J. Math. Soc. Japan
Vol. 30, No. 3, 1978

Sur le problème de Cauchy pour des équations faiblement hyperboliques

Par Kiyoshi YOSHIDA

(Reçu le 26 avril, 1977)

Soit $L\left(t, x ; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un polynôme différentiel défini dans $\Omega=\{(t, x) ; t \in[0, T], x \in R^{n}\}$ de la forme

$$L=\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}}+\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{j+|\nu| \leq m} a_{j, \nu}(t, x) \frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}} \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}},$$

où $a_{j,\nu}(t, x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables et bornées avec leurs dérivées. Considérons le problème de Cauchy

$$\tag{1} \left\{\begin{array}{ll} L\left(t, x ; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u=f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial^{j} u}{\partial t^{j}}(0, x)=u_{j}(x), & j=0,1, \cdots, m-1 \end{array}\right.$$

pour les données f et u_j. Alors il s'agit de trouver la condition pour qu'il y ait une seule solution u et que la solution u dépende continûment des données f et u_j. Ce problème est recherché depuis J. Hadamard [3] et il n'est pas encore complètement résolu au cas des coefficients variables. Quand on peut trouver une solution u mentionnée ci-dessus dans un espace des fonctions E, nous disons d'après Hadamard que le problème de Cauchy est bien posé dans l'espace E ou simplement bien posé si l'on l'entend bien. S. Mizohata a démontré, dans [7], que si le problème de Cauchy est bien posé dans C^{∞}, alors toutes les racines $\lambda_j(t, x ; \xi)$ du polynôme caractéristique $P(t, x ; \tau, \xi)$ (la partie homogène de degré m de L) sont nécessairement réelles pour des vecteurs ξ réels non nuls. On sait également que si les racines du polynôme caractéristique sont réelles et distinctes, alors le problème de Cauchy est bien posé dans L^2 (cf. [8]). Au contraire, T. Kano [5] a montré, par reductio absurdum, que cette condition est nésessaire dans l'hypothèse que la multiplicité des racines caractéristiques ne dépend pas de t, x et ξ. Dans [4, 4′] M. Itano et l'auteur ont démontré, par une méthode directe, que l'on a le résultat de Kano sans l'hypothèse. En traitant le problème de Cauchy dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, on doit considérer la multiplicité des racines caractéristiques. Au cas de la multiplicité constante, S. Mizohata et Y. Ohya [**9, 10**] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit bien posé dans C^∞ dans l'hypothèse que la multiplicité est inférieure ou égale à deux. Il y a aussi beaucoup d'articles (cf. [**1**] [**2**] [**11**] [**16**]) dans lesquels on a réfléchi sur ce problème quand la multiplicité est supérieure à deux. Maintenant on s'intrésse au cas où la multiplicité dépendrait de t, x et ξ. O. A. Oleinik [**13**] a donné une condition suffisante pour des équations du second ordre de la forme spéciale. A. Menikoff [**6**] a étendu le travail de Oleinik aux équations d'ordre supérieur quand la multiplicité ne dépend que de t.

Le but de cet article est d'étudier la condition pour que le problème de Cauchy pour $L\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ayant la multiplicité dépendante de t et x soit bien posé, et puis de montrer l'existence du domaine d'influence. A ce moment, des inégalités d'énérgie conduites dans l'article présent jouent un rôle essentiel. La méthode utilisée pour les conduire est une extension dirécte de celle traité dans [**15**]. Une partie des résultats obtenu ici a déja été annoncé par Ohya [**12**] et M. V. Petkov [**14**]. Afin d'éviter des compliqués résultant des équations d'ordre supérieur, nous limitons le polynôme différentiel L à celui du second ordre, qui s'écrit

$$L\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\sum_{j=1}^{n} a_j(t, x)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_j}+\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$
$$+b_0(t, x)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} b_j(t, x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(t, x).$$

1. Conditions suffisantes.

Désignons

$$D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad D=(D_1, D_2, \cdots, D_n),\quad D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

et écrivons les parties homogènes de degré deux et un de L respectivement par

$$-P(t, x; D_t, D)=-\{D_t^2+2\sum_{j=1}^{n} a_j(t, x)D_tD_j+\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}(t, x)D_iD_j\}$$

et

$$iQ(t, x; D_t, D)=i\{b_0(t, x)D_t+\sum_{j=1}^{n} b_j(t, x)D_j\}.$$

Soient $\lambda_1(t, x; \xi)$ et $\lambda_2(t, x; \xi)$ les racines du polynôme $P(t, x; \tau, \xi)$ par rapport à τ. Supposons que les racines $\lambda_j(t, x; \xi)$, $j=1, 2$, soient réelles pour vecteurs ξ réels non nuls, c'est-à-dire

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j(t, x)\xi_j)^2 - \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(t, x)\xi_i\xi_j \geqq 0\,,$$

et puis qu'elles soient indéfiniment différentiables sur $\Omega\times(R^n\backslash\{0\})$. Alors on peut associer à cette fonction un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 défini par

$$\lambda_j(t, x\,;\, D)\varphi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \lambda_j(t, x\,;\, \xi)\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\,,$$

où $\hat{\varphi}(\xi)$ est la transformée de Fourier de $\varphi(x)$. Posons

$$\partial_j = D_t - \lambda_j(t, x\,;\, D)$$

et considérons l'opérateur $-P(t, x\,;\, D_t, D) + iQ(t, x\,;\, D_t, D) + \partial_2\partial_1$. On voit que cet opérateur est de la forme de

$$a_0(t, x\,;\, D)D_t + a_1(t, x\,;\, D)\,,$$

où $a_j(t, x\,;\, D)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre j. En remplaçant D_t par $\partial_1 + \lambda_1$, nous aurons l'expression suivante:

$$-P + iQ + \partial_2\partial_1 = c_0(t, x\,;\, D)\partial_1 + c_1(t, x\,;\, D)\,.$$

