J. Math. Soc. Japan
Vol. 25, No. 1, 1973

Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, II

Par Nobushige TODA

(Reçu le 2 juin, 1972)

§ 1. Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde transcendante à $n(\geqq 2)$ branches dans le plan $|z|<\infty$ définie par une équation irréductible

(1) $$F(z, f)=A_0(z)f^n+A_1(z)f^{n-1}+\cdots+A_n(z)=0$$

où les $A_0, \cdots, A_n$ sont des fonctions entières sans zéros communs à toutes au moins un rapport entre lesquelles est transcendant.

Pour $n=2$, 3 et 4, Niino et Ozawa [**3**, **4**] ont démontré le

THÉORÈME A. *Quand* $A_0(z)\equiv 1$, *s'il y a* $2n-1$ *valeurs finies et distinctes* $a_1, \cdots, a_{2n-1}$ *telles que*

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\delta(a_i, f)>2n-2,$$

alors,

i) *il y a* $n-1$ *valeurs exceptionnelles au sens de Picard dans* $\{a_i\}_{i=1}^{2n-1}$ *(soient* $a_1, \cdots, a_{n-1}$*)*;

ii) $\delta(a_n, f)=\cdots=\delta(a_{2n-1})>1-1/n$;

iii) *s'il y a une autre valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna* a_{2n}, *alors* $\delta(a_{2n}, f)\leqq 1-\delta(a_n, f)$.

De plus, ils ont conjecturé que ce théorème est peut-être valable pour tout $n(\geqq 2)$ entier.

D'autre part, il y a longtemps Cartan [**1**] a conjecturé que s'il n'y a entre les $A_0, \cdots, A_n$ que λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants au plus $(\lambda<n)$,

$$\sum_a \delta(a, f)\leqq n+\lambda+1.$$

Dans [**8**], on a démontré que si la conjecture de Cartan est vraie, celle de Niino et Ozawa l'est aussi. C'est-à-dire, on a prouvé le

THÉORÈME B. *Quand* $\lambda=n-1$, *le Théorème A est vrai pour tout* $n(\geqq 2)$.

En appliquant ce théorème, on a démontré que la conjecture de Niino et Ozawa est positive pour $n=5$ et 6, et donné quelques généralisations pour $n=2$, 3 et 4 ([**7**, **8**]).

Dans ce mémoire, on démontre que, dans le Théorème B, l'hypothèse $\lambda=n-1$ peut être enlevée pour tout n sans restriction que $A_0(z)\equiv 1$. C'est-à-dire, on donne le

THÉORÈME C. *S'il y a $2n$ valeurs distinctes $a_1, \cdots, a_{2n}$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{2n} \delta(a_i, f) > 2n-1$$

alors

1) *les valeurs $a_1, \cdots, a_{2n}$ se repartissent en deux classes jouissant les propriétés suivantes:*

a) *chaque classe contient n valeurs (soient $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{a_{n+1}, \cdots, a_{2n}\}$);*

b) *tous les rapports entre $\{F(z, a_i)\}_{i=1}^{n}$ et cels entre $\{F(z, a_i)\}_{i=n+1}^{2n}$ sont des constantes;*

c) $|T(r, f)-T(r, F(z, a_1)/F(z, a_{n+1}))/n| < O(1)$;

2) *soit X un ensemble de valeurs différentes de $a_1, \cdots, a_{2n}$ telles qu'aucun des rapports entre les éléments dans $\{F(z, a); a \in X\}$ n'est constante, alors $\sum_{a\in X} \delta(a, f) < 1/n$.*

Ce théorème contient une réponse positive pour la conjecture de Niino et Ozawa.

D'abord, on considère sur le cas du système et puis applique au cas d'algébroïde.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg librement ([2], [5]).

§ 2. Préliminaires.

Soit $f=(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique définie par Cartan ([1]).

Soit

$$F = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire de $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients constants. On dit que la combinaison F est

1) lacunaire si elle n'admet pas de zéro dans $|z|<\infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si elle n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z|<\infty$;

3) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,,F)}{T(r,f)}>0\,.$$

On note que 1)$\to$2)$\to$3) et $0\leqq\delta(F)\leqq 1$.

