J. Math. Soc. Japan
Vol. 26, No. 3, 1974

Représentations unitaires monomiales d'un groupe discret, en particulier du groupe modulaire

Par Masahiko SAITO

(Reçu le 28 mai, 1973)

Introduction.

Un groupe discret n'est que rarement de type I, ce qui nous empêche d'en bien exploiter la théorie des représentations unitaires. Dans ce travail, nous obtiendrons certains résultats concernant les représentations unitaires monomiales induites d'un sous-groupe ouvert satisfaisant à une certaine condition d'un groupe localement compact, et les appliquerons aux groupes algébriques et au groupe modulaire.

Ce mémoire se divise en deux parties. Dans la première partie (§ 1-§ 3), on introduit une condition dite ($\mathcal{F}_0$) pour un sous-groupe ouvert H d'un groupe localement compact G, et une condition dite ($\mathcal{F}$) pour un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-groupes ouverts de G. Le Théorème 1 donnera la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement d'une représentation unitaire monomiale induite de H avec elle-même, et un critère simple et commode de son irréductibilité. Le Théorème 2 montrera que deux représentations unitaires monomiales induites de sous-groupes dans $\mathcal{A}$ sont ou bien équivalentes ou bien disjointes, et donnera un bon critère de leur équivalence. Ces résultats sont analogues à ceux de G. W. Mackey [2] et y ajoutent des renseignements plus précis.

Soient G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps parfait infini k, $G(k)$ le groupe des points rationnels sur k de G muni de la topologie discrète et $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-groupes $H(k)$ de $G(k)$, où H parcourt les sous-groupes fermés connexes de G. Alors $\mathcal{A}$ satisfait à la condition ($\mathcal{F}$) (Théorème 3). En particulier, si k est algébriquement clos ou si G est réductif, les représentations monomiales de $G(k)$ induites de $P(k)$, P étant un sous-groupe parabolique de G défini sur k, sont toutes irréductibles.

Dans la deuxième partie (§ 4-§ 9), on applique ces résultats au groupe modulaire $G=SL(2, \boldsymbol{Z})$ et à ses sous-groupes de Cartan, et en fait une étude détaillée. On établit d'abord une correspondance biunivoque entre certaines classes de formes quadratiques binaires F et les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan $H(F)$ de G. L'ensemble $\mathcal{A}$ des sous-groupes de Cartan de G satisfait à la condition ($\mathcal{F}$). Les formes quadratiques se divisent en deux catégories ((+) et (−)). Si F est de (+)-catégorie, les représentations monomiales induites de $H(F)$ sont toutes irréductibles. Si F est de (−)-catégorie, la représentation $U(\chi)$ de G induite d'un caractère χ de $H(F)$ est irréductible si et seulement si $\chi^2=1$ (Théorème 4).

Le § 5 présente un exemple pathologique: la représentation régulière droite de G se décompose, dans une infinité de manières deux à deux complètement disjointes (voir la définition), en somme directe continue de représentations unitaires irréductibles de dimension infinie.

Dans le § 6, on décrira la décomposition des représentations $U(\chi)$, $\chi^2=1$, en deux composantes irréductibles $U^{\pm}(\chi)$.

Les trois derniers paragraphes seront consacrés à l'étude de la trace principale (voir la définition) d'opérateurs $U(\chi\,;g)$ et $U^{\pm}(\chi\,;g)$, $g\in G$, laquelle généralise et remplace dans une certaine mesure la trace d'une matrice ou d'un opérateur traçable. Pour tout $g\neq\pm 1$ dans G, $U(\chi\,;g)$ et $U^{\pm}(\chi\,;g)$ possèdent la trace principale. On les calculera et donnera un résultat, d'ailleurs incomplet, pour $U^{\pm}(\chi)$.

Des résultats essentiels de la deuxième partie ont déjà été annoncés dans [**3**] et [**4**].

Je tiens à vivement remercier S.-N. Kuroda, H. Hijikata ainsi que tous mes collègues qui m'ont bien voulu donné des suggestions et des renseignements utiles concernant l'arithmétique des corps quadratiques réels et des formes quadratiques binaires.

Mais, ma reconnaissance la plus profonde va à T. Hirai, à qui je dois l'amélioration essentielle de la rédaction du travail.

Première Partie

§ 1. La condition $(\mathscr{F}_0)$ et le critère d'irréductibilité.

Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. Dans tout ce mémoire, un *caractère* de H signifiera une représentation unitaire unidimensionnelle de H.

Soient H un sous-groupe *ouvert* de G et χ un caractère de H. Désignons par $U(\chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ. Choisissons une section Θ sur $H\backslash G$ dans G. On suppose que l'élément unité e appartient à Θ. Tout élément g dans G s'écrit dans une seule façon sous la forme $\rho(g)\theta(g)$ où $\rho(g)\in H$, $\theta(g)\in\Theta$. G opère transitivement à droite sur $\Theta: G\times\Theta\ni(g,x)\to x^g=\theta(xg)$. Ecrivons pour la simplicité $\chi(x,g)$ pour $\chi(\rho(xg))$. Alors la représentation $U(\chi)$ est réalisée dans $\mathscr{H}=l^2(\Theta)$ et l'opération est donnée par la formule

$$U(\chi\,;g)\varphi(x)=\chi(x,g)\varphi(xg) \tag{1}$$

où $U(\chi\,;g)=U(\chi)(g)$, $\varphi\in\mathcal{H}$, $g\in G$, $x\in\Theta$.

Pour un élément a dans Θ, désignons par Φ_a la fonction caractéristique du point a. On a alors

$$U(\chi\,;g)\Phi_a=\chi(a^{g^{-1}},g)\Phi_{a^{g^{-1}}}\,. \tag{2}$$

La fonction Φ_a est donc un vecteur totalisateur pour $U(\chi)$ dans $\mathcal{H}$. En particulier, on a, pour h dans H,

$$U(\chi,h)\Phi_e=\chi(h)\Phi_e\,. \tag{3}$$

Pour un élément g dans G, χ^g sera le caractère de $g^{-1}Hg$ défini par la formule $\chi^g(g^{-1}hg)=\chi(h)$ pour h dans H. Soit $\mathfrak{N}(H)$ le normalisateur de H dans G et posons $\Theta_N=\Theta\cap\mathfrak{N}(H)$. On a

$$\chi(n,h)=\chi^n(h)\,, \tag{4}$$

$$U(\chi\,;h)\Phi_n=\chi^n(h)\Phi_n \tag{5}$$

pour $h\in H$ et $n\in\Theta_N$.

Posons $W(H)=\mathfrak{N}(H)/H$. Soient w un élément de $W(H)$ et n un représentant de w dans $\mathfrak{N}(H)$. Alors, $\chi^w(h)=\chi(nhn^{-1})$ ne dépend pas du choix de n, et le caractère χ^w de H est bien défini.

Considérons la condition suivante relative à G et H:

($\mathcal{F}_0$) Si g est un élément de G et si $H\cap g^{-1}Hg$ est d'indice fini dans H, alors g appartient au normalisateur de H dans G.

LEMME 1. *Soit H un sous-groupe ouvert de G satisfaisant à la condition ($\mathcal{F}_0$). Soit x un élément de Θ. Si l'ensemble des points x^h pour $h\in H$ est fini, x appartient à Θ_N.*

DÉMONSTRATION. Supposons en effet que $x^H=\{x^h\,;h\in H\}$ soit un ensemble fini. Soit H_x l'ensemble des $h\in H$ tels que $x^h=x$. H opère transitivement à droite sur x^H ($x^H\ni y\mapsto y^h$) et H_x est le sous-groupe d'isotropie en x. On a par hypothèse que H_x est d'indice fini dans H. D'autre part, $H_x=H\cap x^{-1}Hx$. Comme H satisfait à la condition ($\mathcal{F}_0$), x appartient au normalisateur de H dans G.

Soit U_1 (resp. U_2) une représentation unitaire d'un groupe G dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$). Rappelons qu'un opérateur linéaire continu M de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ s'appelle *opérateur d'entrelacement* de U_2 avec U_1, si l'on a l'égalité $MU_2(g)=U_1(g)M$ pour tout $g\in G$. Désignons par $\mathcal{E}(U_1,U_2)$ l'espace des opérateurs d'entrelacement de U_2 dans U_1. Une représentation unitaire U de G est irréductible si et seulement si $\mathcal{E}(U,U)$ est unidimensionnelle [7].