Avant d'énoncer les conditions suffisantes, nous faisons des calculs du symbole principal $\sigma(c_1)$ de $c_1(t, x\,;\, D)$. Puisque $P(t, x\,;\, D_t, D) = \partial_2\circ\partial_1$ $(=\partial_1\circ\partial_2)$, le symbole principal de $-P(t, x\,;\, D_t, D) + \partial_2\partial_1$ s'écrit

$$i\Big\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}(t, x\,;\, \xi) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j}(t, x\,;\, \xi)\frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_j}(t, x\,;\, \xi)\Big\}.$$

D'autre part, vu que $\sigma(c_1)$ est égale à la valeur du symbole principal de $-P+iQ+\partial_2\partial_1$ pour $\tau = \lambda_1(t, x\,;\, \xi)$, on a

$$\sigma(c_1) = i\Big\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}(t, x\,;\, \xi) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j}(t, x\,;\, \xi)\frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_j}(t, x\,;\, \xi)\Big\} + iQ(t, x\,;\, \lambda_1, \xi)\,.$$

Si l'on considére l'opérateur $-P+iQ+\partial_1\partial_2$, alors par le même raisonnement que $-P+iQ+\partial_2\partial_1$ il s'écrit

$$-P + iQ + \partial_1\partial_2 = c_0'(t, x\,;\, D)\partial_2 + c_1'(t, x\,;\, D)$$

et le symbole principal de $c_1'(t, x\,;\, D)$ devient

$$i\Big\{\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}(t, x\,;\, \xi) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_j}(t, x\,;\, \xi)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_j}(t, x\,;\, \xi)\Big\} + iQ(t, x\,;\, \lambda_2, \xi)\,.$$

Or, nous énonçons les conditions suffisantes aux deux cas suivants.

Condition A_1 (au cas où l'ensemble

$$\{(t, x, \xi)\,;\, (\sum_{j=1}^{n} a_j(t, x)\xi_j)^2 - \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(t, x)\xi_i\xi_j = 0\}$$

ne dépendrait que de x)

[I] $$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}(t, x; \xi)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j}(t, x; \xi)\frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_j}(t, x; \xi)+Q(t, x; \lambda_1, \xi)$$

s'écrit $a(t, x; \xi)(\lambda_1(t, x; \xi)-\lambda_2(t, x; \xi))$,

[I]′ $$\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}(t, x; \xi)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_j}(t, x; \xi)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_j}(t, x; \xi)+Q(t, x; \lambda_2, \xi)$$

s'écrit $a'(t, x; \xi)(\lambda_1-\lambda_2)$,

où $a(t, x; \xi)$ et $a'(t, x; \xi)$ sont des fonctions auxquelles on peut associer des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0.

Condition A_2 (au cas où l'ensemble

$$\{(t, x, \xi); (\sum_{j=1}^{n}a_j(t, x)\xi_j)^2-\sum_{1\le i,j\le n}a_{i,j}(t, x)\xi_i\xi_j=0\}$$

se composerait en (t_0, x) ($t_0=0$ ou bien T))

[II] $$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}(t, x; \xi)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j}(t, x; \xi)\frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_j}(t, x; \xi)+Q(t, x; \lambda_1, \xi)$$

s'écrit

$$\frac{a''(t, x; \xi)}{t_0-t}(\lambda_1(t, x; \xi)+\lambda_2(t, x; \xi)),$$

[II]′ $$\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}(t, x; \xi)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_j}(t, x; \xi)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_j}(t, x; \xi)(t, Q(t, x; \lambda_2, \xi)$$

s'écrit

$$\frac{a'''(t, x; \xi)}{t_0-t}(\lambda_1(t, x; \xi)-\lambda_2(t, x; \xi)),$$

où $a''(t, x; \xi)$ et $a'''(t, x; \xi)$ sont des fonctions auxqelles on peut associer des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0.

REMARQUE. On peut traiter l'opérateur

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-t^2((t-2)^2+x^2)\Delta+b_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c(t, x)$$

sous nos conditions, mais en ce qui concerne des opérateurs comme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-t^2(t-x^2)^2\Delta+b_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c(t, x),$$

il est impossible à traiter sous ces conditions présentes.

2. Inégalité d'énergie I.

Dans cette section nous conduisons une inégalité d'énergie quand le polynôme différentiel L satisfait à la Condition A_1.

Soit $H_{(s)}(R^n)$ un espace de Sobolev muni de la norme

$$\|\varphi\|_{(s)}=\left\{\frac{1}{(2\pi)^n}\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{\varphi}(\xi)|^2d\xi\right\}^{1/2},$$

c'est-à-dire, le complété de $C_0^\infty(R^n)$ par cette norme. Dans ce qui suit, on emploiera assez souvent la notation $\mathcal{D}_{L^2}$ au lieu de $H_{(\infty)}(R^n)=\bigcap_{-\infty<s<\infty} H_{(s)}(R^n)$. On désigne par $C^\infty([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiable à valeurs dans $\mathcal{D}_{L^2}$ avec leurs dérivées jusqu'à k. Nous écrivont aussi $C^\infty([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})=\bigcap_{0\leq k\leq\infty} C^k([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})$.