On donne ici quelques lemmes qui seront utilisés après.

LEMME 1. *Soient A une $(n+1, n+1)$-matrice régulière à éléments constants et $(F_0, \cdots, F_n)^t=A(f_0, \cdots, f_n)^t$, alors*

$$|T(r,f)-T(r,F)|<O(1)$$

où $F=(F_0, \cdots, F_n)$ ([**1**], p. 8).

LEMME 2. *Pour $i\neq j$, $f_j\not\equiv 0$,*

$$T(r,f_i/f_j)-O(1)<T(r,f)$$

([**1**], p. 10).

LEMME 3. *Soient $F_1, \cdots, F_q$ q combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et*

$$v(z)=\max_{(\beta_1,\cdots,\beta_{q-n-1})}\log|F_{\beta_1}\cdots F_{\beta_{q-n-1}}|$$

où $n+1<q$ et $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{q-n-1}$ sont $q-n-1$ entiers distincts pris d'une façon quelconque parmis les q premiers entiers. Alors, on a

$$(q-n-1)T(r,f)<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(re^{i\theta})d\theta+O(1)$$

([**1**], *Corollaire* 2).

LEMME 4. *Soit $X=\{F\}$ un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. S'il n'y a pas de relations linéaires homogènes entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$, alors on a*

$$\sum_{F\in X}\delta(F)\leqq n+1$$

([**1**], p. 20).

LEMME 5. *Quand il y a $n-1$ relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$, s'il y a un ensemble $X=\{F_i\}_{i=1}^N$ de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\delta(F_i)>0 \qquad (i=1, \cdots, N)$$

et

$$\sum_{i=1}^N\delta(F_i)>2n-1$$

où $2n\leqq N\leqq\infty$, alors

1) *il y a au moins deux systèmes de n combinaisons dans X (soient $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}\}$, $1\leqq i\leqq p$, $p\geqq 2$) tels que les $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$ sont proportionnelles aus*

unes aux autres, par conséquent

$$\delta(F_{i_1}) = \cdots = \delta(F_{i_n}) \qquad (i=1, \cdots, p);$$

2) *soit X' un ensemble des combinaisons dans $X - \bigcup_{i=1}^{p} \{F_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ telles qu'aucun des rapports des elements dans X' n'est constante, alors*

$$\sum_{i=1}^{p} \delta(F_{i_1}) + \sum_{F_i \in X'} \delta(F_i) \leqq 2.$$

Ce lemme est une amélioration du Théorème 1 dans [8] et on peut le démontrer comme dans sa démonstration. C'est-à-dire, le Théorème 1 et sa démonstration ([8]) sont valables sans restriction qu'il y a une combinaison F dans X telle que $\delta(F)=1$.

§ 3. Quelques d'autres lemmes.

Pour démontrer le Théorème C cité dans l'introduction, on prépare quelques lemmes encore.

LEMME 6. *Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans $|z|<\infty$, $F_1, \cdots, F_{2n}$ $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{2n} \delta(F_i) > 2n-1 \tag{2}$$

et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Alors,

$$\lambda > n - \sqrt{n+2}.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\lambda < n-1$ et

$$\delta(F_1) \geqq \delta(F_2) \geqq \cdots \geqq \delta(F_{2n}).$$

Alors, on a de (2)

$$\delta(F_1) \geqq \delta(F_2) \geqq \cdots \geqq \delta(F_n) > n/(n+1). \tag{3}$$

Parce que $F_1, \cdots, F_{n+1}$ sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre $F_1, \cdots, F_{n+1}$ est aussi λ. Par conséquent, il y a $n+1-\lambda$ combinaisons dans $\{F_1, \cdots, F_{n+1}\}$ (soient $g_0, \cdots, g_{n-\lambda}$) telles que

$$\|g_0, g_1, \cdots, g_{n-\lambda}\| \not\equiv 0$$

et

$$\|g_0, g_1, \cdots, g_{n-\lambda}, F_i\| \equiv 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n),$$

où $\|g_0, \cdots, g_{n-\lambda}\|$ signifie le wronskian de $g_0, \cdots, g_{n-\lambda}$ et ainsi de suite. On peut prendre

