, d'après (18) et (19), à partir le cas $k=1$, on a $U_k\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ par récurrence sur $k$. Donc, $F_1$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\boldsymbol{C}^2(x, y)$ (qui sera également désignée par $F_1$).

Maintenant, montrons que l'application holomorphe $F=(F_1, F_2)$: $\boldsymbol{C}^2(x, y)\to$

$C^2(x', y')$ satisfait aux conditions $1°\sim 3°$ du théorème I. (II, 3°) entraîne trivialement (I, 3°). (II,2°) et (16) entraînent (I, 2°). Pour montrer (I, 1°), remarquons que $F^{-1}: C(x')\times C^*(y')\to C(x)\times C^*(y)$ satisfait aussi aux conditions (II, 1°), (II, 2°) et (II, 3°). En raisonnant comme ci-dessus, $F^{-1}$ se prolonge en une application holomorphe $C^2(x', y')\to C^2(x, y)$ qui est l'inverse de $F$, ce qui montre (II, 1°).

*Démonstration du théorème III.*

Posons $F=(F_1, F_2)$. D'après les conditions 1° et 2°, la multiplicité du zéro $\{y=0\}$ de la fonction $F_2$ est 1. Donc, $H=F|_{C\times C^*}: C(x)\times C^*(y)\to C(x')\times C^*(y')$ étant la restriction, $H_*: \pi_1(C\times C^*)\to\pi_1(C\times C^*)$ induite par $H$ sur le groupe fondamental est l'identité.

Définissons une application holomorphe bijective $G: C(u)\times C^*(v)\to C(x)\times C^*(y)$ par

$$G: x=\frac{u}{v}, \qquad y=v. \tag{20}$$

Posons

$$R=G^{-1}\circ H\circ G: C(u)\times C^*(v) \longrightarrow C(u')\times C^*(v')$$

et

$$S=H\circ G: C(u)\times C^*(v) \longrightarrow C(x')\times C^*(y').$$

D'après 1° et 2°, $R$ et $S$ sont bijectives. Puisque $G_*: \pi_1(C\times C^*)\to\pi_1(C\times C^*)$ est l'identité, on a

$$R_*=id \quad \text{et} \quad S_*=id. \tag{21}$$

( i ) Montrons que, pour $R=(R_1, R_2)$, la fonction $R_2: C(u)\times C^*(v)\to C^*(v')$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $C^2(u, v)$ et s'exprime à la forme $R_2(u, v)=ve^{\alpha(u,v)}$ avec $\alpha\in\mathcal{O}(C^2)$.

En effet, pour tout nomber positif $r$, on prend des nombres positifs $p$ et $q$ tels que

$$F(\{|x|\leqq p,\ |y|\leqq q\})\subset\{|y'|\leqq r\}. \tag{22}$$

En posant $D=\{|y'|>r\}$, on considère l'application holomorphe injective à jacobien constant $F^{-1}|_D: D\to C^2(x, y)$. Puisque $F^{-1}|_D$ excepte $\{y=0\}\cup\{|x|\leqq p,\ |y|\leqq q\}$, d'après la proposition 1.3 et le théorème 2.1, on a

$$F(\{|y|\leqq q,\ |xy|\leqq pq\})\subset\{|y'|\leqq r\}. \tag{23}$$

Donc, en vertu de (20) et (23), on a

$$R(\{|u|\leqq pq,\ 0<|v|\leqq q\})\subset\{|v'|\leqq r\}, \tag{24}$$

ce qui montre que la fonction $R_2$ est borné dans un voisinage de $\{v=0,\ |u|<pq\}$ dans $C^2(u, v)$. D'après le théorème de prolongement de Riemann, $R_2$ se prolonge en une fonction holmorphe dans $C^2(u, v)$ (qui sera également désinée par $R_2$). Comme $r$ est arbitraire, en faisant $r\to 0$ ($p\to 0$, $q\to 0$) dans (24), on a $R_2(0, 0)=0$ et donc, $\{R_2=0\}=\{v=0\}$. En vertu de (21), $R_2/v\in\mathcal{O}(C^2)$ ne s'annule nulle part. En posant $\alpha=\log(R_2/v)\in\mathcal{O}(C^2)$, on acheve ( i ).