THÉORÈME 1. *Pour toute* $u\in C^\infty([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})$ *il existe une constante* C *indépendante de* u *telle que*

$$\|u(t)\|_{(s)}^2+\|D_tu(t)\|_{(s-1)}^2\leqq C\{\|u(0)\|_{(s+1)}^2+\|D_tu(0)\|_{(s)}^2+\int_0^t\|f(\tau)\|_{(s)}^2d\tau\},\tag{2}$$

et

$$\|u(t)\|_{(s)}^2+\|D_tu(t)\|_{(s-1)}^2\leqq C\{\|u(T)\|_{(s+1)}^2+\|D_tu(T)\|_{(s)}^2+\int_t^T\|f(\tau)\|_{(s)}^2d\tau\},\tag{3}$$

où $f=Lu$.

Afin de démontrer le Théorème 1 on a besoin du lemme qui est bien connu comme l'inégalité de Gronwall. Donc nous négligeons la preuve.

LEMME 1 (L'inégalité de Gronwall). *Soit* $r(t)$ *une fonction continue à valeurs réelles sur* $[0, T]$ *et soit* $\rho(t)$ *une fonction non croissante à valeurs réelles sur* $[0, T]$. *Supposons que* $r(t)$ *et* $\rho(t)$ *satisfassent à*

$$r(t)\leqq C(\rho(t)+\int_0^t r(\tau)d\tau)$$

avec une constante C. *Alors on a*

$$r(t)\leqq Ce^{Ct}\rho(t).$$

Avant de démontrer le Théorème 1 nous introduisons quelques notations. Soit $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(R^n)$ et soit $\langle D\rangle^s$ l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est $(1+|\xi|^2)^{s/2}$.

PREUVE DU THÉORÈME 1. Puisque l'on obtient l'inégalité (3) par la même méthode que celle utilisée pour conduire (2), nous ne conduisons que (2). D'abord nous montrons

$$-\mathrm{Im}\int_0^t(\langle D\rangle^s\partial_ju, \langle D\rangle^su)d\tau \geqq\frac{1}{2}(\|u(t)\|_{(s)}^2-\|u(0)\|_{(s)}^2)-\mathrm{const.}\int_0^t\|u(\tau)\|_{(s)}^2d\tau.\tag{4}$$

Remarquons

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Im}(\langle D\rangle^s\partial_j u,\ \langle D\rangle^s u)\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)-\frac{1}{2i}((\lambda_j-\lambda_j^*)\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)\\
&\quad-\operatorname{Im}((\lambda_j\langle D\rangle^s-\langle D\rangle^s\lambda_j)u,\ \langle D\rangle^s u)\,,
\end{aligned}$$

où λ_j^* est l'opérateur adjoint de λ_j. Comme $\lambda_j(t, x; \xi)$ est réel, $\lambda_j-\lambda_j^*$ est d'ordre 0, et $\lambda_j\langle D\rangle^s-\langle D\rangle^s\lambda_j$ est d'ordre s, d'où il découle qu'on a l'inégalité (4). Ensuite considérons

$$-\operatorname{Im}\int_0^t\{(\langle D\rangle^s f,\ \langle D\rangle^s(\partial_1+\partial_2)u)+(\langle D\rangle^s(\partial_1+\partial_2)u,\ \langle D\rangle^s u)\}\,d\tau\,.$$

Vu que $f=Lu$, on a

$$\begin{aligned}
(5)\qquad &-\operatorname{Im}\{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\\
&\quad+(\langle D\rangle^s\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\\
&=\operatorname{Im}\{(\langle D\rangle^s f,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s f,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\\
&\quad-\operatorname{Im}\{(i\langle D\rangle^s b_0\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(i\langle D\rangle^s b_0\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\\
&\quad+\operatorname{Im}\{(\langle D\rangle^s(P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x;\ \lambda_1,\ D))u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)\\
&\qquad+(\langle D\rangle^s(P-\partial_1\partial_2-iQ(t,\ x;\ \lambda_2,\ D))u,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\\
&\quad-\operatorname{Im}\{(\langle D\rangle^s cu,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s cu,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\\
&\quad-\operatorname{Im}\{(\langle D\rangle^s\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\}\,.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (4), on obtient

$$\begin{aligned}
(6)\qquad &-\operatorname{Im}\int_0^t\{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\,d\tau\\
&\quad+\int_0^t\{(\langle D\rangle^s\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\}\,d\tau\\
&\geqq\frac{1}{2}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+2\|u(t)\|_{(s)}^2-\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2\\
&\qquad-\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2-2\|u(0)\|_{(s)}^2\}\\
&\qquad-\text{const.}\int_0^t\{\|\partial_1 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|u(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

D'après notre Condition A_1, l'opérateur $P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x;\ \lambda_1,\ D)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
(7)\qquad &P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x;\ \lambda_1,\ D)=a(t,\ x;\ D)(\partial_1-\partial_2)\\
&\qquad+\{a(t,\ x;\ D)\circ(\lambda_2-\lambda_1)-a(t,\ x;\ D)(\lambda_2-\lambda_1)\}\,,
\end{aligned}$$

où $a(t,\ x;\ D)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. Nous y désignons par $a(t, x; D)\circ(\lambda_2-\lambda_1)$ le pseudo-produit des opérateurs a et $(\lambda_2-\lambda_1)$, c'est-à-dire, l'opérateur dont le symbole est $a(t, x; \xi)(\lambda_1(t, x; \xi)-\lambda_2(t, x; \xi))$. D'après (5) et (7) on voit que

$$-\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1 u, \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2 u, \langle D\rangle^s\partial_2 u)\}\,d\tau$$

