J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I
28 (1964), 209-221

Sur les Champs de Tensions

Takayuki Nôno

(Reçu le 21 septembre 1964)

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier les problèmes aux limites pour les champs de tensions sur les sous-domaines finis de l'espace euclidien, dont les bords sont constitués par un nombre fini de composants. Quelques résultats sont obtenus en utilisant ceux qui ont été établis pour les champs harmoniques sur les variétés finies riemanniennes par G. F. Duff et D. C. Spencer [2]. Ils mettent en évidence quelque relation entre les champs de tensions et les propriétés homologiques de la variété finie. Cette étude se rattache à celles de Y. Yamamoto [10], G. Rieder [8] et M. E. Gurtin [3].

1. Définitions et notations.—Soit E^n l'espace euclidien de dimension n pourvu du système de coordonnées cartésiennes assigné x^i; dans tout ce qui suit, V désignera une sous-variété finie de E^n, c'est-à-dire un sous-domaine compact qui est une variété à bord régulier(1), régulièrement plongée dans E^n. Autrement dit, c'est une variété riemannienne à bord régulier, connexe, compacte, de dimension n et différentiable de classe C^∞, dont le bord ∂V est une variété sans bord de dimension $n-1$ et de classe C^∞, qui est régulièrement plongée dans E^n et qui est constituée par un nombre fini de composants. La métrique de V sera induite par celle de E^n et le bord ∂V est lui-même une variété riemannienne de classe C^∞ pour la métrique induite par celle de V. Pour la variété V, on pourra utiliser les résultats relatifs à l'homologie des variétés différéntiables ([6], [7]).

ϕ étant une forme différentielle de classe C^∞ définie dans un voisinage de ∂V, nous désignerons par $t\phi$ (*composante tangentielle*) la forme induite par ϕ sur ∂V ([4]). En outre, ϕ étant une forme différentielle de degré p et de classe C^∞ définie sur ∂V, on dit, originellement doué de A. W. Tucker, que ϕ est *admissible* comme une composante tangentielle des formes fermées sur V, si elle est fermée sur ∂V et a des périodes nulles pour tous les p-cycles dans ∂V qui bordent dans V ([2]).

$R_p(V)$ désignant le nombre de Betti de degré p de la variété V, et $R_p(V, \partial V)$ le nombre de Betti de degré p de V (mod ∂V), on sait, d'après le théorème de dualité par S. Lefschetz, que $R_p(V, \partial V) = R_{n-p}(V)$.

Pour les définitions et les notations relatives aux formes différentielles, nous adoptons toujours celles de G. de Rham [7]. Pour la théorie des formes

(1) Pour une définition plus précise du bord régulier, voir, par exemple, J. Lelong-Ferrand [4]. Plus généralement, pour la topologie des variétés différentiables, voir J. R. Munkres [6].

différentielles sur les variétés riemanniennes à bord, on pourra consulter [1], [2] et [4].

2. Champs de tensions.—Nous appellerons *champ de tension* de degré $p(0 \leqq p \leqq n)$ sur V un champ de vecteurs τ, défini et de classe C^∞ sur V, dont les composantes cartésiennes τ^i sont des formes différentielles de degré p satisfaisant à la condition:

$$(2.1) \qquad d\tau^i = 0, \quad d(x^{[i}\tau^{j]}) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Soit θ un champ de vecteurs, défini et de classe C^∞ sur le bord ∂V, dont les composantes cartésiennes θ^i sont des formes différentielle de degré p, nous dirons que le champ θ est *admissible*, si, pour ses composantes θ^i, les θ^i et $x^{[i}\theta^{j]}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ sont tous admissibles pour des composantes tangentielles des formes fermées sur V. Il est évident que la composant tangentielle $t\tau$ d'un champ de tensions τ est admissible sur ∂V. Soit τ un champ de tensions de degré p sur V. Alors, les composantes τ^i de τ ont les expressions suivantes:

$$(2.2) \qquad \tau^i = *\left(\frac{1}{q!}\tau^i{}_{k_1\cdots k_q} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}\right),$$

où $\tau^i{}_{k_1\cdots k_q}$ est antisymétrique en les k_i, $*\alpha$ désignera la forme adjointe à la forme α et $q = n - p$. Par un calcul tensoriel facile utilisant les formules:

$$(2.3) \qquad **\alpha = (-1)^{(n+1)p}\alpha, \text{ si la forme } \alpha \text{ est de degré } p;$$

$$(2.4) \qquad *(dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}) = \frac{1}{q!} e^{k_1 \cdots k_p}{}_{j_1 \cdots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q},$$

$$(2.5) \qquad \delta\alpha = (-1)^{np+n+1} *d*\alpha, \text{ si } \alpha \text{ est de degré } p,$$

nous aurons les expressions suivantes:

$$(2.6) \qquad d\tau^i = *\left((-1)^{q-1}\frac{1}{(q-1)!}\nabla_j \tau^{ij}{}_{k_1\cdots k_{q-1}} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{q-1}}\right),$$

$$(2.7) \qquad \delta\tau^i = *\left((-1)^{q-1}\frac{1}{q!}\nabla_{[k}\tau^i{}_{k_1\cdots k_q]} dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}\right),$$

$$(2.8) \qquad d(x^{[i}\tau^{j]}) = *\left((-1)^{q-1}\frac{1}{(q-1)!}\tau^{[ji]}{}_{k_1\cdots k_{q-1}} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{q-1}}\right),$$

$$\text{pourvu que} \quad d\tau^i = 0.$$

D'où on peut énoncer:

LEMME 1.—(i) *$d\tau^i=0$, si et seulement si $\nabla_j \tau^{ij}{}_{k_1\cdots k_{q-1}}=0$,* (ii) *$\delta\tau^i=0$, si et seulement si $\nabla_{[k}\tau^i{}_{k_1\cdots k_q]}=0$,* (iii) *$d\tau^i=0$ et $d(x^{[i}\tau^{j]})=0$, si et seulement si $\nabla_j \tau^{ij}{}_{k_1\cdots k_{q-1}}=0$* et *$\tau^{[ij]}{}_{k_1\cdots k_{q-1}}=0$.*

Donc, si $q\geqq 2$, i.e., si $0\leqq p\leqq n-2$, alors on a:

$$\tau^{[ij]kk_1\cdots k_{q-2}}=\tau^{i(jk)k_1\cdots k_{q-2}}=0,$$

d'où on peut voir que

$$\tau^{ijkk_1\cdots k_{q-2}}=0,$$

c'est-à-dire que les champs de tensions de degré p $(0\leqq p\leqq n-2)$ sont tous nuls. Et pour $p=n$, tous les formes τ^i satisfont à la condition (2.1). Donc, désormais nous supposerons $p=n-1$; c'est une généralisation du champ de tensions ordinairement considéré dans la théorie d'élasticité.

Maintenant, pour étudier les champs de tensions de degré $n-1$ ayant les valeurs limites données sur ∂V, nous allons utiliser le théorème 3 dans [2] et le théorème 6 dans [1], et, ultérieurement, le théorème 4 dans [2] et le théorème 4 dans [1].

Nous supposerons que le champ θ est admissible sur ∂V, c'est-à-dire que pour ses composantes θ^i dans le système de coordonnées cartésiennes assigné x^i, les θ^i et $x^{[i}\theta^{j]}$ sont tous admissibles. En appliquant le théorème 3 dans [2] à chaque composante θ^i, nous voyons que, sur la variété V il existe toujours un champ harmonique, c'est-à-dire une solution de $d\sigma^i=\delta\sigma^i=0$, détérminée d'une manière unique, par la donnée de sa valeur limite tangentielle admissible θ^i sur ∂V et de ses périodes arbitrairement assignées relativement aux $R_1(V)$ $(n-1)$-cycles relatifs donnés d'avance de V (mod ∂V), dont aucune combinaison linéaire n'est homologue à zero. Par la même manière, nous avons les champs harmoniques $\rho^{ij}(=-\rho^{ji})$ sur V pour la valeur limite tangentielle admissible $x^{[i}\theta^{j]}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

Pour un énoncé plus précis, soient $C_\kappa\big(\kappa=1,2,\cdots,R_1(V)\big)$ les $(n-1)$-cycles rélatifs indépendants donnés d'avance de V (mod ∂V), et a^i_κ, $b^{ij}_\kappa=-b^{ji}_\kappa$ $\big(i,j=1,2,\cdots,n;\ \kappa=1,2,\cdots,R_1(V)\big)$ les nombres réels arbitrairement assignés. Alors on a:

$$d\sigma^i=\delta\sigma^i=0,\quad t\sigma^i=\theta^i \quad\text{et}\quad \int_{C_\kappa}\sigma^i=a^i_\kappa; \tag{2.9}$$

et puis

$$d\rho^{ij}=\delta\rho^{ij}=0,\quad t\rho^{ij}=x^{[i}\theta^{j]}\quad\text{et}\quad \int_{C_\kappa}\rho^{ij}=b^{ij}_\kappa. \tag{2.10}$$

Sopposons que τ est un champ de tensions de degré $n-1$, dont les composantes τ^i dans le système de coordonnées cartésiennes satisfont à la condition:

$$t\tau^i=\theta^i, \quad \int_{C_\kappa}\tau^i=a_\kappa^i \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa}x^{[i}\tau^{j]}=b_\kappa^{ij}. \tag{2.11}$$