THÉORÈME 1. *Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe ouvert de G satisfaisant à la condition ($\mathcal{F}_0$), χ un caractère de H, U la représentation unitaire de G induite de χ, $W(H)=\mathfrak{N}(H)/H$ et $W(\chi)$ le sous-groupe de $W(H)$ formé des éléments $w\in W(H)$ tels que $\chi^w=\chi$. Alors la dimension de* *l'espace $\mathcal{E}(U, U)$ est égale à l'ordre de $W(\chi)$ (admettant éventuellement $\infty=\infty$). En particulier, pour que U soit irréductible, il faut et il suffit qu'on ait $\chi^w \neq \chi$ pour tout $w \neq 1$ dans $W(H)$.*

La démonstration sera donnée dans §2 avec celle du Théorème 2.

§2. La condition ($\mathcal{F}$) et le critère d'équivalence.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-groupes fermés d'un groupe localement compact G, et considérons la condition suivante:

($\mathcal{F}$) 1. Soient H_1, H_2 dans $\mathcal{A}$ et g dans G. Si $H_1 \cap g^{-1}H_2g$ est d'indice fini dans H_1, alors $H_1 \subset g^{-1}H_2g$.

2. Soient H dans $\mathcal{A}$ et g dans G. Si gHg^{-1} est contenu dans H, g appartient au normalisateur de H dans G.

Il est évident que chaque membre de $\mathcal{A}$ satisfait à la condition ($\mathcal{F}_0$).

Rappelons que deux représentations unitaires U_1 et U_2 d'un groupe G sont dites *disjointes* si aucune sous-représentation de U_1 n'est équivalente à aucune sous-représentation de U_2 ([7]). Deux représentations unitaires U_1 et U_2 sont disjointes si et seulement si $\mathcal{E}(U_1, U_2)=\{0\}$ ([7]).

THÉORÈME 2. *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-groupes ouverts de G satisfaisant à la condition ($\mathcal{F}$), H_1, H_2 dans $\mathcal{A}$, χ_i $(i=1, 2)$ un caractère de H_i et U_i la représentation unitaire de G induite de χ_i. Alors, U_1 et U_2 sont ou bien équivalentes ou bien disjointes. Pour que U_1 et U_2 soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un élément g dans G tel que $H_2=g^{-1}H_1g$ et que $\chi_2=\chi_1^g$.*

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1 ET 2. Sous l'hypothèse du Théorème 2, prenons une section Θ_i $(i=1, 2)$ sur $H_i\backslash G$ dans G comme précédemment, et réalisons U_i dans $\mathcal{H}_i=l^2(\Theta_i)$.

1° Supposons que U_1 et U_2 ne soient pas disjointes, et soit M un opérateur non nul dans $\mathcal{E}(U_1, U_2)$. Soit Ψ_e la fonction caractéristique dans $\mathcal{H}_2$ de l'élément unité $e \in \Theta_2$, et posons $\varphi=M\Psi_e$. Ψ_e étant totalisateur, φ n'est pas zéro. On a $U_1(h)\varphi=MU_2(h)\Psi_e=\chi_2(h)\varphi$ pour $h \in H_2$. D'autre part, on a $U_1(h)\varphi(x)=\chi_1(x, h)\varphi(x^h)$ pour $h \in H_2$ et $x \in \Theta_1$. On a donc $|\varphi(x^h)|=|\varphi(x)|$ pour $x \in \Theta_1$ et $h \in H_2$. Prenons un x dans Θ_1. Si l'ensemble x^{H_2} des x^h pour $h \in H_2$ est infini, $\varphi(x)$ doit égal à zéro. En effet, si $\varphi(x) \neq 0$, vu l'égalité $|\varphi(x^h)|=|\varphi(x)|$, la fonction $y \mapsto |\varphi(y)|$ prendrait une même valeur non nulle en une infinité de points; et par suite φ n'appartiendrait pas à $l^2(\Theta_1)$.

2° Supposons momentanément $H_1=H_2=H$ sous l'hypothése ($\mathcal{F}_0$). Par le Lemme 1, le support de φ est contenu dans Θ_N: $\varphi=\sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n \Phi_n$ (Φ_n étant la onction caractéristique de n). On a, pour $h \in H$,

$$U_1(h)\varphi=\sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n U_1(h)\Phi_n=\sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n \chi_1^n(h)\Phi_n\,,$$

et

$$U_1(h)\varphi = MU_2(h)\Phi_n = \chi_2(h)\varphi = \sum_{n\in\Theta_N} \alpha_n \chi_2(h)\Phi_n\,.$$

Par conséquent, si $\chi_1^n \neq \chi_2$, on a $\alpha_n = 0$, d'où résulte que

$$\varphi = \sum_{n\in\Theta_N,\ \chi_1^n=\chi_2} \alpha_n \Phi_n\,.$$

Mais, comme Ψ_e est totalisateur pour U_2, l'opérateur $M \in \mathcal{E}(U_1, U_2)$ est déterminé par sa valeur en Ψ_e. Donc la dimension de $\mathcal{E}(U_1, U_2)$ est égale ou inférieure au nombre d'éléments n dans Θ_N tels que $\chi_1^n = \chi_2$, c'est-à-dire, à l'ordre $W(\chi)^{\#}$ du groupe $W(\chi)$.

Réciproquement, pour un élément $n \in \Theta_N$ tel que $\chi_1^n = \chi_2$, on peut définir un opérateur $M_n \in \mathcal{E}(U_1, U_2)$ en posant $M_n\Psi_e = \Phi_n$. Par conséquent, les M_n ($n \in \Theta_N$, $\chi_1^n = \chi_2$) engendrent l'espace $\mathcal{E}(U_1, U_2)$ (topologiquement d'ailleurs dans le cas de dimension infinie). On a donc l'égalité $\dim \mathcal{E}(U_1, U_2) = W(\chi)^{\#}$, ce qui démontre le Théorème 1.

3° Revenons au Théorème 2. Comme $\varphi \neq 0$, il existe un $x \in \Theta_1$ tel que x^{H_2} soit un ensemble fini. Puisque le sous-groupe d'isotropie en x de l'opération de H_2 sur x^{H_2} ($x^{H_2} \ni y \mapsto y^h$) est $H_2 \cap x^{-1}H_1x$, ce dernier est d'indice fini dans H_2. La condition ($\mathcal{F}$) entraîne que $H_2 \subset x^{-1}H_1x$. De la même manière, il existe un y dans Θ_2 tel que $H_1 \subset y^{-1}H_2y$. En vertu de la condition ($\mathcal{F}$), on a $H_2 = x^{-1}H_1x = yH_1y^{-1}$. Soit U_1^x la représentation unitaire de G induite du caractère χ_1^x de $H_2 = x^{-1}H_1x$. Puisque U_1^x est équivalente à U_1, U_1^x est aussi équivalente à U_2. Il existe alors un élément n dans Θ_{2N_2} tel que $\chi_2 = (\chi_1^x)^n = \chi_1^{xn}$; il suffit de prendre $g = xn$.

4° S'il existe un élément g dans G tel que $H_2 = g^{-1}H_1g$ et que $\chi_2 = \chi_1^g$, la théorie générale assure l'équivalence de U_1 et U_2, ce qui achève la démonstration des Théorème 1 et 2.

§ 3. Le cas des groupes algébriques.

Soient k un corps parfait infini, G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur k et $G(k)$ le groupe des points rationnels sur k de G muni de la topologie discrète. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-groupes $H(k)$ dans $G(k)$, où H parcourt les sous-groupes fermés connexes dans G définis sur k.

THÉORÈME 3. *L'ensemble $\mathcal{A}$ satisfait à la condition ($\mathcal{F}$) dans $G(k)$.*

En effet, (a) tout élément $H(k)$ dans $\mathcal{A}$ n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini appartenant à $\mathcal{A}$, et (b) $gH(k)g^{-1}$ ($g \in G(k)$) et $H(k)$ étant de la même dimension, le premier ne peut être proprement contenu dans le dernier.

Ce théorème sera surtout utile pour les sous-groupes à petit normalisateur; par exemple, les sous-groupes paraboliques et les sous-groupes de Cartan.