$$+\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\partial_1 u, \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u, \langle D\rangle^s u)\}\,d\tau$$

$$\leqq \text{const.}\left[\int_0^t \{\|\partial_1 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|u(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau+\int_0^t \|f(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau\right],$$

d'où d'après (6)

$$\begin{aligned}&\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\\ &\qquad\leqq \text{const.}\,[\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2+\|u(0)\|_{(s)}^2\\ &\qquad\qquad+\int_0^t \{\|\partial_1 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|u(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau\\ &\qquad\qquad+\int_0^t \|f(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau].\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 1 on a

$$\begin{aligned}&\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\\ &\qquad\leqq \text{const.}\,\{\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2+\|u(0)\|_{(s)}^2+\int_0^t \|f(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau\},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\|u(t)\|_{(s)}^2 \leqq \text{const.}\,\{\|u(0)\|_{(s+1)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s)}^2+\int_0^t \|f(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau\},$$

et

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|_{(s)}^2+\|D_t u(t)\|_{(s)}^2\\ &\qquad\leqq \text{const.}\,\{\|u(0)\|_{(s+1)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s+1)}^2\\ &\qquad\qquad+\int_0^t \|f(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau\}.\end{aligned}$$

D'où on a le résultat.

On note que le Théorème 1 reste vrai pour l'opérateur adjoint L^* de L. Puisque L^* s'écrit

$$L^*=-\partial_1^*\partial_2^*+(\partial_2\partial_1-P+iQ(t, x; \lambda_1, D))^*+\bar{c}$$

ou bien

$$L^*=-\partial_1^*\partial_2^*+(\partial_1\partial_2-P+iQ(t, x; \lambda_2, D))^*+\bar{c},$$

on peut faire de la discussion pareille à celle pour L.

3. Inégalité d'énergie II.

Cette section est consacrée à conduire une inégalité d'énergie sous la Condition A_2 $(t_0=0)$. Des outils essentiels sont les Lemmes 2 et 3 suivants d'après Oleinik. Pour la preuve, voir Menikoff [**6**].

LEMME 2. *Soit $y(t)$ une fonction continûment différentiable à valeurs réelles sur $[0, T]$, et soit $g(t)$ une fonction continue non négative sur $[0, T]$. Si $y(t)$ et $g(t)$ satisfont à*

$$ty'(t) \leqq Ny(t) + M_1 t y(t) + M_2 t^K g(t), \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

pour $K > N > 0$ (M_1 et M_2 étant nombres positives) et

$$y(0) = 0,$$

alors il existe une constante C telle que

$$y(t) \leqq C t^N \int_0^t g(\tau) d\tau .$$

Si de plus $g(t)$ est non croissante, alors on a

$$ty'(t) \leqq C g(t)$$

avec une constante C.

LEMME 3. *Soit f une fonction dans $C^{p+1}([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})$ telle que $D_t^k f(0, x) = 0$ pour $0 \leqq k \leqq p$. Alors pour toutes fonctions continues v on a*

$$\left| \int_0^t f(\tau, x) v(\tau, x) d\tau\, dx \right| \leqq \delta \int_0^t \int \frac{|v(\tau, x)|^2}{\tau} d\tau\, dx + \frac{t^{2p+3}}{\delta} \int_0^t \int |D_t^{p+1} f(\tau, x)|^2 d\tau\, dx ,$$

δ étant un nombre quelconque positif.

THÉORÈME 2. *Pour toute $u \in C^\infty([0, T]; \mathcal{D}_{L^2})$ il existe une constante C indépendante de u telle que, pour un certain entier positif p,*

$$\|u(t)\|^2_{(s+1)} + \|D_t u(t)\|^2_{(s)} \leqq C \{ \|u(0)\|^2_{(s+p+5)} + \|D_t u(0)\|^2_{(s+p+4)} + \sum_{j=1}^{p} \|D_t^j f(0)\|^2_{(s+3)} + \int_0^t \|D_t^{p+1} f(\tau)\|^2_{(s+1)} d\tau \},$$

où $f = Lu$.

PREUVE. Soit

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{j=0}^{p+2} \frac{t^j}{j!} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x)$$

et désignons

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \bar{u}(t, x) .$$

En posant $L\tilde{u} = \tilde{f}$, on voit que $\tilde{f}$ s'annule pour $t=0$ avec leurs dérivées par raport à t jusqu'à l'ordre p. Comme dans la preuve du Théorème 1, l'égalité suivante est importante :

$$(8)\qquad -\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})$$

$$+(\langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$=\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$-\mathrm{Im}\int_0^t \{(i\langle D\rangle^s b_0\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(i\langle D\rangle^s b_0\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$+\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s(P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x\,;\ \lambda_1,\ D))\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})$$

$$+(\langle D\rangle^s(P-\partial_1\partial_2-iQ(t,\ x\,;\ \lambda_2,\ D))\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$-\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s c\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s c\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$-\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})\}\,d\tau\,.$$

En appliquant (3) au terme gauche de (8), on aura

$$(9)\qquad -\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})$$

$$+(\langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$\geqq \frac{1}{2}\{\|\partial_1\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+2\|\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2\}$$

$$-\mathrm{const.}\int_0^t \{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau\,.$$

D'autre part, le membre gauche de (8) se majore par

$$(10)\qquad \mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$+\mathrm{const.}\int_0^t \{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$

$$+\mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s(P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x\,;\ \lambda_1,\ D))\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})$$

$$+(\langle D\rangle^s(P-\partial_1\partial_2-iQ(t,\ x\,;\ \lambda_2,\ D))\tilde{u},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau\,.$$