$$\delta(g_0)=\min_{0\leqq i\leqq n-\lambda}\delta(g_i)$$

Représentons $F_1, \cdots, F_{2n}$ par $g_0, \cdots, g_{n-\lambda}$ et soit k le nombre des combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}-\{g_0, \cdots, g_{n-\lambda}\}$ dont le coefficient de g_0 est nul. D'après l'hypothèse, on a $0\leqq k\leqq\lambda$. Soient $\{H_j\}_{j=1}^{k}$ telles combinaisons. Pour $j=1, \cdots, k$, il y a au moins un des coefficients des $g_1, \cdots, g_{n-\lambda}$ qui n'est pas nul. Soit le coefficient de $g_{i(j)}$ différent de zéro $(1\leqq i(j)\leqq n-\lambda,\ j=1, \cdots, k)$.

En modifiant la démonstration du Théorème 2 dans [6] et utilisant les Lemmes 2 et 3 comme dans la démonstration du théorème fondamental de Cartan ([1], p. 12-p. 15), on a

$$\begin{aligned}(2n-n-k-1)T(r,f)&<\sum_{i=1}^{2n}N(r,0,F_i)+\lambda\sum_{i=1}^{n-\lambda}N(r,0,g_i)\\&\quad-\sum_{j=1}^{k}N(r,0,g_{i(j)})+o(T(r,f))\end{aligned}$$

sauf peut-être dans un ensemble de r de mesure linéaire finie. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n}\delta(F_i)+\lambda\sum_{i=1}^{n-\lambda}\delta(g_i)-\sum_{j=1}^{k}\delta(g_{i(j)})&\leqq n+k+1+\lambda(n-\lambda)-k\\&=n+1+\lambda(n-\lambda)\,.\end{aligned}$$

En utilisant (2) et (3), on a

$$2n-1+\frac{n\lambda(n-\lambda-1)}{n+1}<n+1+\lambda(n-\lambda)\,,$$

c'est-a-dire,

$$\lambda^2-2n\lambda+n^2-n-2<0\,.$$

En conséquence, on a

$$\lambda>n-\sqrt{n+2}\,.$$

LEMME 7. *Soient $f, F_1, \cdots, F_{2n}$ et λ comme dans le Lemme* 6. *Alors, si $\lambda\geqq n-2$, on a $\lambda=n-1$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\lambda=n-2$. Alors, il y a trois combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$ (soient F_1, F_2, F_3) telles que

$$\|F_1, F_2, F_3\|\not\equiv 0$$

et toutes les autres combinaisons peuvent être représentées par F_1, F_2, et F_3:

$$F_j=\alpha_{1j}F_1+\alpha_{2j}F_2+\alpha_{3j}F_3\qquad(j=4, \cdots, 2n)\,.$$

Du Lemme 4 et de (2), au moins un des $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ est zéro pour tout j. L'hypothèse $\lambda=n-2$ entraîne qu'au moins $n-1$ coefficients entre $\{\alpha_{1j}\}_{j=4}^{2n}$ (resp. $\{\alpha_{2j}\}_{j=4}^{2n}$, resp. $\{\alpha_{3j}\}_{j=4}^{2n}$) ne sont pas nuls. Par conséquent, il y a au moins une combinaison (soit F_p) telle que $\alpha_{1p}\neq 0$, $\alpha_{2p}\neq 0$ et au moins une combinaison (soit F_s) telle que $\alpha_{2s}\neq 0$, $\alpha_{3s}\neq 0$ $(4\leqq p\leqq 2n,\ 4\leqq s\leqq 2n)$. C'est-à-dire,

$$F_p=\alpha_{1p}F_1+\alpha_{2p}F_2+0\,,$$

$$F_s=0+\alpha_{2s}F_2+\alpha_{3s}F_3\,.$$

En éliminant F_2, on a

$$F_p=\alpha_{1p}F_1+\frac{\alpha_{2p}}{\alpha_{2s}}F_s-\frac{\alpha_{2p}\alpha_{3s}}{\alpha_{2s}}F_3\,.$$