COROLLAIRE. *Supposons G réductif ou bien k algébriquement clos. Soit P un sous-groupe parabolique de G défini sur k. Alors la représentation unitaire de $G(k)$ induite d'un caractère de $P(k)$ est toujours irréductible. Si deux caractères de $P(k)$ sont distincts, les représentations induites sont inéquivalentes l'une à l'autre.*

En effet, $P(k)$ est son propre normalisateur dans $G(k)$.

Deuxième Partie

§ 4. Le cas du groupe modulaire.

Dorénavant, jusqu'à la fin du mémoire, on appliquera les Théorèmes 1 et 2 aux sous-groupes de Cartan du groupe modulaire $G=SL(2, \boldsymbol{Z})$ et obtiendra des résultats précis, dont l'essentiel a déjà été publié dans [**3**] et [**4**]. Des pareils résultats, sauf ceux du dernier paragraphe, sont obtenus pour $GL(2, \boldsymbol{Z})$, $SL(2, k)$ et $GL(2, k)$, k étant un corps commutatif infini de caractéristique $\neq 2$.

Soit Q l'ensemble des formes quadratiques binaires $X=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des entiers relativement premiers et le discriminant $d=b^2-4ac$ est zéro ou positif non carré. Le groupe modulaire $G=SL(2, \boldsymbol{Z})$ opère sur $Q: G\times Q \ni (g, X) \mapsto X^g={}^t gXg$. Choisissons une forme $F=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ dans Q et soit $H(F)$ le sous-groupe de G formé des éléments $h\in G$ tels que $F^h=F$. Par un calcul direct sur la condition ${}^t hF=Fh^{-1}$, on voit que $H(F)$ est la totalité des matrices de la forme

$$h(t, s)=\begin{pmatrix} \dfrac{t-bs}{2} & -cs \\ as & \dfrac{t+bs}{2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

où t, s sont des entiers tels que $t^2-ds^2=4$. Le groupe $H(F)$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}\times\{\pm 1\}$.

Soit $K(F)$ le sous-ensemble de G formé des éléments $k\in G$ tels que $F^k=-F$. On dira que F est de $(-)$-catégorie si $K(F)\neq\emptyset$, et est de $(+)$-catégorie si $K(F)=\emptyset$. Les deux catégories sont des ensembles infinis. $K(F)$ est la totalité des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ où x, y, z sont des entiers tels que $bx-ay+cz=0$, $x^2+yz=-1$. Il est facile de voir que $khk^{-1}=h^{-1}$ pour $h\in H(F)$, $k\in K(F)$.

a) Le cas $d=0$. Il existe deux entiers relativement premiers a_1 et c_1 tels qu'on ait $a=a_1^2$, $c=c_1^2$, $b=2a_1c_1$. Prenons deux entiers p_1, q_1 tels que

$a_1p_1+c_1q_1=1$, et posons $\sigma=\begin{pmatrix} c_1 & p_1 \\ -a_1 & q_1 \end{pmatrix}$, $F_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\sigma\in G$, ${}^t\sigma F\sigma=F_0$, $\sigma^{-1}H(F)\sigma=H(F_0)=\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & y \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix};\ y\in \boldsymbol{Z}\right\}$ et $K(F)=K(F_0)=\emptyset$. F est par conséquent de $(+)$-catégorie, et toutes les choses sont trivialement faciles pour les formes F à discriminant 0.

b) Le cas d positif non-carré. On suppose $c\neq 0$ (le cas $a\neq 0$ est pareil). Posons $\tau=\sqrt{d}$ et $\sigma=\begin{pmatrix} c & c \\ -\dfrac{b+\tau}{2} & -\dfrac{b-\tau}{2} \end{pmatrix}$. Si $g=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ est un élément dans G, on a

$$\sigma^{-1}g\sigma=\begin{pmatrix} X+\tau W & Y+\tau Z \\ Y-\tau Z & X-\tau W \end{pmatrix} \tag{7}$$

où

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{x+w}{2} & W&=\frac{1}{d}\left(-\frac{b}{2}x+ay-cz+\frac{b}{2}w\right), \\ Y&=\frac{x-w}{2}-\frac{b}{2c}y, & Z&=\frac{1}{d}\left(-\frac{b}{2}x+\frac{b^2+d}{4c}y-cz+\frac{b}{2}w\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En particulier, on a, pour $h(t, s)\in H(F)$ et $k=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\in K(F)$,

$$\sigma^{-1}h(t, s)\sigma=\begin{pmatrix} \dfrac{t+\tau s}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t-\tau s}{2} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\sigma^{-1}k\sigma=\begin{pmatrix} 0 & \left(x-\dfrac{b}{2c}y\right)+\tau\dfrac{1}{2c}y \\ \left(x-\dfrac{b}{2c}y\right)-\tau\dfrac{1}{2c}y & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Si on écrit $\bar{\alpha}=p-\tau q$ pour un élément $\alpha=p+\tau q(p, q\in \boldsymbol{Q})$ dans le corps quadratique réel $\boldsymbol{Q}(\tau)$, on a ce qui suit: $\sigma^{-1}G\sigma$ est la totalité des matrices $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \bar{\eta} & \bar{\xi} \end{pmatrix}$ où ξ, η sont des éléments dans $\boldsymbol{Q}(\tau)$ tels que $\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}=1$ et satisfaisant à une certaine condition d'intégralité; $\sigma^{-1}H(F)\sigma$ est la totalité des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ où α est une unité dans $\boldsymbol{Q}(\tau)$ à norme 1 satisfaisant à une condition d'intégralité; $\sigma^{-1}K(F)\sigma$ est la totalité des matrices $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}$ où β est un élément de $\boldsymbol{Q}(\tau)$ à norme -1 satisfaisant à une certaine condition d'intégralité.

En utilisant cette forme, on obtient facilement le Lemme suivant.

LEMME 2. a) *Si $h\neq\pm 1$ est dans $H(F)$, le centralisateur de h dans G est égal à $H(F)$.*

b) *$N(F)=H(F)\cup K(F)$ est le normalisateur de $H(F)$ dans G.*

c) *Plus fortement, soient* $h \neq \pm 1$ *dans* $H(F)$ *et* g *dans* G. *Si* ghg^{-1} *appartient à* $N(F)$, g *même appartient à* $N(F)$ *et on a* $ghg^{-1} = h$ *ou* h^{-1} *suivant que* $g \in H(F)$ *ou* $g \in K(F)$.

Rappelons la définition, due à Chevalley, de sous-groupe de Cartan d'un groupe abstrait.

DÉFINITION. Un sous-groupe H d'un groupe G s'appelle sous-groupe de Cartan de G si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) H est un sous-groupe nilpotent maximal dans G.

2) Si H_0 est un sous-groupe d'indice fini dans H, alors H_0 est d'indice fini dans le normalisateur de H_0 dans G.

PROPOSITION 1. *Les sous-groupes* $H(F)$, $F \in Q$ *sont les sous-groupes de Cartan de* $G = SL(2, \boldsymbol{Z})$.

On en donnera, pour toutes fins utiles, une esquisse de démonstration.

1° Soit H un sous-groupe nilpotent infini. H est alors unipotent modulo ± 1 ou bien diagonalisable dans $GL(2, \boldsymbol{C})$. En particulier, H est commutatif. En effet, on peut supposer que $H \supset Z = \{\pm 1\}$. Soit C/Z le centre de H/Z. Si C contient un élément unipotent $\neq 1$, H est unipotent modulo ± 1. Supposons que C consiste d'éléments semi-simples et prenons un $c \neq \pm 1$ dans C. Le centralisateur H_0 de c dans H est d'indice 1 ou 2 dans H. Supposons que H_0 soit d'indice 2 dans H. Prenons $h_1 \in H - H_0$ et $h \in H_0 - C$. On a alors $h^n h_1 h^{-n} h_1^{-1} = h^{2n}$. H étant nilpotent, il existerait un entier $N > 0$ tel que $h^N = 1$ pour tout $h \in H_0 - C$. Les valeurs propres de h seraient des racines N-ième de l'unité et H_0 serait fini, d'où la contradiction.

