J. Math. Soc. Japan
Vol. 18. No. 2, 1966

Sur le théorème de P. Thullen et K. Stein

Par Kazuko KATÔ

(Reçu le 10 déc., 1965)

Introduction

En 1935, P. Thullen[1] a découvert un fait à l'égard du prolongement des surfaces analytiques, en se proposant de généraliser au cas de plusieurs variables le théorème de Picard concernant les points singuliers essentiels isolés des fonctions holomorphes d'une variable:

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine connexe dans l'espace de n variables complexes et soit $\mathfrak{S}$ une surface analytique irréductible dans $\mathfrak{D}$. Alors, toute surface analytique qui est donnée dans $\mathfrak{D}$ en dehors de $\mathfrak{S}$, peut être prolongée analytiquement à tous les points de $\mathfrak{S}$, si elle peut être prolongée analytiquement au moins à un point de $\mathfrak{S}$.

En 1953, R. Remmert et K. Stein[2] ont montré qu'un pareil fait se présente pour les ensembles analytiques.

D'autre part, en 1906, F. Hartogs[3] a découvert le fait que les points singuliers d'une fonction holomorphe de plusieurs variables forment un ensemble satisfaisant au théorème de la continuité. D'ailleurs, en 1909, il a indiqué que, dans un cas simple, cet ensemble était une surface analytique[4].

En 1934, K. Oka[5] en a abstrait la notion d'ensemble pseudoconcave et il s'est rendu compte d'un résultat plus général, sans démonstration.

En 1962, T. Nishino[6] en a donné une démonstration complète. Pour ceci, il a introduit la notion de l'ensemble dérivé d'un ensemble pseudoconcave.

Ensuite, M. Tadokoro[7] a défini l'ensemble pseudoconcave d'ordre quelconque et il a généralisé le théorème de K. Oka, indiqué ci-dessus, aux ensembles pseudoconcaves d'ordre quelconque.

Dans le présent mémoire, nous rétablissons le théorème de P. Thullen aussi bien que celui de R. Remmert et K. Stein sur la base de la notion des

1) Voir P. Thullen [**1**].
2) Voir R. Remmert et K. Stein [**2**].
3) Voir F. Hartogs [**3**].
4) Voir F. Hartogs [**4**].
5) Voir K. Oka [**5**]. Il l'a appele "Ensemble de la class H".
6) Voir T. Nishino [**6**].
7) Voir M. Tadokoro [**7**].

ensembles pseudoconcaves et de celle de leurs dérivés[8].

I. Cas de surfaces analytiques

1. Surface analytique[9]. Considérons un domaine $\mathfrak{D}$ (connexe) dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n (n>1)$. Un ensemble $\mathfrak{F}$ de points de $\mathfrak{D}$ s'appelle *surface analytique* dans $\mathfrak{D}$, si, pour tout point P de $\mathfrak{D}$, il existe un voisinage U de P et une fonction f holomorphe dans U, de façon que la partie de $\mathfrak{F}$ dans U soit exprimée par l'équation $f=0$.

Une surface analytique $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{D}$ est dite *réductible*, si elle est la réunion de deux surfaces analytiques dans $\mathfrak{D}$, non-vides et distinctes de $\mathfrak{F}$. Au cas contraire, elle est dite *irréductible* dans $\mathfrak{D}$. D'après Weierstrass, une surface analytique $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{D}$ est une réunion dénombrable de surfaces analytique irréductibles dans $\mathfrak{D}$. Toute partie de $\mathfrak{F}$ qui est une surface analytique irréductible dans $\mathfrak{D}$ s'appelle *composante irréductible* de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{D}$.

Un point P de la surface analytique $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{D}$ s'appelle *point régulier* de $\mathfrak{F}$, si la partie de $\mathfrak{F}$ au voisinage de P peut être représentée par le plan analytique $x_n=a_n$, en effectuant une transformation convenable biunivoque et analytique des coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ au voisinage de P. Au cas contraire, P s'appelle *point critique* de $\mathfrak{F}$.