(ii) Montrons que, pour $S=(S_1, S_2)$, $S_1: \boldsymbol{C}(u)\times\boldsymbol{C}^*(v)\to\boldsymbol{C}^*(x')$ admet $\{v=0\}$ pour pôle.

En effet, prenons un nombre positif $r$ quelconque tel que

$$F(\{|x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1\})\subset\{|x'|\leqq r,\ |y'|\leqq r\}. \tag{25}$$

Puis prenons un nombre positif $m$ tel que

$$\{|x'|\leqq r,\ |y'|\leqq r\}\subset F(\{|x|\leqq m,\ |y|\leqq m\}).$$

Alors en particulier, on a

$$F(\{|x|>m\})\subset\{|x'|>r\}\cup\{|y'|>r\}. \tag{26}$$

Maintenant, par un raisonnement tout à fait semblable à celui par lequel on a déduit (23) de (22), on déduit de (25)

$$F(\{|y|\leqq 1,\ |xy|\leqq 1\})\subset\{|y'|\leqq r\}. \tag{27}$$

En remarquant $m\geqq 1$, en vertu de (26) et (27), on a

$$F(\{|x|>m,\ |xy|\leqq 1\})\subset\{|x'|>r\}. \tag{28}$$

Donc, en vertu de (20) et (28), on a

$$S\left(\left\{|u|\leqq 1,\ 0<|v|<\frac{1}{m}|u|\right\}\right)\subset\{|x'|>r\}. \tag{29}$$

Puisque $r$ est arbitraire autent qu'il satisfasse à (25), en faisant $r\to\infty$ $(m\to\infty)$, (29) montre que $S_2$ admet $\{v=0\}$ pour pôle, ce qui acheve (ii).

(iii) Montrons que le pôle $\{v=0\}$ de $S_1$ est d'ordre 1 avec la partie principale $cue^{-\alpha(u,0)}/v$.

En effet, désigons l'ordre de pôle de $S_1$ en $\{v=0\}$ par $N\,(N\geqq 1)$. En tenant compte de (i) et (20), on développe $S_1$ et $S_2$ autour de $\{v=0\}$:

$$\begin{aligned} S_1(u, v)&=\frac{a_N(u)}{v^N}+\cdots+\frac{a_1(u)}{v}+A_1(u, v)\\ S_2(u, v)&=e^{\alpha(u,0)}v+A_2(u, v)\end{aligned} \tag{30}$$

où $A_1, A_2\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$, $A_2(u, 0)=\partial A_2/\partial v(u, 0)=0$ et

$$a_N(u)\not\equiv 0. \tag{31}$$

D'après (20) on a $S_1(0, v)=F_1(0, v)$ qui est holomorphe en $v$. En conséquence on a $a_N(0)=\cdots=a_1(0)=0$, et en particulier on a

$$a_N(0)=0. \tag{32}$$

Observons que, en vertu de 3° et (20), on a l'égalité $J_S=c/v$. En substitutant (30) à cette égalité, comparons les coefficients en $v^{-N}$. Tout d'abord si on avait $N\geqq 2$ on aurait

$$\frac{da_N(u)}{du}+Na_N(u)\frac{\partial\alpha(u, 0)}{\partial u}=0. \tag{33}$$