2° Si H est un sous-groupe nilpotent infini, il existe une forme F dans Q telle que $H \subset H(F)$. Si en particulier H est un sous-groupe de Cartan, on a $H = H(F)$. En effet, soit $h = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ un élément d'ordre infini dans H. Posons $t = w + x$, $s = \text{G. C. D.}(w - x, y, z)$, $w - x = bs$, $y = -cs$, $z = as$. Alors, a, b, c sont des entiers relativement premiers et $h = \begin{pmatrix} \frac{t-bs}{2} & -cs \\ as & \frac{t+bs}{2} \end{pmatrix}$. Posons $F = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Si h est unipotent, on a $t = 2$, $d = b^2 - 4ac = 0$, par suite $F \in Q$. Si h est semi-simple, diagonalisons h dans un corps quadratique $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, D étant sans diviseur carré. Comme h est d'ordre infini, D est positif et on a $d = f^2 D$. On a donc vu que $h \in H(F)$, $F \in Q$ dans tous les cas, Le Lemme 2, a) implique que $H \subset H(F)$, d'où résulte que tout sous-groupe de Cartan de G est de la forme $H(F)$, $F \in Q$.

3° Soit F une forme dans Q. Si N est un sous-groupe nilpotent contenant $H(F)$, le raisonnement précédent entraîne que $N \subset H(F')$, $F' \in Q$. Comme $H(F) \subset H(F')$, un calcul simple montre que $F' = \pm F$ et que $H(F) = H(F')$. $H(F)$

est donc nilpotent maximal. Si H_0 est un sous-groupe d'indice fini dans $H(F)$, le Lemme 2, c) entraîne que $\mathfrak{N}_G(H_0) \subset N(F)$; $H(F)$ est par conséquent un sous-groupe de Cartan de G, ce qui démontre la Proposition 1.

Disons que deux formes F et F' dans Q sont dans la même *classe* s'il existe un élément $g \in G$ tel qu'on ait $F' = \pm {}^t gFg$. On a alors démontré le Corollaire suivant.

COROLLAIRE. *L'application $F \mapsto H(F)$ induit une correspondance biunivoque entre les classes de formes dans Q et les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan dans G.*

PROPOSITION 2. *La totalité $\mathcal{A}$ des sous-groupes de Cartan de G satisfait à la condition $(\mathcal{F})$.*

En effet, tout élément d'ordre infini dans G appartient à un seul sous-groupe de Cartan. La condition $(\mathcal{F})$ s'en déduit aussitôt.

Soit F de $(-)$-catégorie. Si $k \in K(F)$ et si χ est un caractère de $H(F)$, on a $\chi^k(h) = \chi(h^{-1}) = \chi^{-1}(h) = \bar{\chi}(h)$ pour $h \in H(F)$. Les Théorèmes 1 et 2 entraînent immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 4. a) *Soient χ un caractère de $H(F)$ et $U(\chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ. Si F est de $(+)$-catégorie, $U(\chi)$ est irréductible. Si F est de $(-)$-catégorie, $U(\chi)$ est irréductible si et seulement si $\chi^2 \neq 1$.*

b) *Soient F_1, F_2 deux formes dans Q, χ_i $(i=1, 2)$ un caractère de $H(F_i)$ et $U(\chi_i)$ la représentation de G induite de χ_i. Pour que $U(\chi_1)$ et $U(\chi_2)$ soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un élément g dans G tel que $F_2 = \pm {}^t gF_1 g$ et que 1) $\chi_2 = \chi_1^g$ pour F_1, F_2 de $(+)$-catégorie et 2) $\chi_2 = \chi_1^g$ ou $\chi_2 = (\chi_1^g)^{-1}$ pour F_1, F_2 de $(-)$-catégorie.*

§ 5. Un phénomème pathologique.

Soient G un groupe discret, H un sous-groupe commutatif de G et $\hat{H}$ le groupe des caractères de H. Pour $\chi \in \hat{H}$, $U(\chi)$ sera la représentation unitaire de G induite de χ. Alors la représentation régulière droite T de G se décompose en somme directe continue des représentations $U(\chi)$:

$$T = \int_{\hat{H}} \oplus U(\chi) d\chi$$

où $d\chi$ est une mesure de Haar de $\hat{H}$ (voir Godement [**1**]).

Soient $T = \int_A \oplus U^\alpha d\alpha = \int_B \oplus V^\beta d\beta$ deux décompositions en somme directe continue de représentations irréductibles. On dira que ces deux décompositions sont *complètement disjointes* si 1) $U^\alpha \nsim V^\beta$ pour $\alpha \in A$, $\beta \in B$ et 2) $U^\alpha \nsim U^{\alpha'}$, $V^\beta \nsim V^{\beta'}$ pour $\alpha \neq \alpha'$ dans A et $\beta \neq \beta'$ dans B, où la notation $\nsim$ signifie l'inéquivalence.

On peut appliquer le théorème de Godement aux sous-groupes de Cartan du groupe modulaire G. Comme il y a une infinité de classes de formes de $(+)$-catégorie dans Q, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *La représentation régulière droite de G se décompose, dans une infinité de manières deux à deux complètement disjointes, en somme directe continue de représentations unitaires irréductibles de dimension infinie.*

Ce théorème donne un exemple encore plus pathologique que ceux de Yoshizawa [**6**] et de Mackey [**2**].

§ 6. La décomposition de $U(\chi)$, $\chi^2=1$.

Soit F une forme dans Q et posons $\mathcal{X}=\mathcal{X}(F)$ l'ensemble des formes $F^g={}^tgFg$ où g parcourt G. Soit χ un caractère de $H(F)$. On a réalisé la représentation induite $U(\chi)$ dans $l^2(\Theta)$, Θ étant une section de $H(F)\backslash G$ dans G. L'application $\Theta \ni x \mapsto F^x$ est une bijection de Θ sur $\mathcal{X}$; pour X dans $\mathcal{X}$, écrivons $\theta(X)$ le seul élément dans Θ tel que $X=F^{\theta(X)}$. La représentation $U(\chi)$ se transfère dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}(F)=l^2(\mathcal{X})$ et prend la forme suivante:

$$U(\chi\,;g)\varphi(X)=\chi(X,g)\varphi({}^tgXg)\,, \tag{11}$$

où $\varphi\in\mathcal{H}(F)$, $X\in\mathcal{X}$ et $\chi(X,g)=\chi(\rho(\theta(X)g))$.

Supposons F de $(-)$-catégorie dans le reste de ce paragraphe. Ceci équivaut à dire que $-X$ appartient à $\mathcal{X}$ pour tout $X\in\mathcal{X}$. Appelons k_0 le seul élément dans $K(F)\cap\Theta$: $F^{k_0}=-F$. Comme on a $k^2=-1$ pour tout $k\in K(F)$, on peut supposer qu'un des $\pm k_0x$ appartient à Θ pour tout $x\in\Theta$. Soit $\Theta_0=\Theta_0(F)$ l'ensemble des $x\in\Theta$ tels que $k_0x\in\Theta$, et posons $\mathcal{X}_0=\mathcal{X}_0(F)=\{F^x\,;\,x\in\Theta_0\}$. Posons $\omega(X)=\omega(\theta(X))=1$ pour $X\in\mathcal{X}_0$ et $\omega(X)=\omega(\theta(X))=-1$ sinon. On a $\omega(F)=\omega(1)=1$, $\omega(-F)=\omega(k_0)=-1$ et $\omega(X)\omega(-X)=-1$.

LEMME 3.

$$\chi(-X,g)=\chi(\omega(X)\omega(X^g))\chi^{-1}(X,g)\,. \tag{12}$$

En effet, posons $X=F^\theta$, $X^g=F^{\theta g}=F^{\theta_1}$, $\theta,\theta_1\in\Theta$. On a $\theta g=h_1\theta_1$, $h_1=\rho(\theta g)$. Si l'on pose $-X=F^{k_0\theta}=F^{\theta'}$, $\theta'\in\Theta$, on a $\theta'=\omega(\theta)k_0\theta=\omega(X)k_0\theta$. On a ensuite

$$\theta' g=\omega(X)k_0\theta g=\omega(X)k_0h_1\theta_1=\omega(X)h_1^{-1}k_0\theta_1=\omega(X)\omega(\theta_1)h_1^{-1}\cdot\omega(\theta_1)k_0\theta_1\,.$$

On a par suite $\rho(\theta' g)=\omega(X)\omega(\theta_1)h_1^{-1}=\omega(X)\omega(X^g)\rho(\theta g)^{-1}$, d'où vient $\chi(-X,g)=\chi(\rho(\theta' g))=\chi(\omega(X)\omega(X^g))\chi(\rho(\theta g)^{-1})=\chi(\omega(X)\omega(X^g))\chi^{-1}(X,g)$, ce qui démontre le Lemme 3.