Comme $\alpha_{1p}\neq 0$, $\alpha_{2p}/\alpha_{2s}\neq 0$, $\alpha_{2p}\alpha_{3s}/\alpha_{2s}\neq 0$ et F_1, F_s, F_3 sont linéairement indépendantes, on a du Lemme 4

$$\delta(F_1)+\delta(F_s)+\delta(F_3)+\delta(F_p)\leqq 3\,.$$

D'autre part, de (2) on a

$$\delta(F_1)+\delta(F_s)+\delta(F_3)+\delta(F_p)>3\,,$$

qui est absurde. Cela veut dire que

$$\lambda\geqq n-1\,.$$

Maintenant, le système f est transcendant, par conséquent $\lambda\leqq n-1$. Donc, on a

$$\lambda=n-1\,.$$

COROLLAIRE 1. *Dans le Lemme* 6, *quand* $2\leqq n\leqq 7$, $\lambda=n-1$.

En effet, du Lemme 6, on a $\lambda>n-3$, de sorte que $\lambda\geqq n-2$. Du Lemme 7, on a $\lambda=n-1$.

LEMME 8. *Soient* f, $F_1,\cdots,F_{2n}$ *et* λ *comme dans le Lemme* 6. *Quand* $n\geqq 4$, *si* $\lambda\leqq n-3$, *pour les* $g_0,\cdots,g_{n-\lambda}$ *données dans la démonstration du Lemme* 6, *il existe* $n-\lambda$ *combinaisons* $G_1,\cdots,G_{n-\lambda}$ *dans* $\{F_i\}_{i=1}^{2n}-\{g_0,\cdots,g_{n-\lambda}\}$ *dont le coefficient de* g_0 *n'est pas nul telles que*

$$(n-\lambda)\sum_{i=1}^{n-\lambda}\delta(g_i)+\delta(g_0)+\sum_{j=1}^{n-\lambda}\delta(G_j)\leqq(n-\lambda)(n+1-\lambda)\,.$$

DÉMONSTRATION. Représentons $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$ par $g_0,\cdots,g_{n-\lambda}$. Alors, il y a au plus λ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}-\{g_0,\cdots,g_{n-\lambda}\}$ dont le coefficient de g_0 est égal à zéro. Cela veut dire qu'il y a au moins $n-1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}-\{g_0,\cdots,g_{n-\lambda}\}$ dont le coefficient de g_0 est différent de zéro. L'inégalité $\lambda\leqq n-3$ signifie qu'il y a au moins $\lambda+1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}-\{g_0,\cdots,g_{n-\lambda}\}$ (soient $G_1',\cdots,G_{\lambda+1}'$) dont le coefficient de g_0 n'est pas égal à zéro.

Du Lemme 6, $\lambda>n-\sqrt{n+2}$; par conséquent $\lambda>(n-1)/2$. Cela veut dire que $\lambda+1>n-\lambda$.

Or, choisissons de $G_1',\cdots,G_{\lambda+1}'$ $n-\lambda$ combinaisons (soient $G_1,\cdots,G_{n-\lambda}$) telles que pour tout i $(=1, \cdots, n-\lambda)$ au moins un coefficient de g_i n'est pas égal à zéro:

(4) $$G_j=\sum_{i=0}^{n-\lambda}\beta_{ij}g_i \qquad (j=1, \cdots, n-\lambda),$$

où $\beta_{0j}\neq 0$ $(j=1, \cdots, n-\lambda)$ et pour tout i $(=1, \cdots, n-\lambda)$ il y a au moins un $j(i)$ tel que $\beta_{ij(i)}\neq 0$.

De (4), on a

(5) $$-\sum_{i=1}^{n-\lambda}\frac{\beta_{ij}}{\beta_{0j}}g_i+\frac{1}{\beta_{0j}}G_j=g_0 \qquad (j=1, \cdots, n-\lambda).$$

De (5), on a pour i tel que $\beta_{ij}\neq 0$,

(6) $$g_i=-\beta_{0j}g_0\Delta_{ij}/\beta_{ij}\Delta_j$$

où

$$\Delta_j=\|g_1, \cdots, g_{n-\lambda}, G_j\|/g_1\cdots g_{n-\lambda}G_j,$$

$$\Delta_{ij}=\frac{\|g_1, \cdots, g_{i-1}, g_0, g_{i+1}, \cdots, g_{n-\lambda}, G_j\|}{g_1\cdots g_{i-1}g_0g_{i+1}\cdots g_{n-\lambda}G_j}.$$