Dans le cas $\partial\alpha(u, 0)/\partial u\equiv 0$, en vertu de (32) et (33), on aurait $a_N(u)\equiv 0$, ce qui contredit (31). Dans le cas $\partial\alpha(u, 0)/\partial u \neq 0$, la multiplicité $l$ de zéro de $a_N(u)$ en $u=0$ étant $l \geqq 1$, la multiplicité de zéro de $Na_N(u)(\partial\alpha(u, 0)/\partial u)$ en 0 serait $\geqq l$. D'autre part, la multiplicité de zéro de $da_N(u)/du$ en 0 serait $l-1$, ce qui contredit (33). Donc, on a $N=1$. Ensuite, pour $N=1$, on a

$$\frac{da_1(u)}{du}+a_1(u)\frac{\partial\alpha(u, 0)}{\partial u}=ce^{-\alpha(u,0)}\ .$$

La seule solution qui satisfait la condition initialle (32) ($N=1$) est $a_1(u)=cue^{-\alpha(u,0)}$, ce qui montre (iii).

Maintenant d'après (iii), en postant $\beta(u, v)=S_1(u, v)-(cu/v)e^{-\alpha(u,v)}$, on a $\beta\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$. En vertu de (20) et (i), $F$ est de la forme dans la conclusion du théorème III. □

## § 5. Exemples et Problèmes.

D'abord, à propos des théorème I et II, nous donnons l'exemple bien connu.

**Exemple 5.1.** Avec $m, n\in\boldsymbol{Z}$, $m\geqq 0$ et $\lambda\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$, définissons $F$ par $x'=x\exp\{n\lambda(x^m y^n)\}$, $y'=y\exp\{-m\lambda(x^m y^n)\}$. Cette $F$ satisfait aux 1° et 2° du théorème II. Plus, si $n\geqq 0$, cette $F$ satisfait aux 1° et 2° du théorème I (en effet aux 1° et 2° du théorème P). Pourtant on a $J_F=\exp\{(n-m)\lambda(x^m y^n)\}$.

Ensuite, à propos du théorème I, nous donnons deux exemples.

**Exemple 5.2.** Définissons $f$ et $g\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ par

$$f(z)=\int\frac{e^{-z}-1}{z}dz-z \quad \text{et} \quad g(z)=z-f(z).$$

Posons $F$: $x'=xe^{f(x^2y)}$, $y'=ye^{g(x^2y)}$. Alors on a $J_F\equiv 1$. Cette $F$ n'est pas injective.

**Exemple 5.3.** Il existe une application holomorphe $F: \boldsymbol{C}^2(x, y)\to\boldsymbol{C}^2(x', y')$ satisfaisant aux 1° et 2° du théorème I qui n'est pas surjective.

En effet, on peut construire une telle $F$ par la méthode de [2], qui est une généralisation de la construction de l'exemple de Fatou et Bieberbach.

Considérons un automorphisme $T: \boldsymbol{C}^2(x', y')\to\boldsymbol{C}^2(z', w')$ défini par $z'=x'\exp\{-x'y'+\lambda(y'e^{x'y'})\}$, $w'=e^{-1}y'e^{x'y'}$, où $\lambda$ est une fonction entière telle que $\lambda(0)=0$ et $\lambda(e)=1$. Posant $Y=\{(x', y')\,|\,y'=0\}$, $Y$ est un sousvariété dont les points sont tous fixés par $T$ : $T(x', 0)=(x', 0)$. Puis, $Y$ est attractive par rapport à $T$ au sens de [2], car, en observant

$$dT(x', 0)=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}$$

la valeur proper de $T$ (dans la direction transversale à $Y$) en $Y$ est une constante $e^{-1}<1$. En appliquant [2] (p. 291, théorème 1.), il existe une et une seule application holomorphe $F: \boldsymbol{C}^2(x, y)\to\boldsymbol{C}^2(x', y')$ qui satisfait aux conditions (a) et (b) suivantes:

(a) Avec l'application linnéaire $L: z=x,\ w=e^{-1}y$, on a $T\circ F=F\circ L$.