Concernant le premier terme de (10), vu le Lemme 3 on a

$$(11)\qquad \mathrm{Im}\int_0^t \{(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\tilde{f},\ \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})\}\,d\tau$$

$$\leqq \delta\int_0^t \frac{1}{\tau}\{\|\partial_1 u(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau+\frac{2}{\delta}t^{2p+3}\int_0^t \|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s)}^2 d\tau\,.$$

Si l'on remarque notre Condition A_2 $(t_0=0)$, alors $P-\partial_2\partial_1-iQ(t, x; \lambda_1, D)$ s'écrit

$$\frac{1}{t}a(t, x; D)(\partial_1-\partial_2)+\frac{1}{t}(a(t, x; D)\circ(\lambda_2-\lambda_1)-a(t, x; D)(\lambda_2-\lambda_1))$$

où $a(t, x; D)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. On en déduit que le dérnier terme de (10) se majore par

$$\text{(12)} \qquad \text{const.}\Big[\int_0^t \frac{1}{\tau}\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$
$$+\int_0^t\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau\Big].$$

Résumons ce que l'on a obtenu: (10) (11) (12). Il en découle que

$$\text{(13)} \qquad -\mathrm{Im}\int_0^t\{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1\tilde{u}, \langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2\tilde{u}, \langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u})$$
$$+(\langle D\rangle^s\partial_1\tilde{u}, \langle D\rangle^s\tilde{u})+(\langle D\rangle^s\partial_2\tilde{u}, \langle D\rangle^s\tilde{u})\}\,d\tau$$
$$\leqq\text{const.}\Big[\int_0^t\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$
$$+\int_0^t\frac{1}{\tau}\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau\Big]$$
$$+\frac{2}{\delta}t^{2p+3}\int_0^t\|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s)}^2\,d\tau.$$

D'après (9) et (13) on a

$$\|\partial_1\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2$$
$$\leqq C_1\int_0^t\frac{1}{\tau}\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$
$$+C_2\int_0^t\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$
$$+C_3t^{2p+3}\int_0^t\|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s)}^2\,d\tau.$$

Posons

$$y(t)=\int_0^t\frac{1}{\tau}\{\|\partial_1\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(\tau)\|_{(s)}^2\}\,d\tau$$

et prenons p assez grand tel que $2p+3>C_1$ $(=C_1(s))$. Grâce au Lemme 2, il s'ensuit que

$$\text{(14)} \qquad \|\partial_1\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2+\|\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2\leqq\text{const.}\int_0^t\|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s)}^2\,d\tau,$$

de sorte que

$$\|u(t)\|_{(s)}^2+\|D_t u(t)\|_{(s)}^2$$
$$\leqq \text{const.}\left\{\int_0^t \|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s)}^2\, d\tau+\|\tilde{u}(t)\|_{(s+1)}^2\right\}.$$

Si l'on prend encore p assez grand tel que $2p+3>C_1$ $(=C_1(s+1))$, alors l'inégalité (12) reste vrai pour $s+1$. Donc on obtient

$$\|\tilde{u}(t)\|_{(s+1)}^2+\|D_t\tilde{u}(t)\|_{(s)}^2\leqq \text{const.}\int_0^t \|D_t^{p+1}\tilde{f}(\tau)\|_{(s+1)}^2 d\tau\,. \tag{15}$$

Comme

$$\tilde{u}(t,\ x)=u(t,\ x)-\sum_{j=0}^{p+2}\frac{t^j}{j\,!}\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0,\ x)\,,$$

et que

$$\tilde{f}=f-L\bar{u}\,,$$

on voit, d'après (15), que

$$\|u(t)\|_{(s+1)}^2+\|D_t u(t)\|_{(s)}^2$$
$$\leqq \text{const.}\left\{\sum_{j=0}^{p+2}\|D_t^j u(0)\|_{(s+1)}^2+\int_0^t \|D_t^{p+1}f(\tau)\|_{(s+1)}^2 d\tau\right.$$
$$\left.+\int_0^t \|(D_t^{p+1}L\bar{u})(\tau)\|_{(s+1)}^2 d\tau\right\}.$$

Il est facile de voir que

$$\|D_t^{k+2}u(0)\|_{(s+1)}^2$$
$$\leqq \text{const.}\{\|u(0)\|_{(s+k+3)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s+k+2)}^2+\sum_{j=0}^{k}\|D_t^j f(0)\|_{(s)}^{2(?)}\}, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots,$$

et que

$$\int_0^t \|(D_t^{p+1}L\bar{u})(\tau)\|_{(s+1)}^2 d\tau$$
$$\leqq \text{const.}\{\|u(0)\|_{(s+p+5)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s+p+4)}^2+\sum_{j=0}^{p}\|D_t^j f(0)\|_{(s+3)}^2\},$$

de sorte qu'on a l'inégalité désiré.

REMARQUE. Par le raisonnement pareil à la remarque après le Théorème 1, le Théorème 2 reste encore vrai pour L^*.

4. Inégarité d' énergie III.

Sous la Condition A_2 $(t_0=T)$ on a le

THÉORÈME 3. *Pour toute* $u\in C^\infty([0,\ T]\,;\ \mathcal{D}_{L^2})$ *il existe une constante* C *indépendante de* u *telle que*

$$\int_0^T (T-t)^{N-1}\|D_t^k u(t)\|_{(s)}^2 \leqq C\,\{\|u(0)\|_{(s+k+1)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s+k)}^2$$

$$+\sum_{j=1}^{k-3}\int_0^T \|D_t^j f(\tau)\|_{(s+j)}^2 d\tau+\int_0^T \|f(\tau)\|_{(s+k)}^2 d\tau\} \quad k=0,\ 1,\ \cdots,$$

où $f=Lu$ et que N est un entier dépendant de k et s.