Dans (5), il y a au moins un $\beta_{ij(i)}\neq 0$ pour tout i, par conséquent

$$\{g_1, \cdots, g_{n-\lambda}\}\subset\{g_i\,;\,\beta_{ij}\neq 0,\ 1\leqq i,\ j\leqq n-\lambda\}.$$

En conséquence, on a

$$\max_{0\leqq i\leqq n-\lambda}\log|g_i|\leqq\log|g_0|+\sum_{\beta_{ij}\neq 0}\log^+|\Delta_{ij}|$$
$$+\sum_{j=1}^{n-\lambda}\log^+\left|\frac{1}{\Delta_j}\right|+O(1).$$

De cela, en utilisant la définition de $T(r, f)$, les Lemmes 1 et 2 on a comme d'habitude

$$T(r, f)\leqq N(r, 0, g_0)+\sum_{j=1}^{n-\lambda}N(r, 0, G_j)+(n-\lambda)\sum_{i=1}^{n-\lambda}N(r, 0, g_i)+o(T(r, f))$$

sauf peut-être dans un ensemble de r de mesure linéaire finie. Donc, on a par définition de $\delta(F)$

$$(n-\lambda)\sum_{i=1}^{n-\lambda}\delta(g_i)+\delta(g_0)+\sum_{j=1}^{n-\lambda}\delta(G_j)\leqq(n-\lambda)(n+1-\lambda).$$

LEMME 9. *Soient $f, F_1, \cdots, F_{2n}$ et λ comme dans le Lemme 6. Alors, on a*

$$\lambda=n-1.$$

DÉMONSTRATION. Quand $2\leqq n\leqq 7$, on a déjà démontré que $\lambda=n-1$ dans le Corollaire 1. Donc, on démontre ce lemme quand $n\geqq 8$.

On peut supposer que

$$\delta(F_1) \geqq \delta(F_2) \geqq \cdots \geqq \delta(F_{2n}).$$

Supposons que $\lambda \leqq n-3$. Soient $g_0, \cdots, g_{n-\lambda}$ les combinaisons définies dans la démonstration du Lemme 6; c'est-à-dire,

$$\|g_0, \cdots, g_{n-\lambda}\| \not\equiv 0,$$

$$\|g_0, \cdots, g_{n-\lambda}, F_i\| \equiv 0 \qquad (i=1, \cdots, 2n),$$

$$\{g_0, \cdots, g_{n-\lambda}\} \subset \{F_1, \cdots, F_{n+1}\}$$

et

$$\delta(g_0) = \min_{0 \leqq i \leqq n-\lambda} \delta(g_i).$$

De plus, on peut prendre $F_1 \in \{g_0, \cdots, g_{n-\lambda}\}$: $g_1 = F_1$.

Du Lemme 7, on a $\sqrt{n+2} > n-\lambda$, par conséquent

$$(n-\lambda)^2 + 1 + n - \lambda \leqq 2n+2-\lambda \leqq 2n-2.$$

Or, dans $\{F_i\}_{i=n+2}^{2n} - \{G_j\}_{j=1}^{n-\lambda}$, il y a au moins $\lambda-1$ combinaisons, où G_j $(j=1, \cdots, n-\lambda)$ sont les combinaisons données dans le Lemme 8. De plus,

$$2n+2-\lambda = 2+(n+1-\lambda)+(n-\lambda)+(\lambda-1).$$

Donc, en utilisant le Lemme 8 on a

$$\sum_{j=2n-(n-\lambda)(n+1-\lambda)}^{2n} \delta(F_j) \leqq (n-\lambda)\sum_{i=1}^{n-\lambda} \delta(g_i) + \delta(g_0)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-\lambda} \delta(G_i) \leqq (n-\lambda)(n+1-\lambda).$$