(b) Le développement de $F=(F_1, F_2)$ autour de $\{y=0\}$ est de la forme

$$F_1(x, y)=x+\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)y^i \qquad f_i\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$$

$$F_2(x, y)=y+\sum_{j=2}^{\infty} g_j(x)y^j \qquad g_j\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}).$$

Montrons que cette $F$ est une application désirée. D'après l'égalité $T\circ F=F\circ L$, $F$ est injective. L'image $F(\boldsymbol{C}^2)$ est

$$F(\boldsymbol{C}^2)=\{(x', y')\,|\lim_{n\to\infty} T^n(x', y')\in Y\},$$

et cependent on a $T(1, 1)=(1, 1)$, donc on a $(1, 1)\notin F(\boldsymbol{C}^2)$, ce qui montre que $F$ n'est pas surjective. Il ne reste qu'à examiner 2°. D'après (b), on a $F(\{y=0\})\subset\{y'=0\}$. D'autre part, d'après (a) et les définitions de $L$ et $T$, on a

$$\begin{aligned} F(\{x=0\})&=F(\{(x, y)\,|\lim_{n\to\infty} L^n(x, y)=(0, 0)\})\\ &=\{(x', y')\in F(\boldsymbol{C}^2)\,|\lim_{n\to\infty} L^nF^{-1}(x', y')=(0, 0)\}\\ &=\{(x', y')\in F(\boldsymbol{C}^2)\,|\lim_{n\to\infty} F^{-1}T^n(x', y')=(0, 0)\}\\ &\subset\{x'=0\}. \end{aligned}$$

A propos de la possibilité d'une généralisation du théorème P dans la direction du théorème II, avec $\alpha\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^*)$ et $c\in\boldsymbol{C}^*$, considérons $F: \boldsymbol{C}^*(x)\times\boldsymbol{C}^*(y)\to\boldsymbol{C}^*(x')\times\boldsymbol{C}^*(y')$ définie par $x'=cxe^{-\alpha(xy)}$, $y'=ye^{\alpha(xy)}$. Alors, 1° $F$ est bijective; 2° $F_*: \pi_1((\boldsymbol{C}^*)^2)\to\pi_1((\boldsymbol{C}^*)^2)$ est l'identité; 3° $J_F=c$. L'auteur ignore s'il existe une autre forme de $F: \boldsymbol{C}^*(x)\times\boldsymbol{C}^*(y)\to\boldsymbol{C}^*(x')\times\boldsymbol{C}^*(y')$ satisfaisant à ces 1°~3°.

Finalement, à propos du théorème III, avec $\mu, \nu\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ et $c\in\boldsymbol{C}^*$, définissons $H: \boldsymbol{C}^2(x, y)\to\boldsymbol{C}^2(x', y')$ par $x'=cxe^{-\mu(xy)}+\nu(ye^{\mu(xy)})$, $y'=ye^{\mu(xy)}$. Cette $H$ satisfait aux 1°~3° du théorème III. Soient $H_1, \cdots, H_n$ des telles applications avec divers $\mu, \nu\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ et $c\in\boldsymbol{C}^*$. Alors la composée $H_n\circ H_{n-1}\circ\cdots\circ H_1$ satisfait aussi aux 1°~3°. L'auteur ignore s'il existe une autre forme de $F$ satisfaisant aux 1°~3° du théorème III.

OSAKA MEDICAL COLLEGE

## Références


[1] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Gordon and Breach (1968).

[2] Y. Nishimura, Automorphismes analytiques admettent des sous-variétés de points fixés attractives dans la direction transversale, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983), 289-299.

[3] Y. Nishimura, Applications holomorphes injectives de $C^2$ dans lui-même qui exceptent une droite complexe, J. Math. Kyoto Univ., **24** (1984), 755-761.

[4] E. Peschl, Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes, C. R., **242** (1956), 1836-1838.

[5] T. Ueda, Local structure of analytic transformations of two complex variables, I, J. Math. Kyoto Univ., **26** (1986), 233-261.