On supposera que $\chi^2=1$ dans le reste de ce paragraphe. Posons $\varepsilon(\chi)=1$ si $\chi(-1)=1$ et $\varepsilon(\chi)=\sqrt{-1}$ si $\chi(-1)=-1$. On a alors $\chi(-1)=\varepsilon(\chi)^2$.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{H}^\pm=\mathcal{H}^\pm(F,\chi)$ le sous-espace de $\mathcal{H}(F)$ formé des fonctions φ telles qu'on ait $\varphi(-X)=\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi(X)$ (les doubles signes s'accordent).

Rappelons qu'on a $\chi(F, h)=\chi(h)$ et $\chi(-F, h)=\chi^{-1}(h)$ pour $h\in H(F)$ (voir la formule (4)).

PROPOSITION 3. *$\mathcal{H}(F)$ se décompose en somme directe de $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$. $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$ sont orthogonaux l'un à l'autre et sont stables sous les opérateurs $U(\chi\,;g)$, $g\in G$.*

DÉMONSTRATION. 1° Il est évident que $\mathcal{H}^+\cap\mathcal{H}^-=\{0\}$. Pour $\varphi\in\mathcal{H}$, posons

$$\varphi^{\pm}(X)=\frac{1}{2}[\varphi(X)\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(-X))\varphi(-X)]\,.$$

On a alors

$$\varphi^{\pm}(-X)=\frac{1}{2}[\varphi(-X)\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi(X)]\,,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi^{\pm}(X)&=\frac{1}{2}[\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi(X)\pm\varepsilon(\chi)^2\chi(\omega(X)\omega(-X))\varphi(-X)]\\&=\frac{1}{2}[\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi(X)\pm\varphi(-X)]\,,\end{aligned}$$

d'où $\varphi^{\pm}\in\mathcal{H}^{\pm}$. Comme on a $\varphi=\varphi^++\varphi^-$, on a $\mathcal{H}=\mathcal{H}^+\oplus\mathcal{H}^-$.

2° Soient $\varphi\in\mathcal{H}^+$ et $\psi\in\mathcal{H}^-$. Désignons par $\mathfrak{X}_0$ l'ensemble des $X\in\mathfrak{X}$ tels que $\omega(X)=1$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\psi\rangle&=\sum_{X\in\mathfrak{X}}\varphi(X)\overline{\psi(X)}=\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varphi(X)\overline{\psi(X)}+\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varphi(-X)\overline{\psi(-X)}\\&=\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varphi(X)\overline{\psi(X)}+\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\varphi(X)\cdot-\overline{\varepsilon(\chi)}\,\overline{\chi(\omega(X))}\,\overline{\psi(X)}\\&=\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varphi(X)\overline{\psi(X)}-\sum_{X\in\mathfrak{X}_0}\varepsilon(\chi)\overline{\varepsilon(\chi)}\varphi(X)\overline{\psi(X)}=0\,.\end{aligned}$$

3° Soit $\varphi\in\mathcal{H}^{\pm}$. On a

$$\begin{aligned}U(\chi, g)\varphi(-X)&=\chi(-X, g)\varphi(-X^g)\\&=\chi(\omega(X)\omega(X^g))\chi(X, g)\cdot\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X^g))\varphi(X^g)\\&=\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))\chi(X, g)\varphi(X^g)\\&=\pm\varepsilon(\chi)\chi(\omega(X))U(\chi\,;g)\varphi(X)\end{aligned}$$

d'où vient que $U(\chi\,;g)\varphi\in\mathcal{H}^{\pm}$, ce qui démontre la Proposition 3.

DÉFINITION. Appelons $U^{\pm}(\chi)$ la représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}^{\pm}$, restriction de $U(\chi)$ à $H^{\pm}$.

THÉORÈME 6. *Les représentations $U^{\pm}(\chi)$ sont irréductibles et mutuellement inéquivalentes.*

En effet, dans ce cas, $W(H(F))=W(\chi)$ étant d'ordre deux, l'espace

$\mathcal{E}(U(\chi), U(\chi))$ a deux dimensions par le Théorème 1. Donc $U^{\pm}(\chi)$ sont irréductible. Si $U^{+}(\chi)$ et $U^{-}(\chi)$ étaient équivalentes, $\mathcal{E}(U(\chi), U(\chi))$ auraient quatre dimensions, ce qui démontre le Théorème 6.

REMARQUE. Les représentations irréductibles $U^{+}(\chi)$ et $U^{-}(\chi)$ peuvent éventuellement se permuter (à l'équivalence près) selon le choix de Θ (voir la table des traces principales de $U^{\pm}(\chi; k)$ $(k \in K(F))$ à la fin du mémoire). Cela veut dire que la définition de $U^{\pm}(\chi)$ n'est pas intrinsèque.

THÉORÈME 7. a) *Soient F' une forme dans Q non nécessairement de $(-)$-catégorie et χ' un caractère de $H(F')$ non nécessairement de carré identité. Alors $U^{\pm}(\chi)$ et $U(\chi')$ sont inéquivalentes.*

b) *Supposons F' de $(-)$-catégorie et χ' de carré identité. Si $U^{\pm}(\chi)$ et $U^{\pm}(\chi')$ (les doubles signes ne s'accordent pas) sont équivalentes, il existe un élément $g \in G$ tel que $F' = \pm F$ et que $\chi' = \chi^{g}$. Dans ce cas, si Θ est la section pour $H(F)\backslash G$, on choisit $g^{-1}\Theta g$ comme section pour $g^{-1}H(F)g\backslash G$. Ceci fait, $U^{\pm}(\chi)$ et $U^{\pm}(\chi')$ (les doubles signes s'accordent) sont équivalentes; $U^{\pm}(\chi)$ et $U^{\mp}(\chi')$ (les doubles signes s'accordent) sont inéquivalentes.*

En effet, c'est une conséquence directe des Théorèmes 1, 2 et 4.

§7. La trace principale $T(\chi; g)$.

Soient $G = SL(2, \boldsymbol{Z})$, $F \in Q$, $\mathcal{X} = \{F^{g}; g \in G\}$, χ un caractère de $H(F)$ et $U(\chi)$ la représentation de G induite de χ réalisée dans $\mathcal{H} = l^{2}(\mathcal{X})$.

Pour φ, ψ dans $\mathcal{H}$ et pour un sous-ensemble $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$, posons

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{Y}} = \sum_{X \in \mathcal{Y}} \varphi(X)\overline{\psi(X)}\,.$$

LEMME 4. *Si un élement g dans G n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$, on a $X^{g} \neq X$ pour tout X dans $\mathcal{X}$. Si g est conjugué à un élément non scalaire dans $H(F)$,* a) *il y a un seul point X dans $\mathcal{X}$ tel que $X^{g} = X$ pour F de $(+)$-catégorie et* b) *il y a deux seuls points $\pm X$ dans $\mathcal{X}$ tels que $(\pm X)^{g} = \pm X$ pour F de $(-)$-catégorie.*

En effet, $X^{g} = X$ équivaut à $\theta(X)g\theta(X)^{-1} \in H(F)$, d'où la première assertion. Si $X_1^{g} = X_1$ et $X_2^{g} = X_2$, on a $x_1 g x_1^{-1} = h_1 \in H(F)$ et $x_2 g x_2^{-1} = h_2 \in H(F)$, où $x_i = \theta(X_i)$ $(i = 1, 2)$. On a $(x_2 x_1^{-1}) h_1 (x_2 x_1^{-1})^{-1} = h_2$. En vertu du Lemme 2 c), $x_2 x_1^{-1} = n$ appartient à $N(F)$. Si F est de $(+)$-catégorie, n appartient à $H(F)$ et $x_2 = x_1$. Si F est de $(-)$-catégorie et si $n \in K(F)$, on a $x_2 = n x_1$ et $X_2 = F^{n x_1} = -F^{x_1} = -X_1$, ce qui démontre le Lemme 4.

Pour $g \neq \pm 1$ dans G, désignons par $\mathcal{Y}_0(g)$ l'ensemble des $X \in \mathcal{X}$ tels que $X^{g} = X$. $\mathcal{Y}_0(g)$ est un ensemble fini pour tout $g \neq \pm 1$ dans G.