PREUVE. D'abord, démontrons

$$\text{(16)} \qquad -\mathrm{Im}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s \partial_j u,\ \langle D\rangle^s u)dt$$

$$\geqq -\frac{T^N}{2}\|u(0)\|_{(s)}^2+\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|u(t)\|_{(s)}^2 dt$$

$$+\frac{\theta}{2}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|u(t)\|_{(s)}^2 dt-\text{const.}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|u(t)\|_{(s)}^2 dt,$$

où N est un entier positif et que θ est un nombre positif, qui seront déterminés ultérieurement. Dans cette preuve, on emploiera assez souvent cette notation "const." qui signifie une constante indépendante de N et θ. Or, en remarquant

$$-\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s \partial_j u,\ \langle D\rangle^s u)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{(T-t)^N e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)\Big\}$$

$$+\frac{N}{2}(T-t)^{N-1}e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)$$

$$+\frac{\theta}{2}(T-t)^N e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)$$

$$-\frac{1}{2i}(T-t)^N e^{-\theta t}((\lambda_j-\lambda_j^*)\langle D\rangle^s u,\ \langle D\rangle^s u)$$

$$-\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}((\lambda_j\langle D\rangle^s-\langle D\rangle^s \lambda_j)u,\ \langle D\rangle^s u),$$

on aura (16). Ensuite considérons

$$\text{(17)} \qquad -\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}\{(\langle D\rangle^s \partial_2\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s \partial_1 u)+(\langle D\rangle^s \partial_1\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s \partial_2 u)$$

$$+(\langle D\rangle^s \partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s \partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\}$$

$$=\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}\{(\langle D\rangle^s f,\ \langle D\rangle^s \partial_1 u)+(\langle D\rangle^s f,\ \langle D\rangle^s \partial_2 u)\}$$

$$-\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}\{(i\langle D\rangle^s b_0 \partial_1 u,\ \langle D\rangle^s \partial_1 u)+(i\langle D\rangle^s b_0 \partial_2 u,\ \langle D\rangle^s \partial_2 u)\}$$

$$+\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}\{(\langle D\rangle^s (P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x\ ;\ \lambda_1,\ D))u,\ \langle D\rangle^s \partial_1 u)$$

$$+(\langle D\rangle^s (P-\partial_1\partial_2-iQ(t,\ x\ ;\ \lambda_2,\ D))u,\ \langle D\rangle^s \partial_2 u)\}$$

$$-\mathrm{Im}\,(T-t)^N e^{-\theta t}\{(\langle D\rangle^s c u,\ \langle D\rangle^s \partial_1 u)+(\langle D\rangle^s c u,\ \langle D\rangle^s \partial_2 u)$$

$$-\operatorname{Im}(T-t)^N e^{-\theta t}(\langle D\rangle^s\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\,.$$

Intégrons (17) de 0 à T. D'où on deduit, compte tenu de (16)

$$\begin{aligned}
(18)\qquad & -\operatorname{Im}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\{(\langle D\rangle^s\partial_2\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u) \\
&\quad +(\langle D\rangle^s\partial_1\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s\partial_1 u)+(\langle D\rangle^s\partial_1 u,\ \langle D\rangle^s u)+(\langle D\rangle^s\partial_2 u,\ \langle D\rangle^s u)\}\,dt \\
&\geqq -\frac{T^N}{2}\{\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2+2\|u(0)\|_{(s)}^2\} \\
&\quad +\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+2\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&\quad +\frac{\theta}{2}\int_0^T (T-t)^{N}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+2\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&\quad -\text{const.}\int_0^T (T-t)^{N}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+2\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, compte tenu de la Condition A_2 $(t_0=T)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
P-\partial_2\partial_1-iQ(t,\ x\,;\ \lambda_1,\ D) &= \frac{1}{T-t}a(t,\ x\,;\ D)(\partial_1-\partial_2) \\
&\quad +\frac{1}{T-t}(a(t,\ x\,;\ D)\circ(\lambda_2-\lambda_1)-a(t,\ x\,;\ D)(\partial_2-\partial_1))
\end{aligned}$$

avec un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. On en déduit, d'après (17), que le membre gauche de (18) se majore par

$$\begin{aligned}
\text{const.}\Big[&\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&+\int_0^T (T-t)^{N-1} e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&+\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s)}^2 dt\Big],
\end{aligned}$$

ce qui, joint à (18), montre que

$$\begin{aligned}
(19)\qquad & N\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&\quad +\theta\int_0^T (T-t)^{N}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \\
&\leqq T^N\{\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2+\|u(0)\|_{(s)}^2\} \\
&\quad +C_1\int_0^T (T-t)^{N}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt
\end{aligned}$$

$$+C_2\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt$$

$$+\text{const.}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s)}^2 dt\,.$$