Soient $\mathfrak{F}$ une surface analytique dans $\mathfrak{D}$ et P un point frontière de $\mathfrak{D}$. Nous disons que $\mathfrak{F}$ peut être *prolongée analytiquement* au point P, s'il existe un voisinage U de P et une fonction holomorphe f dans U, de façon que la partie de $\mathfrak{F}$ coïncide avec les zéros de f dans $\mathfrak{D} \cap U$. La somme de $\mathfrak{F}$ et des zéros de f est une surface analytique dans $\mathfrak{D} \cup U$. La surface analytique minimum parmi de telles surfaces prolongées s'appelle *prolongement analytique* de F dans $\mathfrak{D} \cup U$[10]. Un point frontière de $\mathfrak{D}$ s'appelle *point singulier*

---

8) Voir H. Cartan, J. P. Serre etc. [8]. H. Cartan a démontré la même chose d'une autre manière.

9) Nous employons la définition par R. Remmert et K. Stein.

10) Dans ce cas, nous ne considérons qu'un voisinage U situé dans un domaine $\mathfrak{D}'$ donné à l'avance, tel qu'il contienne $\mathfrak{D}$ et P à son intérieur. Alors, il faudrait en général prendre pour $\mathfrak{D}'$ un domaine multivalent, quoique $\mathfrak{D}$ soit un domaine univalent. Voici un exemple:

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de deux variables complexes (x, y) défini par $|x|<1$, $|y|<1$ ôté des points $|x|=\frac{1}{2}$, $|y| \leqq \frac{1}{2}$. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe seulement dans $|x|<\frac{2}{3}$ et $|f(x)|<\frac{1}{4}$. Soit $\mathfrak{F}$ une surface analytique défini par $y-f(x)=0$. Dans cette circonstance, considérons le prolongement analytique de $\mathfrak{F}$ au point $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Il est naturel de considérer que $\mathfrak{F}$ peut être prolongée à ce point.

essentiel de $\mathfrak{F}$, si $\mathfrak{F}$ ne peut être prolongée à ce point.

2. Ensemble pseudoconcave. Soient E un ensemble fermé dans un domaine $\mathfrak{D}$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et P $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de E. Nous dirons que l'ensemble E est *pseudoconcave* en P, si les énoncés suivants sont vérifiés :

1) Toutes les fois que, pour un certain nombre positif r_0, l'ensemble des points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ satisfaisant à

$$x_i = a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad 0 < |x_n - a_n| < r_0$$

ne contient aucun point de E, nous pouvons faire correspondre à tout nombre positif r avec $0 < r < r_0$, $n-1$ nombres positifes $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$, de façon que, pour tout $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1})$ avec $|x'_i - a_i| < r_i$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$, nous puissions trouver un point x'_n avec $|x'_n - a_n| < r$ pour lequel le point $(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x'_n)$ appartient à E.

2) Cette propriété-ci est invariante par toute transformation analytique biunivoque de coordonées au voisinage de P.

Un ensemble E s'appelle *ensemble pseudoconcave* dans un domaine $\mathfrak{D}$, s'il est fermé dans $\mathfrak{D}$ et pseudoconcave en tout point de E[11].

D'après la définition, il est claire qu'un ensemble pseudoconcave ne peut être contenu dans un ensemble analytique de dimension $n-2$ au plus.

Et nous voyons facilement, en vertu du théorème de Weierstrass, que toute surface analytique dans un domaine $\mathfrak{D}$ est un ensemble pseudoconcave. De plus, on voit immédiatement de la définition :

LEMME 1. *Un ensemble E fermé dans un domaine $\mathfrak{D}$ est un ensemble pseudoconcave en le point P de E, s'il existe un voisinage U de P et une surface analytique $\mathfrak{F}$ dans U telle que $\mathfrak{F} \subset U \cap E$ et que $P \in \mathfrak{F}$.*

D'autre part, nous pouvons dire qu'une surface analytique est la plus petite unité d'ensemble pseudoconcave, c'est-a-dire :

LEMME 2. *Un ensemble pseudoconcave E contenu dans une surface analytique $\mathfrak{S}$ irréductible dans un domaine $\mathfrak{D}$ coïncide nécessairement avec $\mathfrak{S}$, pourvu qu'il ne soit pas vide.*

En effect, d'abord, d'après la remarque que nous venons de faire, E contient au moins un point régulier de $\mathfrak{S}$, puisque l'ensemble de tous les points critiques de $\mathfrak{S}$ est un ensemble analytique de dimension $n-2$ au plus.