THÉORÈME 8. *Soient $g \neq \pm 1$ un élément dans G, $\mathcal{B} = \{\varphi_n; n = 1, 2, \cdots\}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Y}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{X}$ contenant $\mathcal{Y}_0(g)$. Alors* *la série* $\sum_{n=1}^{\infty}\langle U(\chi\,;g)\varphi_n,\varphi_n\rangle_{\mathcal{Y}}$ *converge et la somme ne dépend ni de* $\mathcal{B}$ *ni de* $\mathcal{Y}$. *Désignons-la* $T(g)=T(\chi\,;g)$. *Si* g *n'est conjugué à aucun élément de* $H(F)$, *on a* $T(\chi\,;g)=0$. *Si* g *est conjugué à un élément* $h\in H(F)$, *on a* $T(\chi\,;g)=\chi(h)$ *pour* F *de* $(+)$*-catégorie, et* $T(\chi\,;g)=\chi(h)+\bar{\chi}(h)$ *pour* F *de* $(-)$*-catégorie.*

DÉMONSTRATION. Ecrivons $T(\mathcal{B},\mathcal{Y}\,;g)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle U(\chi\,;g)\varphi_n,\varphi_n\rangle_{\mathcal{Y}}$.

1° Soit $\mathcal{B}_0=\{\Phi_X\,;X\in\mathcal{X}\}$ la base hilbertienne de $\mathcal{H}$ composée des fonctions caractéristiques de tous les points. On a

$$\langle U(\chi\,;g)\Phi_X,\Phi_X\rangle_{\mathcal{Y}}=\sum_{Y\in\mathcal{Y}}\chi(Y,g)\Phi_X(Y^g)\overline{\Phi_X(Y)}$$

$$=\begin{cases}\chi(X,g) & \text{si } X\in\mathcal{Y} \text{ et } X^g=X,\\ 0 & \text{sinon}.\end{cases}$$

On a donc

$$T(\mathcal{B}_0,\mathcal{Y},g)=\sum_{X\in\mathcal{Y},X^g=X}\chi(X,g)=\sum_{X\in\mathcal{Y}_0(g)}\chi(X,g).$$

2° Soit $\mathcal{B}=\{\varphi_n\,;n=1,2,\cdots\}$ une base bilbertienne quelconque de $\mathcal{H}$. Ecrivons $\varphi_n=\sum_{X\in\mathcal{X}}\varphi_n(X)\Phi_X$. Alors on obtient $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(X)\overline{\varphi_n(Y)}=\delta_{X,Y}$ pour $X,Y\in\mathcal{X}$. On a $\langle U(\chi\,;g)\varphi_n,\varphi_n\rangle_{\mathcal{Y}}=\sum_{X\in\mathcal{Y}}\chi(X,g)\varphi_n(X^g)\overline{\varphi_n(X)}$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(X^g)\overline{\varphi_n(X)}$ converge absolument, on a

$$T(\mathcal{B},\mathcal{Y}\,;g)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{X\in\mathcal{Y}}\chi(X,g)\varphi_n(X^g)\overline{\varphi_n(X)}=\sum_{X\in\mathcal{Y}}\chi(X,g)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(X^g)\overline{\varphi_n(X)}$$

$$=\sum_{X\in\mathcal{Y},X^g=X}\chi(X,g)=T(\mathcal{B}_0,\mathcal{Y}\,;g).$$

3° Si g n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$, on a $\mathcal{Y}_0(g)=\emptyset$ par le Lemme 4 et $T(g)=0$. Si g est conjugué à un élément h dans $H(F)$, prenons $X\in\mathcal{Y}_0(g)$ et posons $x=\theta(X)$. On a alors $xgx^{-1}=h\in H(F)$ et $\chi(X,g)=\chi(\rho(xg))=\chi(\rho(hx))=\chi(h)$. Si F est de $(-)$-catégorie, on a facilement $\chi(-X,g)=\chi(h^{-1})=\overline{\chi(h)}$. En vertu du Lemme 4, le Théorème 8 est démontré.

COROLLAIRE. a) *Si* g_1 *et* g_2 *sont conjugués dans* G, *on a* $T(\chi,g_1)=T(\chi,g_2)$.

b) *Soient* F, F' *deux formes dans* Q *et* χ,χ' *des caractères de* $H(F)$, $H(F')$ *respectivement. Si* $U(\chi)$ *et* $U(\chi')$ *sont équivalentes, on a* $T(\chi,g)=T(\chi',g)$ *pour tout* $g\neq\pm1$ *dans* G.

Le nombre $T(\chi,g)$ s'appellerait la *trace principale* de l'opérateur $U(\chi\,;g)$ dans $\mathcal{H}$.

§ 8. La trace principale $T^{\pm}(\chi\,;\,g)$.

Supposons ensuite F de $(-)$-catégorie.

LEMME 5. *Soit k un élément de $K(F)$.*

a) *± 1 et $\pm k$ sont les seuls éléments de G qui commutent avec k.*

b) *Il n'y a pas d'élément $g\in G$ tel que $gk=-kg$.*

En effet, travaillons dans le groupe transformé par σ (voir la formule (7), (8) et (10)):

$$g=\begin{pmatrix}\xi & \eta\\ \bar{\eta} & \bar{\xi}\end{pmatrix}, \qquad k=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \bar{\beta} & 0\end{pmatrix}.$$

a) L'égalité $gk=kg$ entraîne $\xi=\bar{\xi}=p\in\boldsymbol{Q}$ et $\bar{\beta}\eta=\beta\bar{\eta}=q\in\boldsymbol{Q}$. Comme $\beta\bar{\beta}=-1$, on a $p^2+q^2=\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}=1$. Comme p est un demi-entier (formule (8)), les valeurs possibles de $2p$ sont 0, ± 1, ± 2. Le cas $2p=\pm 1$ n'est pas possible. Si $2p=0$, on a $q=\pm 1$, $\eta=\mp\beta$, $\xi=0$ et $g=\mp k$. Si $2p=\pm 2$, on a $q=0$, $\eta=0$, $\xi=\pm 1$ et $g=\pm 1$.

b) L'égalité $gk=-kg$ entraîne $\xi=-\bar{\xi}=\tau r$ $(r\in\boldsymbol{Q})$ et $\bar{\beta}\eta=-\beta\bar{\eta}=\tau s$ $(s\in\boldsymbol{Q})$. On aurait $dr^2+ds^2=-\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}=-1$, ce qui est impossible.

Rappelons que $\{k_0\}=K(F)\cap\Theta$, que Θ_0 est l'ensemble des éléments x dans Θ tels que $k_0x\in\Theta$, et que $\mathscr{X}_0=\{F^x\,;\,x\in\Theta_0\}$. On a $1\in\Theta_0$ et $k_0\notin\Theta_0$.

On va montrer que pour tout k dans $K(F)$, il existe au plus un point $X\neq F$ dans $\mathscr{X}_0$ tel que $X^k=-X$. Si on pose $x=\theta(X)$, l'égalité $X^k=-X$ équivaut à $xkx^{-1}\in K(F)$. On va chercher les éléments $x\neq 1$ dans Θ_0 tels que $xkx^{-1}\in K(F)$.

Il existe un élément h_1 dans $H(F)$ tel qu'on ait

$$H(F)=\{\pm h_1^n\,;\; n\in\boldsymbol{Z}\}\,.$$

Si on pose $k_n=h_1^nk_0$, on a

$$K(F)=\{\pm k_n\,;\; n\in\boldsymbol{Z}\}\,.$$

1° Pour deux éléments k, k' dans $K(F)$, il existe au plus un élément x dans Θ_0 tel que $xkx^{-1}=k'$. En effet, si on a $x_ikx_i^{-1}=k'$ $(i=1,2)$, on a $x_1^{-1}x_2k(x_1^{-1}x_2)^{-1}=k$ et le Lemme 5 a) entraîne que $x_2=\pm x_1$, $\pm x_1k$. Puisque $F^{x_2}=\pm F^{x_1}$, on a $x_2=x_1$.

2° S'il existe un $x\in\Theta_0$ tel que $xkx^{-1}=k'$, il n'existe pas d'élément $y\in\Theta_0$ tel que $yky^{-1}=-k'$. En effet, on aurait $(x^{-1}y)k(x^{-1}y)^{-1}=-k$, ce qui contredit le Lemme 5 b).