Posons θ et N assez grands tels que

$$\frac{\theta}{2}>C_1 \quad \text{et} \quad \frac{N}{2}>C_2 \quad (=C_2(s))\,,$$

d'où, d'après (19)

$$\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \tag{20}$$

$$+\frac{\theta}{2}\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\{\|\partial_1 u(t)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt$$

$$\leqq T^N\{\|\partial_1 u(0)\|_{(s)}^2+\|\partial_2 u(0)\|_{(s)}^2+\|u(0)\|_{(s)}^2\}$$

$$+C_1\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s)}^2 dt\,.$$

Comme

$$\|\partial_j u(t)\|_{(s)}^2 \geqq \frac{1}{2}\|D_t u(t)\|_{(s)}^2-\text{const.}\|u(t)\|_{(s+1)}^2\,,$$

l'inégalité (20) donne

$$\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\{\|D_t u(t)\|_{(s)}^2+\|u(t)\|_{(s)}^2\}\,dt \tag{21}$$

$$\leqq \text{const.}\ T^N\{\|u(0)\|_{(s+1)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s)}^2\}$$

$$+\text{const.}\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|u(t)\|_{(s+1)}^2 dt$$

$$+C_1\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s)}^2 dt\,.$$

En prenant encore N assez grand tel que $\frac{N}{2}>C_1(s+1)$, compte tenu de (20) on aura

$$\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|u(t)\|_{(s+1)}^2 dt$$

$$\leqq \text{const.}\ T^N\{\|u(0)\|_{(s+2)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s+1)}^2\}$$

$$+C_1\int_0^T (T-t)^N e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s+1)}^2 dt\,,$$

ce qui entraîne avec (21) que l'on a

$$\frac{N}{2}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|D_t u(t)\|_{(s)}^2 dt$$

$$\leqq \text{const.}\, T^N\{\|u(0)\|_{(s+2)}^2+\|D_t u(0)\|_{(s+1)}^2\}$$

$$+\text{const.}\int_0^T (T-t)^{N-1}e^{-\theta t}\|f(t)\|_{(s+1)}^2 dt\,.$$

Plus généralement, concernant l'estimation pour $D_t^l u$, $l\geqq 2$, utilisons l'équation $Lu=f$, et prenons N tel que

$$\frac{N}{2}>\max\,(C_2(s),\ C_2(s+1),\cdots,\ C_2(s+l))\,. \tag{22}$$

On en déduit le résultat.

Comme des résultats immédiats des Théorème 1, 2 et 3, on a les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution.

THÉORÈME 4. *Supposons que L satisfasse à la Condition* A_1 *ou* A_2 $(t_0=0)$. *Pour les données $f\in C^\infty([0, T]\,;\ \mathcal{D}_{L^2})$ et $u_0,\ u_1\in\mathcal{D}_{L^2}$ il existe une seule solution u dans $C^\infty([0, T]\,;\ \mathcal{D}_{L^2})$ du problème de Cauchy* (1) $(m=2)$.

Avant d'énoncer le Théorème 5 nous introduisons un espace. Soit X un espace vectoriel topologique et désignons par $L^2([0, T]\,;\ X)$ l'espace des fonctions mesurable et de carré sommable sur $[0, T]$ à valeurs dans X. $L^2_{\text{loc}}([0, T)\,;\ X)$ désigne l'espace des fonctions u telles que $\varphi(t)u$ appartiennent $L^2([0, T]\,;X)$ pour toutes les fonctions φ indéfiniment différentiables à support dant $[0, T)$.

THÉORÈME 5. *Supposons que L satisfasse à la Condition* A_2 $(t_0=T)$. *Etant données $u_0\in H_{(s+k+1)}(R^n)$, $u_1\in H_{(s+k)}(R^n)$ et $f\in L^2([0, T]\,;\ H_{(s+k)})$ telle que $D_t^j f\in L^2([0, T]\,;\ H_{(s+j)})$, $j=1, 2,\cdots, k-3$, on a une solution unique u dans $L^2_{\text{loc}}([0, T)\,;\ H_{(k)})$ telle que*

$$(T-t)^{(N-1)/2}D_t^j u\in L^2([0, T]\,;\ H_{(k)})\,,\qquad j=0, 1,\cdots, k\,,$$

où N est un entier positif dépendant de k et s.

REMARQUE. Posons $N=2p+1$. Si l'on peut choisir un entier non negatif p tel que $p+\frac{1}{2}>\max\,(C_2(s),\ C_2(s+1),\ \cdots,\ C_2(s+k+p))$ et $l=k+p$ dans (22), grâce à l'inégalité

$$\left(N-\frac{3}{2}\right)\int_0^T (T-t)^{N-3}\|u(t)\|_{(s)}^2 dt$$

$$\leqq T^{N-2}\|u(0)\|_{(s)}^2+2\int_0^T (T-t)^{N-1}\|u(t)\|_{(s)}^2 dt\,,$$

le Théorème 3 se récrit comme il suit :

THÉORÈME 3'. *Pour toute $u\in C^\infty([0, T]\,;\ \mathcal{D}_{L^2})$ il existe une constante C indépendante de u telle que*

$$\int_0^T \|D_t^k u(t)\|_{(s)}^2 dt \leqq C\{\|u(0)\|_{(s+p+k+1)}^2 + \|D_t u(0)\|_{(s+p+k)}^2$$

$$+\sum_{j=0}^{k+p-3} \|D_t^j f(0)\|_{(s+p+k-3-j)}^2 + \sum_{j=1}^{k+p-3} \int_0^T \|D_t^j f(t)\|_{(s+j)}^2 dt$$

$$+\int_0^T \|f(t)\|_{(s+k)}^2 dt\}.$$

Grâce au Théorème 3′ on a le même résultat que l'énoncé du Théorème 4 pour l'opérateur L satisfaisant à la Condition A_2 $(t_0=T)$.