Supposons, par contre, que E ne coïncide pas avec $\mathfrak{S}$. E admet au moins un point frontière dans un ensemble des points réguliers de $\mathfrak{S}$. Sinon, E contiendrait tous les points réguliers de $\mathfrak{S}$, alors E serait égal à $\mathfrak{S}$ puisque E est fermé. Soit P $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point frontière de E dans $\mathfrak{S}$, qui est

11) Voir K. Oka [**5**].

un point régulier de $\mathfrak{S}$. Nous pouvons supposer, en effectuant une transformation analytique biunivoque de coordonnées convenable, que $\mathfrak{S}$ s'exprime par $x_n = a_n$, au voisinage de P de la forme

$$|x_i - a_i| \leqq r_i \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Alors l'ensemble:

$$x_i = a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad 0 < |x_n - a_n| < r$$

ne contient aucun point de E, où r_i, r sont des nombres réels positifs suffisamment petits. D'autre part, pour tout voisinage de P, il y a un point $(a_1', a_2', \cdots, a_n')$ sur $\mathfrak{S}$ tel qu'il n'appartienne pas à E, par suite l'ensemble:

$$x_i = a_i' \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \ |x_n - a_n| < r$$

ne contient aucun point de E. Ce qui contredit la pseudoconcavité de E. Donc, E coïncide nécessairement avec $\mathfrak{S}$.

3. Ensemble dérivé d'un ensemble pseudoconcave. Soit E un ensemble pseudoconcave dans un domaine $\mathfrak{D}$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Un point de E s'appelle point de *première espèce*, si E est une surface analytique au voisinage de ce point. Au cas contraire, il est dit de *deuxième espèce.* L'ensemble de tous les points de deuxième espèce de E s'appelle *ensemble dérivé* de l'ensemble pseudoconcave E. L'ensemble dérivé de E est évidemment fermé dans $\mathfrak{D}$. Nous avons le théorème suivant dû à T. Nishino:

THÉORÈME[12]. *L'ensemble dérivé d'un ensemble pseudoconcave dans un domaine $\mathfrak{D}$ est aussi un ensemble pseudoconcave dans $\mathfrak{D}$.*

4. Nous allons démontrer le théorème de P. Thullen à l'aide de la notion d'ensemble pseudoconcave:

THÉORÈME. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de n variables complexes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et soit $\mathfrak{S}$ une surface analytique dans $\mathfrak{D}$. Alors, toute surface analytique $\mathfrak{F}$, qui est donnée dans $\mathfrak{D}$ en dehors de $\mathfrak{S}$, peut être prolongée analytiquement en tous les points de $\mathfrak{S}$, si elle peut être prolongée analytiquement au moins en un point de $\mathfrak{S}$.*

En effet, soit E la somme de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{F}$, alors E est fermé dans $\mathfrak{D}$, Car, étant P un point d'accumulation de points de $\mathfrak{F}$, intérieur à $\mathfrak{D}$, il appartient à $\mathfrak{F}$ s'il n'appartient pas à $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ étant fermée dans $\mathfrak{D}$, E est fermé dans $\mathfrak{D}$. Ensuite, nous voyons, d'après le lemme 1, que E est un ensemble pseudoconcave dans $\mathfrak{D}$, puisque tout point de E appartient à la surface analytique $\mathfrak{S}$ ou à $\mathfrak{F}$.

Supposons que $\mathfrak{F}$ peut être prolongée au point P de $\mathfrak{S}$. Soit E' l'ensemble

12) Voir T. Nishino [6].

dérivé de E, alors E' ne contient aucun point de $\mathfrak{F}$, et de plus E' ne contient pas de point de $\mathfrak{S}$ au voisinage de P. D'après le lemme 2, E' ne peut contenir aucun point de $\mathfrak{S}$. Ceci signifie que $\mathfrak{F}$ peut être prolongée à tous les points de $\mathfrak{S}$.

II. Cas d'ensembles analytiques

5. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de n variables complexes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(n>1)$. Un ensemble $\mathfrak{M}$ de points dans $\mathfrak{D}$ s'appelle *ensemble analytique* dans $\mathfrak{D}$, si pour tout point P dans $\mathfrak{D}$, il existe un voisinage U de P et un certain nombre de fonctions holomorphes dans U, de façon que la partie de $\mathfrak{M}$ dans U soit exprimée par les zéros communs de ces fonctions.