3° Si $m-n$ est pair $(m,n\in\boldsymbol{Z})$, il n'existe pas d'élément $x\neq 1$ dans Θ_0 tel que $xk_nx^{-1}=\pm k_m$. En effet, si $m-n=2l$ $(l\in\boldsymbol{Z})$, on a $h_1^{-l}xk_nx^{-1}h_1^l=\pm h_1^{-l}h_1^{n+2l}k_0h_1^l=\pm h_1^nk_0=\pm k_n$, et par conséquent $h_1^{-l}x=\pm 1$, $\pm k_n$, d'où vient $x=1$.

4° Supposons qu'il existe un $x \neq 1$ dans Θ_0 tel que $xk_nx^{-1} = \pm k_m$ et qu'il existe un $y \neq 1$ dans Θ_0 tel que $yk_ny^{-1} = \pm k_{m'}$. On a alors $x = y$. En effet, si $m' - m = 2l$ ($l \in \boldsymbol{Z}$), on a $y^{-1}h_1^l x k_n x^{-1} h_1^{-l} y = \pm y^{-1} h_1^l k_m h_1^{-l} y = \pm y^{-1} k_{m'} y = \pm k_n$, d'où vient que $y = x$.

LEMME 6. *Si un élément g dans G n'est conjugué à aucun élément de $K(F)$, on a $X^g \neq -X$ pour tout X dans $\mathscr{X}$. Si g est conjugué à un élément de $K(F)$, il existe au plus deux points X, Y dans $\mathscr{X}_0$ tels que $X^g = -X$, $Y^g = -Y$.*

En effet, $X^g = -X$ équivaut à $\theta(X)g\theta(X)^{-1} \in K(F)$, d'où la première assertion. Supposons qu'il y ait deux points distincts X et Y dans $\mathscr{X}_0$ tels que $X^g = -X$, $Y^g = -X$ et posons $x = \theta(X)$, $y = \theta(Y)$. On a $xgx^{-1} = k \in K(F)$, $ygy^{-1} = k' \in K(F)$ et par suite $(yx^{-1})k(yx^{-1})^{-1} = k'$. Soit z un seul élément $\neq 1$ dans Θ_0 tel que $zkz^{-1} \in K(F)$. Comme $X \neq Y$, on a $yx^{-1} \equiv z \bmod H(F)$ à gauche, et $Y = F^{zx}$. Comme F^{zx} est déterminé par X, on a démontré le Lemme 6.

Pour $g \neq \pm 1$ dans G, posons $\mathscr{Z}_0(g)$ l'ensemble des points X dans $\mathscr{X}$ tels que $X^g = \pm X$. Les Lemmes 4 et 6 entraînent que $\mathscr{Z}_0(g)$ est un ensemble fini pour tout $g \neq \pm 1$.

THÉORÈME 9. *Soient $g \neq \pm 1$ un élément de G, $\mathscr{B}^{\pm} = \{\varphi_n ; n = 1, 2, \cdots\}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}^{\pm}(\chi)$ et $\mathscr{Y}$ un sous-ensemble fini de $\mathscr{X}$ contenant $\mathscr{Z}_0(g)$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle U^{\pm}(\chi ; g)\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathscr{Y}}$ converge et la somme ne dépend ni de $\mathscr{B}$ ni de $\mathscr{Y}$. Désignons-la par $T^{\pm}(g) = T^{\pm}(\chi ; g)$. Si g n'est conjugué à aucun élément de $N(F)$, on a $T^{\pm}(g) = 0$. Si g est conjugué à un élément h de $H(F)$, on a $T^{\pm}(g) = \chi(h)$.*

On n'a pas réussi à déterminer au cas général la valeur $T^{\pm}(\chi ; g)$ quand g est conjugué à un élément de $K(F)$.

DÉMONSTRATION. On procédera comme dans la démonstration du Théorème 8.

1° Posons $\Phi_X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_X \pm \varepsilon(\chi)\Phi_{-X}]$ pour $X \in \mathscr{X}_0$. Alors $\mathscr{B}_0^{\pm} = \{\Phi_X^{\pm} ; X \in \mathscr{X}_0\}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}^{\pm}$. On a

$$\langle U^{\pm}(g)\Phi_X^{\pm}, \Phi_X^{\pm} \rangle_{\mathscr{Y}} = \begin{cases} \chi(X, g) & \text{si } X^g = X, \\ \pm\varepsilon(\chi)\chi(X, g) & \text{si } X^g = -X, \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

d'où vient

$$\begin{aligned} T^{\pm}(\mathscr{B}_0^{\pm}, \mathscr{Y} ; g) &= \sum_{X \in \mathscr{Y}} \langle U^{\pm}(g)\Phi_X^{\pm}, \Phi_X^{\pm} \rangle_{\mathscr{Y}} \\ &= \sum_{X \in \mathscr{X}_0, X^g = X} \chi(X, g) \pm \varepsilon(\chi) \sum_{X \in \mathscr{X}_0, X^g = -X} \chi(X, g). \end{aligned}$$

2° Soit $\mathscr{B}^{\pm} = \{\varphi_n^{\pm} ; n = 1, 2, \cdots\}$ une base hilbertienne quelconque de $\mathscr{H}^{\pm}$ et écrivons $\varphi_n^{\pm} = \sum_{X \in \mathscr{X}_0} a(n, X)\Phi_X^{\pm}$. Comme on a

$$\varphi_n^{\pm}(Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}a(n, Y) & \text{si } Y\in\mathscr{X}_0\,,\\[2mm] \pm\dfrac{\varepsilon(\chi)}{\sqrt{2}}a(n, -Y) & \text{sinon}\,,\end{cases}$$

on a

$$\langle U^{\pm}(g)\varphi_n^{\pm}, \varphi_n^{\pm}\rangle_{\mathcal{Y}}=\frac{1}{2}\sum_{Y, Y^g\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)a(n, Y^g)\overline{a(n, Y)}$$

$$\pm\frac{\varepsilon(\chi)}{2}\sum_{Y\in\mathscr{X}_0, Y^g\notin\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)\overline{a(n, Y)}a(n, -Y^g)$$

$$\pm\frac{\overline{\varepsilon(\chi)}}{2}\sum_{Y\notin\mathscr{X}_0, Y^g\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)\overline{a(n, -Y)}a(n, Y^g)$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon(\chi)\overline{\varepsilon(\chi)}\sum_{Y, Y^g\notin\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)\overline{a(n, -Y)}a(n, -Y^g)$$

d'où vient, par le changement d'ordre des sommations,

$$T^{\pm}(\mathscr{B}^{\pm}, \mathcal{Y}\,; g)=\frac{1}{2}\sum_{Y=Y^g\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)\pm\frac{\varepsilon(\chi)}{2}\sum_{Y=-Y^g\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)$$

$$\pm\frac{\bar{\varepsilon}(\chi)}{2}\sum_{Y^g=-Y\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)+\frac{1}{2}\sum_{-Y=-Y^g\in\mathscr{X}_0}\chi(Y, g)$$

$$=\sum_{X^g=X\in\mathscr{X}_0}\chi(X, g)\pm\varepsilon(\chi)\sum_{-X^g=X\in\mathscr{X}_0}\chi(X, g)$$

$$=T^{\pm}(\mathscr{B}_0^{\pm}, \mathcal{Y}\,; g)\,.$$

3° Si g n'est conjugué à aucun élément de $N(F)$, on a $\mathscr{Z}_0(g)=\emptyset$ par les Lemmes 4 et 6, et on a $T(g)=0$. Si g est conjugué à un élément de $H(F)$, il n'existe pas de point $X\in\mathscr{X}_0$ tel que $X^g=-X$, et il existe un seul point $X=F^x$ $(x\in\Theta_0)$ dans $\mathscr{X}_0$ tel que $X^g=X$. On a alors $xgx^{-1}=h\in H(F)$ et $\chi(X, g)=\chi(\rho(xg))=\chi(h)$, ce qui démontre le Théorème 9.

COROLLAIRE. a) *Si g_1 et g_2 sont conjugués dans G, on a $T^{\pm}(\chi\,; g_1)=T^{\pm}(\chi\,; g_2)$.*

b) *Si $U^{\pm}(F, \chi)$ et $U^{\pm}(F', \chi')$ sont équivalentes, on a $T^{\pm}(\chi\,; g)=T^{\pm}(\chi'\,; g)$.*

§ 9. Calcul de $T^{\pm}(\chi\,; k)$ au cas $b=0$.