5. Domaine d'influence.

Dans cette section, en utilisant le lemme de Mizohata et Ohya [9, Lemme 4] nous démontrons l'existence du domaine d'influence sous la Condition A_1. Commençons à définir le changement de coordonnées "space-like" de (t, x) à (t', x') tel que

$$t'=\varphi(t, x), \qquad x'_j=x_j \quad (1\leqq j\leqq n). \tag{23}$$

DÉFINITION 1. La transformation (23) est dite "space-like" quand

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \lambda_{\max}^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 > 0,$$

où

$$\lambda_{\max} = \sup_{(t,x)\in\Omega} \sup_{|\xi|=1} \lambda_j(t, x; \xi) \qquad \text{pour} \quad j=1, 2.$$

LEMME 4 (Mizohata et Ohya). *Si l'on fait le changement de coordonnées "space-like" (23) de (t, x) à (t', x'), alors ∂_j se transforme à*

$$(\varphi_t-\lambda_j(t, x; \varphi_x))\phi_j(t, x; D_t, D)(D_t-\mu_j(t, x; D)+e_j(t, x; D_t, D),$$

où $\phi_j(t, x; \tau, \xi)$ est homogène de degré 0 en (τ, ξ) tel que $\phi_1(t, x; \tau, \xi)\phi_2(t, x; \tau, \xi) \equiv 1$ et indéfiniment différentiable en dehors de $(\tau, \xi)=(0, 0)$; $e_j(t, x; D_t, D)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0.

Ce Lemme 4 montre que la Condition A_1 se conserve par le changement de coordonnées (23). En effet, les symboles de degré 2 et 1 de l'opérateur transformé de L sont, respectivement,

$$P(t, x; \varphi_t, \varphi_x)(\tau-\mu_1(t, x; \xi))(\tau-\mu_2(t, x; \xi)) \tag{24}$$

et

$$\frac{e_1(t, x; \tau, \xi)}{\phi_1(t, x; \tau, \xi)}(\varphi_t-\lambda_2(t, x; \varphi_x))(\tau-\mu_2(t, x; \xi)) \tag{25}$$

$$+\frac{e_2(t, x; \tau, \xi)}{\varphi_2(t, x; \tau, \xi)}(\varphi_t-\lambda_1(t, x; \varphi_x))(\tau-\mu_1(t, x; \xi))$$

$$+\tilde{a}(t, x; \tau, \xi)(\varphi_t-\lambda_1(t, x; \varphi_x))\phi_1(t, x; \tau, \xi)(\tau-\mu_1(t, x; \xi))$$
$$-\tilde{a}(t, x; \tau, \xi)(\varphi_t-\lambda_2(t, x; \varphi_x))\phi_2(t, x; \tau, \xi)(\tau-\mu_2(t, x; \xi)),$$

où $\tilde{a}(t, x; \tau, \xi)$ est la transformée de $a(t, x; \xi)$, ce qui montre notre énoncé. Or, nous obtenons le

THÉORÈME 6. *La solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Lu=0 \\ u(0, x)=u_0(x) \\ D_t u(0, x)=u_1(x) \end{cases}$$

a son support dans

$$\{x;\ \bigcup_{\xi} |x-\xi| \leqq \lambda_{\max}|t|,\ \xi \text{ parcourant le support de } (u_0(x), u_1(x))\}$$

pour chaque t.

Pour démontrer le Théorème 6 il suffit de prouver le théorème de l'unicité locale pour l'opérateur transformé par (23). Mais ceci est garanti par (24) et (25). Donc on a le Théorème 6.

Ajouté pendant la correction des épreuves.

Nous annonçons que récemment T. Nishitani [**17**] a considéré le même problème que nous.

Bibliographie

[1] J. Chazarain, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **24-1** (1974), 173-202.

[2] H. Flaschka et G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, Advances Math., **6** (1971), 347-379.

[3] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

[4] M. Itano et K. Yoshida, Energy inequalities and Cauchy problems for a system of linear partial differential equations, Hiroshima Math. J., **1** (1971), 75-108.

[4]' K. Yoshida, On the necessary condition for L^2-well posedness of the Cauchy problem, résumé de [4].

[5] T. Kano, On the Cauchy problem for equations with multiple characteristic roots, J. Math. Soc. Japan, **21** (1969), 164-188.

[6] A. Menikoff, The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Amer. J. Math., **97** (1975), 548-558.

[7] S. Mizohata, Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1961), 109-127.

[8] S. Mizohata, The theory of partial differential equations, Iwanami, Tokyo, 1965, (en japonais), traduction en anglais, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[9] S. Mizohata et Y. Ohya, Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Sér. A, **4** (1968), 511-526.

[10] S. Mizohata et Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II, Japanese J. Math., **40** (1971), 63-104.
[11] Y. Ohya, On E. E. Levi functions for hyperbolic equations with triple characteristics, Comm. Pure Appl. Math., **25** (1972), 257-263.
[12] Y. Ohya, Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples——Méthode directe de trouver la condition (généralisée) de E.E. Levi——, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **282** (1976), 1433-1436.
[13] O.A. Oleinik, On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 569-586.
[14] V.M. Petkov, Problème de Cauchy pour une classe d'équations hyperboliques non strictes à caractéristiques doubles, Serdica, Bulg. Mat. Publ., **1** (1975), 372-380 (en russe).
[15] K. Yoshida, On the Cauchy problem for linear hyperbolic differential equations with multiple characteristics and constant leading coefficients, Hiroshima Math. J., **3** (1973), 419-438.
[16] K. Yoshida, Energy inequalities and finite propagation speed of the Cauchy problem for hyperbolic equations with constantly multiple characteristics, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 561-565.
[17] T. Nishitani, Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, à paraître dans J. Math. Kyoto Univ., **17** (1977), 245-258.

Kiyoshi YOSHIDA
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Hiroshima
Hiroshima, Japon
et
Analyse Numérique
Université de Paris VI
4, place Jussieu
75230 Paris, France