Pour quelques notions et dénominations concernant les ensembles analytiques, nous nous contentons de nous ramener au mémoire de R. Remmert et K. Stein[13].

6. Soit E un ensemble fermé dans un domaine $\mathfrak{D}$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et soit P $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de E. Soit q un nombre entier tel que $0<q\leqq n-1$. Nous dirons que l'ensemble E est *pseudoconcave d'ordre* q en P, si les énoncés suivants sont vérifiés:

1) toutes les fois que, pour certains $n-q$ nombres réels positifs $r_{q+1}, r_{q+2}, \cdots, r_n$, la réunion $\varDelta_{q+1}\cup\varDelta_{q+2}\cup\cdots\cup\varDelta_n$ des ensembles $\varDelta_j$ qui sont définis par

$$\begin{aligned}\varDelta_j:\ & x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ \cdots,\ x_q=a_q\\ & |x_i-a_i|<r_i\\ & 0<|x_j-a_j|<r_j\ \ (i\neq j,\ i=q+1,\cdots,n)\end{aligned}$$

ne contient aucun point de E, on peut choisir pour chaque système $(r'_{q+1}, r'_{q+2}, \cdots, r'_n)$ avec $0<r'_j<r_j$ $(j=q+1,\cdots,n)$ un système $(s_1, s_2, \cdots, s_q)$ de q nombres réels positifs, de façon que, pour tout $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_q)$ avec $|x'_i-a_i|<s_i$, il existe $n-q$ valeurs $x'_{q+1}, x'_{q+2}, \cdots, x'_n$ avec $|x'_j-a_j|<r_j$, pour lesquelles le point $(x'_1, \cdots, x'_q, x'_{q+1}, \cdots, x'_n)$ appartienne à E.

2) Cette propriété-ci est invariante par toute transformation analytique biunivoque de coordonnées au voisinage de P.

L'ensemble E s'appelle *ensemble pseudoconcave d'ordre* q dans un domaine $\mathfrak{D}$, s'il est fermé dans $\mathfrak{D}$ et pseudoconcave d'ordre q en tout point de E. Un ensemble pseudoconcave au sens de la première partie est un ensemble pseudoconcave d'ordre $n-1$ au présent sens.

Remarquons que nous voyons facilement, grâce au théorème de Weierstrass, qu'un ensemble analytique de dimension q au moins en tout point est

13) R. Remmert und K. Stein [2].

un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans $\mathfrak{D}$, et qu'un ensemble contenu dans un ensemble analytique de dimension $q-1$ au plus ne peut être un ensemble pseudoconcave d'ordre q.

De plus, nous avons les lemmes suivants:

LEMME 3. *Un ensemble E fermé dans un domaine $\mathfrak{D}$ est un ensemble pseudoconcave d'ordre q en un point P de E, s'il existe un voisinage U de P et un ensemble analytique $\mathfrak{M}$ de dimension q au moins dans U tels que $\mathfrak{M} \subset U \cap E$ et que $P \in \mathfrak{M}$.*

Ceci sera facilement démontré.

LEMME 4. *Un ensemble pseudoconcave E d'ordre q contenu dans un ensemble analytique $\mathfrak{M}$ irréductible de dimension q dans un domaine $\mathfrak{D}$, coïncide nécessairement avec $\mathfrak{M}$, pourvu qu'il ne soit pas vide.*

En effet, d'après la remarque que nous venons de faire, E ne peut être contenu dans l'ensemble des points critiques de $\mathfrak{M}$.

Supposons que E ne coïncide pas avec $\mathfrak{M}$. Il y a au moins un point frontière de E dans $\mathfrak{M}$, qui est un point régulier de $\mathfrak{M}$. Soit P $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un tel point. Effectuons une transformation convenable, analytique et biunivoque de coordonnées, de manière que $\mathfrak{M}$ s'exprime par $x_{q+1}=a_{q+1}, \cdots, x_n=a_n$ au voisinage de P. Nous voyons facilement que E ne peut être pseudoconcave d'ordre q en P. Ce qui est contre l'hypothèse. E coïncide donc avec $\mathfrak{M}$.

7. Soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans un domaine $\mathfrak{D}$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Un point P de E est dit de *première espèce*, s'il existe un voisinage U de P, dans lequel E est un ensemble analytique de dimension q purement. Au cas contraire, il est dit de *deuxième espèce*. L'ensemble de tous les points de deuxième espèce de E s'appelle *ensemble dérivé* de E. Pour $q=n-1$, cette notion n'est autre que celle introduite par T. Nishino. L'ensemble dérivé de E est évidemment fermé dans $\mathfrak{D}$. Et, d'ailleurs, nous avons le théorème suivant, qui est indispensable au théorème que nous montrerons en dérnier lieu.

THÉORÈME. *Un ensemble dérivé de l'ensemble pseudoconcave d'ordre q dans un domaine $\mathfrak{D}$ est aussi un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans $\mathfrak{D}$.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin de la généralisation du théorème d'oka[14], due à M. Tadokoro[15], comme suit:

THÉORÈME. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de q variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_q$. Dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_q, y_1, y_2, \cdots, y_{n-q}$, considérons un ensemble pseudoconcave E d'ordre q dans un domaine cylindrique $(\mathfrak{D}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-q})$ où γ_i est défini par $|y_i| < r_i$ $(i=1, 2, \cdots, n-q)$.*

14) Voir K. Oka [5].

15) Voir M. Tadokoro [7].

Supposons que, le point dans $(\mathfrak{D}, \Gamma)$ *où* Γ *est un voisinage convenable de la frontière de* $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-q})$ *n'est pas contenu dans* E, *et il existe un ensemble* e *de capacité non-nulle dans* $\mathfrak{D}$, *tel que, pour tout point* $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ *de* e, *la section* $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ *de* E *par le plan analytique* $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \cdots, x_q=\xi_q$ *soit composée des points en nombre fini dans l'espace* $y_1, y_2, \cdots, y_{n-q}$.

Alors, il en est ainsi pour tout point de $\mathfrak{D}$ *et* E *un ensemble analytique de dimension* q *purement dans un domaine* $(\mathfrak{D}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-q})$ *dans l'espace* $(x_1, x_2, \cdots, x_q, y_1, y_2, \cdots, y_{n-q})$.

Grâce à ce théorème-ci nous pouvons démontrer le théorème precédent de la même manière que T. Nishino[16].

8. Nous allons introduire le théorème suivant de la même maniére que pour la surface analytique:

THÉORÈME. *Soit* $\mathfrak{D}$ *un domaine dans l'espace de* n *variables complexes* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, *et soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble analytique irréductible de dimension* q *dans* $\mathfrak{D}$. *Alors tout ensemble analytique* $\mathfrak{M}$ *de dimension* q *purement, donné dans* $\mathfrak{D}$ *en dehors de* $\mathfrak{S}$, *peut être prolongé analytiquement à tous les points de* $\mathfrak{S}$, *s'il peut être prolongé analytiquement au moins à un point de* $\mathfrak{S}$.

En effet, soit E la somme de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{S}$. Alors E est évidemment un ensemble fermé dans $\mathfrak{D}$. Nous voyons que E est un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans $\mathfrak{D}$, d'après le lemme 3.

Supposons que $\mathfrak{M}$ peut être prolongé à un point P de $\mathfrak{S}$. Soit E' l'ensemble dérivé de E, alors E' ne contient aucun point de $\mathfrak{M}$, et de plus E' ne contient pas les points de $\mathfrak{S}$ au voisinage de P. D'après le lemme 4, il faut que E' soit vide. Ceci signifie que $\mathfrak{M}$ peut être prolongé à tous les points de $\mathfrak{S}$.

Kôbegakuin Université

Bibliographie

[1] P. Thullen, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann., **111** (1935), 137-157.

[2] R. Remmert und K. Stein, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Ann., **126** (1953), 263-306.

[3] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, Sitzungsber. Math.-Phys. Kl. K. B. Akad. Wiss. München, **36** (1906), 223-242.

[4] F. Hartogs, Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebild, Acta Math., **32** (1908), 57-79.

[5] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **4** (1934), 93-98.

16) M. Tadokoro a publié une démonstration de ce théorème en japonais.

[6] T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves, J. Math. Kyoto Univ., 2 (1962) 225-245.
[7] M. Tadokoro, Sur les ensembles pseudoconcaves généraux, J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 281-290.
[8] H. Cartan, J. P. Serre etc., Séminaire sur les fonctions de plusieurs variables, XIII (Paris 1953-1954).