

Majoration du nombre de classes d'un corps cubique cyclique de conducteur premier

Par C. MOSER et J. J. PAYAN

(Reçu le 8 août, 1980)

1. Motivations et notations.

La "conjecture" de Vandiver affirme que le nombre de classes h^+ du sous-corps réel maximal $\mathbf{Q}_0^{(p)}$ de $\mathbf{Q}^{(p)}$ corps cyclotomique d'indice premier p , n'est pas divisible par p . Ceci s'exprime dans la terminologie d'Iwasawa en disant que tout nombre premier p est ou bien régulier ou bien proprement irrégulier. On sait par ailleurs que le nombre de classes de toute extension intermédiaire de $\mathbf{Q}_0^{(p)}/\mathbf{Q}$ divise h^+ , il en résulte que la conjecture suivante est plus faible que celle de Vandiver: p ne divise pas le nombre de classes de l'extension cyclique réelle de degré premier l et de conducteur p pour tout nombre premier l diviseur de $p-1$.

Nous envisageons ici le cas $l=3$; p désigne désormais un nombre premier congru à 1 modulo 3 et K le corps cubique cyclique de conducteur p . On note χ un caractère cubique non principal modulo p , $\tau(\chi)$ la somme de Gauss attachée à p ($\tau(\chi) = \sum_{x \bmod p} \chi(x) e^{2i\pi x/p}$), $h(K)$ le nombre de classes d'idéaux de K , $R(K)$ son régulateur, $\zeta_K(s)$ la fonction zeta associée à K et $L(s, \chi)$ la fonction L associée au caractère χ .

2. Formule analytique du nombre de classes et minoration du régulateur.

La formule analytique du nombre de classes, appliquée au corps K de discriminant p^2 , s'écrit:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = |L(1, \chi)|^2 = \frac{4}{p} h(K) R(K)$$

avec $L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$. On peut pour plus de détails se reporter à [3] chapitre 3, § 3.

On va démontrer que $h(K)$ est strictement inférieur à p et utiliser le résultat suivant:

PROPOSITION. (M. N. Gras [1])

$$R(K) \geq \frac{3}{16} \left(\text{Log} \frac{p-3}{3} \right)^2.$$

3. Majoration de $L(1, \chi)$.

On transpose la démarche suivie dans [2] pour majorer $L(1, \chi)$ lorsque χ est un caractère pair réel.

LEMME 3.1. Soient $p > 2$ un nombre premier et A un entier naturel dont on note A^* le plus petit résidu positif modulo p . Si χ est un caractère primitif modulo p , on a

$$\left| \sum_{a=0}^A \sum_{n=-a}^{+a} \chi(n) \right| \leq (A^*+1) \left[\sqrt{p} - \frac{A^*+1}{\sqrt{p}} \right].$$

Si de plus χ est pair,

$$\left| \sum_{a=0}^A \sum_{n=0}^a \chi(n) \right| \leq \frac{1}{2} (A^*+1) \left[\sqrt{p} - \frac{A^*+1}{\sqrt{p}} \right].$$

DEMONSTRATION. La somme de Gauss $\tau(\chi)$ vérifie (voir par exemple [3] chapitre 1).

$$\sum_{x=1}^p \chi(x) \exp\left(\frac{2i\pi x n}{p}\right) = \bar{\chi}(n) \tau(\chi) \quad \text{pour tout entier } n$$

et

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{p}.$$

Posons pour simplifier $\varphi(A, \chi) = \tau(\chi) \sum_{a=0}^A \sum_{n=-a}^a \bar{\chi}(n)$; on établit facilement

$$\begin{aligned} \varphi(A, \chi) &= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \sum_{a=0}^A \sum_{n=-a}^a \exp\left(\frac{2i\pi x n}{p}\right) \\ &= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \left(\exp\frac{i\pi x}{p} - \exp\frac{-i\pi x}{p} \right)^{-1} \sum_{a=0}^A \left\{ \exp\left(\frac{i\pi x(2a+1)}{p}\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(\frac{-i\pi x(2a+1)}{p}\right) \right\} \\ &= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \frac{\sin^2 \frac{(A+1)x\pi}{p}}{\sin^2 \frac{\pi x}{p}} \end{aligned}$$

d'où immédiatement

$$|\varphi(A, \chi)| \leq \sum_{x=1}^{p-1} \frac{\sin^2 \frac{(A^*+1)\pi x}{p}}{\sin^2 \frac{\pi x}{p}}$$

mais

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{p-1} \frac{\sin^2\left(\frac{(A^*+1)\pi x}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{p}\right)} &= \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{a=0}^{A^*} \sum_{n=-a}^a \exp\frac{2i\pi n x}{p} \\ &= \sum_{a=0}^{A^*} \sum_{n=-a}^a \left\{ -1 + \sum_{x=1}^p \exp\frac{2i\pi n x}{p} \right\} \end{aligned}$$

soit encore

$$|\varphi(A, \chi)| \leq p(A^*+1) - (A^*+1)^2$$

d'où le lemme.

LEMME 3.2. Si $p > 100$ est un nombre premier congru à 1 modulo 3, on a

$$|L(1, \chi)| \leq \gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Log } p$$

où γ est la constante d'Euler.