D'autre part, on a de (2)

$$(n-\lambda)(n+1-\lambda) < \sum_{j=2n-(n-\lambda)(n+1-\lambda)}^{2n} \delta(F_j),$$

qui est absurde. Cela veut dire que

$$\lambda \geqq n-2,$$

de sorte que grâce au Lemme 7, on a

$$\lambda = n-1.$$

THÉORÈME C'. *Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans $|z|<\infty$, $F_1, \cdots, F_{2n}$ $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{2n} \delta(F_i) > 2n-1,$$

alors

1') *les combinaisons $F_1, \cdots, F_{2n}$ se repartissent en deux classes jouissant les propriétés suivantes:*

a′) *chaque classe contient n combinaisons (soient* $\{F_1, \cdots, F_n\}$ *et* $\{F_{n+1}, \cdots, F_{2n}\}$*)*;

b′) *les combinaisons d'une même classe sont proportionnelles;*

c′) $|T(r, f)-T(r, F_1/F_{n+1})|<O(1)$;

2′) *soit* X *un ensemble de combinaisons des* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants et différentes de* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *telles qu'aucun des rapports n'est constante et les combinaisons dans* $X \cup \{F_i\}_{i=1}^{2n}$ *sont linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$, *alors*

$$\sum_{F \in X} \delta(F) < 1/n\,.$$

DÉMONSTRATION. Grâce au Lemme 9, l'hypothèse entraîne qu'il y a $n-1$ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Par conséquent, on a, en appliquant le Lemme 5 pour $N=2n$, a′) et b′) de 1′) tout de suite. Puis, soit $F=(F_1, \cdots, F_{n+1})$, alors du Lemme 1

$$|T(r, f)-T(r, F)|<O(1)\,.$$

D'autre part, on a de la définition de $T(r, f)$ et utilisant que $F_1, \cdots, F_n$ sont proportionnelles

$$|T(r, F)-T(r, F_1/F_{n+1})|<O(1)\,,$$

de sorte que l'on a c′).

On démontre 2′). En appliquant 2) du Lemme 5, on a

$$\sum_{F \in X} \delta(F)+\delta(F_1)+\delta(F_{n+1}) \leqq 2\,.$$

De plus, de 1′) et l'hypothèse, on a

$$\delta(F_1)+\delta(F_{n+1})>2-1/n\,.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{F \in X} \delta(F) < 1/n\,.$$

COROLLAIRE 2. *Dans le Théorème C′, s'il y a une combinaison lacunaire (resp. exceptionnelle au sens de Picard) dans* $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$, *il y a n combinaisons lacunaires (resp. exceptionnelles au sens de Picard).*

§ 4. Démonstration du Théorème C.

En appliquant le Théorème C′ aux fonctions algébroïdes, on peut prouver le Théorème C.

LEMME 10. *Soit f une fonction algébroïde définie par* (1). *Alors, on a*

$$|T(r, f)-T(r, A)/n|<O(1)$$

où $A=(A_0, \cdots, A_n)$ ([**9**]).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME C. Soient

$$F(z, a_i)=F_i \qquad (i=1, \cdots, 2n)$$

et

$$F(z, a)=F_a \qquad (a \in X)$$

où $F(z, \infty)\equiv A_0$. Alors, on a du Lemme 10

$$\delta(a_i, f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, a_i)}{T(r, f)}$$

$$=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, 0, F_i)}{n\cdot T(r, f)}=\delta(F_i)\,.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{2n}\delta(a_i, f)=\sum_{i=1}^{2n}\delta(F_i)>2n-1\,.$$

Visiblement, F_i $(i=1, \cdots, 2n)$ et F_a $(a \in X)$ sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. En conséquence, le Théorème C′ entraîne le Théorème C.

COROLLAIRE 3. *Quand $N=2n$, on peut enlever l'hypothèse $\lambda=n-1$ dans le Théorème B. En particulier, on a le Théorème A pour tout n entier* ($\geqq 2$).

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya
Furo-cho, Chikusa-ku
Nagoya-shi, Japon

Bibliographie

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires des p fonctions holomorphes données, Mathematica, **7** (1933), 5–31.
[2] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
[3] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function, Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 98–113.
[4] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function, II, Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 178–187.
[5] H. L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehlfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, **8** (1934), 1–72.
[6] N. Toda, Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 290–319.
[7] N. Toda, Sur les valeurs déficientes de fonctions algébroïdes à 2 branches, Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 501–514.
[8] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67–95.
[9] G. Valiron, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math. France, **59** (1931), 17–39.