On se bornera désormais au cas $b=0$. On va montrer que, pour tout $k\in K(F)$, il existe réellement un $X\neq F$ dans $\mathscr{X}_0$ tel que $X^k=-X$, et expliciter la valeur $T^{\pm}(\chi\,; g)$ quand g est conjugué à un élément de $K(F)$ (voir Saito [3]).

Si $b=0$, on a $d=-4ac$, et a et c sont relativement premiers. Posons

$d=4d_1$ $(d_1\in \boldsymbol{Z})$ et $\tau=2\tau_1$. Alors $K(F)$ est la totalité des matrices de la forme suivante:

$$k=\begin{pmatrix} x & cs \\ as & -x \end{pmatrix}; \qquad x,\ s\in \boldsymbol{Z},\ x^2-d_1s^2=-1.$$

On a (voir la formule (10))

$$\sigma^{-1}k\sigma=\begin{pmatrix} 0 & x+\tau_1 s \\ x-\tau_1 s & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\varepsilon=p+\tau_1 q$ une unité dans $\boldsymbol{Q}(\tau_1)$ qui engendre avec -1 le groupe des unités dans $\boldsymbol{Q}(\tau_1)$ de la forme $x+\tau_1 s$ où $x,\ s\in \boldsymbol{Z}$. On a $\varepsilon\bar{\varepsilon}=p^2-d_1q^2=-1$. Choisissons $k_0\in K(F)\cap\Theta$ de telle sorte que $\sigma^{-1}k_0\sigma=\begin{pmatrix} & \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} & \end{pmatrix}$. On a alors

$$k_0=\begin{pmatrix} p & cq \\ aq & -p \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1}h_1\sigma=\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \\ & \bar{\varepsilon}^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1}k_{-1}\sigma=\begin{pmatrix} & \varepsilon^{-1} \\ \bar{\varepsilon}^{-1} & \end{pmatrix}, \qquad k_{-1}=\begin{pmatrix} -p & cp \\ aq & p \end{pmatrix}$$

où h_1 est un élément de $H(F)$ qui engendre $H(F)$ avec -1, et $k_{-1}=h_1^{-1}k_0$.

Pour montrer qu'il existe, pour tout $k\in K(F)$, un élément $x\neq 1$ dans Θ_0 tel que $xkx^{-1}\in K(F)$, il suffit, en vertu des considérations dans §8 ($1°\sim 4°$), de montrer qu'il existe un élément $g\in G-N(F)$ tel que $gk_0g^{-1}=k_{-1}$, ce que nous allons faire.

LEMME 7. *Il existe deux entiers u et v tels que $u^2+v^2=d_1$ et que $\frac{1}{a}(pu+v)$ et $\frac{1}{c}(pu-v)$ soient des entiers.*

DÉMONSTRATION. Comme ε est une unité à norme -1 dans $\boldsymbol{Q}(\tau_1)$, d_1 n'est pas divisible par 4 et d_1 n'admet pas de diviseur premier congru à -1 modulo 4 (voir par exemple Takagi [5]).

Ecrivons

$$a=\pm 2^{e_0}p_1^{e_1}\cdots p_\lambda^{e_\lambda}, \qquad c=\mp 2^{e'_0}p_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}}\cdots p_\mu^{e_\mu}$$

où les doubles signes s'accordent, $p_1,\cdots,p_\lambda,\cdots,p_\mu$ sont des nombres premiers impairs deux à deux distincts, $e_1,\cdots,e_\lambda,\cdots,e_\mu$ sont des entiers $\geqq 1$, e_0, e'_0 sont 0 où 1, et $e_0e'_0=0$. Puisque $p_j\equiv 1 \pmod 4$ $(1\leqq j\leqq \mu)$, on a $p_j=\pi_j\bar{\pi}_j$ où $\pi_j\in \boldsymbol{Z}[i]$, $i=\sqrt{-1}$, $\bar{\pi}_j$ est le conjugué complexe de π_j et $\pi_j\neq\bar{\pi}_j$. On a $2=(1+i)(1-i)$.

Si $1\leqq j\leqq\lambda$, $p_j^{e_j}$ divise a, et si $\lambda<j\leqq\mu$, $p_j^{e_j}$ divise c. Puisque $p^2+1=d_1q^2=-acq^2$, a et c divisent $p^2+1=(p+i)(p-i)$; ce dernier est par suite divisible par $(\pi_j\bar{\pi}_j)^{e_j}$, d'où résulte que $\pi_j^{e_j}$ et $\bar{\pi}_j^{e_j}$ divisent un des $p\pm i$. Or, pour $1\leqq j\leqq\lambda$, soit π_j celui qui divise $p+i$ et soit $\bar{\pi}_j$ celui qui divise $p-i$. Pour $\lambda<j\leqq\mu$, soit π_j celui qui divise $p-i$ et soit $\bar{\pi}_j$ celui qui divise $p+i$.

Posons

$$\alpha=(1+i)^{e_0}\pi_1^{e_1}\cdots\pi_\lambda^{e_\lambda}, \qquad \gamma=(1+i)^{e'_0}\pi_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}}\cdots\pi_\mu^{e_\mu}.$$

Alors α divise $p+i$, γ divise $p-i$ et on a $a=\pm\alpha\bar{\alpha}$, $c=\mp\gamma\bar{\gamma}$. Si on met $\xi=\alpha\gamma=u+iv$ $(u, v\in \boldsymbol{Z})$, on a $u^2+v^2=\xi\bar{\xi}=-ac=d_1$. Comme $a=\pm\alpha\bar{\alpha}$ divise $(p+i)\bar{\xi}=(pu+v)+i(u-pv)$, il s'ensuit que $pu+v$ est divisible par a. De même, $pu-v$ est divisible par c, ce qui démontre le Lemme 7.

Prenons deux entiers u et v dans le Lemme 7 et posons

$$g=\begin{pmatrix} qu & -\frac{1}{a}(pu+v) \\ \frac{1}{c}(pu-v) & qu \end{pmatrix}.$$

On a alors $g\in G$, $g\notin N(F)$ et $gk_0g^{-1}=k_{-1}$.

Il est facile maintenant de déterminer la valeur de $T^{\pm}(\chi\,;g)$ quand g est conjugué à un élément k dans $K(F)$. Comme $T^{\pm}(\chi\,;g)=T^{\pm}(\chi\,;k)$, on présente ci-dessous la table des $T^{\pm}(\chi\,;k)$, $k\in K(F)$.

Mettons des conventions pour lire la table.

1. Il y a quatre caractères χ_j $(1\leqq j\leqq 4)$ de $H(F)$ tels que $\chi_j^2=1$. Ils sont déterminés par leurs valeurs en -1 et h_1.
2. X_k est le seul point $\neq F$ dans $\mathscr{X}_0$ tel que ${}^tkX_kk=-X_k$.
3. $\sigma(k)=\pm1$ suivant que $k=\pm h_1^n k_0$ (les doubles signes s'accordent).
4. $i=\sqrt{-1}$.

χ	$\chi(-1)$	$\chi(h_1)$	$\varepsilon(\chi)$	$\chi(F, \pm k_n)$	$\chi(X_{\pm k_n}, \pm k_n)$	$T^{\pm}(\chi\,;k)$
χ_1	1	1	1	1	1	±2
χ_2	1	-1	1	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$	0
χ_3	-1	1	i	$\sigma(k)$	$\sigma(k)$	$\pm2i\sigma(k)$
χ_4	-1	-1	i	$\sigma(k)(-1)^n$	$\sigma(k)(-1)^{n+1}$	0

Bibliographie

[1] R. Godement, Sur les transformations de Fourier dans les groupes discrets, C. R. Acad. Sci. Paris, **228** (1949), 627-628.

[2] G. W. Mackey, On induced representations of groups, Amer. J. Math., **73** (1951), 576-592.

[3] M. Saito, Représentations unitaires du groupe modulaire, Proc. Japan Acad., **48** (1972), 381-383.

[4] M. Saito, Représentations unitaires du groupe modulaire II, ibid., 641-642.

[5] T. Takagi, Cours d'arithmétique élémentaire (en japonais), 2e édition, Kyōritsu Shuppan, Tokyo, 1971.

[6] H. Yoshizawa, Some remarks on unitary representations of the free group,

Osaka Math. J., **3** (1951), 55-63.
[7] J. Dixmir, Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris. 1964.

Masahiko SAITO
Département de Mathématiques
Faculté des Arts Libéraux
Université de Tokyo
Komaba, Meguro-ku
Tokyo, Japon