DEMONSTRATION. Posons $S(-1) = S(0) = 0$ et pour $n \geq 1$, $S(n) = \sum_{a=0}^n \sum_{j=0}^a \chi(j)$; le lemme 1 montre que $|S(n)| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs $S(p-1) = S(p)$ résulte facilement de $\sum_{x=1}^p \chi(x) = 0$ et $S(p-1) = 0$ découle de l'égalité $\sum_{x=1}^{p-1} x\chi(x) = 0$ qui se démontre en utilisant $\chi(-1) = 1$ et le fait que la somme des x compris entre 0 et $p-1$, tels que $\chi(x)$ prenne une même valeur, est égale à $p \cdot \frac{p-1}{6}$. Remarquons encore que $|S(n)| \leq \frac{n(n+1)}{2}$, majoration meilleure que celle du lemme 1 pour $n < \sqrt{p}$.

De l'égalité $\chi(n) = S(n) - 2S(n-1) + S(n-2)$ valable pour $n \geq 1$, on tire

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Notons comme d'habitude $[\sqrt{p}]$ la partie entière de \sqrt{p} et posons

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)} \\ \Sigma_2 &= \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)} \\ \Sigma_3 &= \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

On va majorer séparément $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$ et $|\Sigma_3|$ pour obtenir l'assertion du lemme 3.2.

L'inégalité $|S(n)| \leq \frac{n(n+1)}{2}$ entraîne

$$|\Sigma_1| \leq \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n+2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n}.$$

La formule d'Euler-Maclaurin entraîne pour $m \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \leq \gamma + \text{Log } m + \frac{1}{2m}$$

d'où

$$|\Sigma_1| \leq \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{Log } p + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]}$$

un calcul élémentaire prouve que

$$\frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} < \frac{5}{2\sqrt{p}} \text{ pour } p > 16.$$

D'où pour $p > 16$: $|\Sigma_1| < \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{Log } p + \frac{5}{2\sqrt{p}}$.

Pour $|\Sigma_2|$, le lemme 3.1 donne:

$$|\Sigma_2| \leq \sqrt{p} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)}$$

soit encore:

$$|\Sigma_2| < 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

On voit facilement que

$$\sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)} > \text{Log} \frac{p}{2+[\sqrt{p}]} - \frac{1}{2+[\sqrt{p}]}.$$

En rassemblant ces inégalités, on obtient

$$|\Sigma_2| \leq 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \text{Log } p + \frac{3}{p} \text{ pour tout } p.$$

En utilisant la majoration $|S(n)| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3$, on obtient

$$|\Sigma_3| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3 \sum_{n=1+p}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

soit encore

$$|\Sigma_3| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3 \frac{1}{(p+1)(p+2)} < \frac{1}{8\sqrt{p}}.$$

Des majorations obtenues pour $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$ et $|\Sigma_3|$ on déduit pour $p > 16$:

$$|L(1, \chi)| < \gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Log } p + \frac{13 - 4 \text{Log } p + \frac{24}{\sqrt{p}}}{8\sqrt{p}}$$

pour $p > 100$ on a $\frac{13}{4} + \frac{6}{\sqrt{p}} < \text{Log } p$; d'où l'énoncé du lemme.

4. Majoration de $h(K)$.

En reprenant la proposition du §2 et la majoration du lemme 3.2, on obtient pour $p > 100$

$$h(K) < \frac{p}{3} \frac{(2\gamma - 1 + \text{Log } p)^2}{\left[\text{Log } p - \text{Log } 3 + \text{Log} \left(1 - \frac{3}{p} \right) \right]^2} < \frac{2p}{3}.$$

D'où compte tenu des valeurs de $h(K)$ connues pour $p < 100$ (voir par exemple les tables de [1]) le :

THEOREME. $h(K) < \frac{2p}{3},$

et son

COROLLAIRE. Si K est un corps cubique cyclique de conducteur premier p , alors p ne divise pas le nombre de classes de K .

REMARQUE. Si p est un nombre premier congru à 1 modulo 4, le nombre de classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ est

$$h_p = \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{L(1, \chi)}{\text{Log } \varepsilon_p}$$

où χ est le caractère de Legendre $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ et où ε_p est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. Or, on a $\varepsilon_p > \sqrt{p} - 1$. D'après le lemme 3.2, on a donc pour $p > 100$

$$h_p < \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\text{Log } p + 2\gamma - 1}{2 \text{Log}(\sqrt{p} - 1)} < \sqrt{p}$$

et on sait pour $p < 100$, $h_p = 1$. En particulier h_p est premier à p , résultat qui semblait déjà connu de Gauss.

REMARQUE. Marie-Nicole Gras, que nous remercions, nous a communiqué au vu de sa table [1] que la valeur de $L(1, \chi)$ pour $p = 643$ est 2,782 alors que $\gamma - \frac{1}{2} + \text{Log } 643 = 3,310$; ceci donne une idée de la majoration fournie par le lemme 3.2.

Bibliographie

- [1] M.N. Gras, Méthodes algorithmiques de calcul numérique du nombre de classes et des unités des extensions cubiques cycliques de \mathbf{Q} , J. Reine Angew. Math., 227 (1975).
- [2] Loo-Keng Hua, On the least solution of Pell's equation, Amer. J. Math., (1942).
- [3] Serge Lang, Cyclotomic Fields, G.T.M. 59, Springer Verlag, 1978.

C. MOSER
Institut Fourier
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin-d'Hères
France

J. J. PAYAN
Institut Fourier
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin-d'Hères
France