En tenant compte de (2.1), (2.9) et (2.11) on a:

$$d(\tau^i-\sigma^i)=0, \quad t(\tau^i-\sigma^i)=0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa}(\tau^i-\sigma^i)=0;$$

d'où, en utilisant le théorème 6 dans [1], on a une forme α^i de degré $n-2$ telle que

$$\tau^i=\sigma^i+d\alpha^i, \quad t\alpha^i=\xi^i, \tag{2.12}$$

où ξ^i peut être choisie arbitrairement, en sorte que $d\xi^i=0$ et $\int_{\partial C_\kappa}\xi^i=0$, c'est-à-dire que ξ^i soit admissible sur ∂V. De meme, d'après (2.1), (2.10) et (2.11) on a:

$$d(x^{[i}\tau^{j]}-\rho^{ij})=0, \quad t(x^{[i}\tau^{j]}-\rho^{ij})=0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa}(x^{[i}\tau^{j]}-\rho^{ij})=0; \tag{2.13}$$

donc, par le théorème 6 dans [1], on a une forme $\beta^{ij}(=-\beta^{ji})$ telle que

$$x^{[i}\tau^{j]}=\rho^{ij}+d\beta^{ij}, \quad t\beta^{ij}=\eta^{ij},$$

où η^{ij} peut être choisie arbitrairement, en sorte que $d\eta^{ij}=0$ et $\int_{\partial C_\kappa}\eta^{ij}=0$, c'est-à-dire que η^{ij} soit admissible sur ∂V.

En tenant compte du fait:

$$d(x^{[i}\alpha^{j]})=dx^{[i}\wedge\alpha^{j]}+x^{[i}\wedge d\alpha^{j]},$$

d'après (2.12) et (2.13) nous avons:

$$dx^{[i}\wedge\alpha^{j]}=\nu^{ij}+d\gamma^{ij}, \tag{2.14}$$

en posant:

$$\nu^{ij}=x^{[i}\sigma^{j]}-\rho^{ij}, \tag{2.15}$$

$$\gamma^{ij}=x^{[i}\alpha^{j]}-\beta^{ij}; \tag{2.16}$$

et alors on voit que

$$(2.17) \qquad t\nu^{ij} = 0 \quad \text{et} \quad t\gamma^{ij} = \zeta^{ij},$$

où $\zeta^{ij} = x^{[i}\xi^{j]} - \eta^{ij}$, ξ^i et η^{ij} étant les valeurs limites admissibles arbitrairement choisies. Particulièrement nous pourrons choisir $\xi^i = 0$ et $\zeta^{ij} = 0$.

On peut donc énoncer:

Lemme 2.—*Pour que τ soit un champ de tensions de degré $n-1$, dont les composantes cartésiennes τ^i satisfont à la condition* (2.11), *il faut et il suffiit que*

$$\tau^i = \sigma^i + d\alpha^i,$$

où α^i sont des formes quelconques de degré $n-2$ aux valeurs limites tangentielles admissibles $t\alpha^i = \xi^i$, de plus, telles que

$$dx^{[i} \wedge \alpha^{j]} = \nu^{ij} + d\gamma^{ij},$$

où γ^{ij} sont des formes quelconques de degré $n-2$ aux valeurs limites $t\gamma^{ij} = \zeta^{ij}$, ζ^{ij} étant choisies en sorte que $x^{[i}\xi^{j]} - \zeta^{ij}$ soitent les valeurs limites tangentielles admissibles sur ∂V.

Ensuite, nous allons considérer la relation:

$$(2.18) \qquad dx^{[i} \wedge \alpha^{j]} = \phi^{ij}, \quad (\phi^{ij} = -\phi^{ji}),$$

où α^j sont des formes différentielles de degré $n-2$, et ϕ^{ij} sont celles de degré $n-1$. Pour α^j et ϕ^{ij} on a ses expressions:

$$(2.19) \qquad \alpha^j = *\Big(\frac{1}{2!}\alpha^j{}_{kl}\, dx^k \wedge dx^l\Big),$$

$$(2.20) \qquad \phi^{ij} = *(\phi^{ij}{}_k\, dx^k),$$

où $\alpha^j{}_{kl}$ est antisymétriques en k et l, $\phi^{ij}{}_k$ est antisymétriques en i et j. Par un calcul facile utilisant les formules (2.3), (2.4) et (2.5), nous voyons que la relation (2.18) est équivalente à:

$$(2.21) \qquad \alpha^{[ij]k} = \phi^{ijk}.$$

De plus, nous pourrons vérifier que cette relation équivaut à:

$$(2.22) \qquad \alpha^{ijk} = \phi^{ijk} + \phi^{kij} + \phi^{kji}.$$

Nous pouvons donc énoncer:

Lemme 3.—*α^j et ϕ^{ij} étant donné respectivement par* (2.19) *et* (2.20), *pour que $dx^{[i} \wedge \alpha^{j]} = \phi^{ij}$, il faut et il suffit que*

$$\alpha^{ijk} = \phi^{ijk} + \phi^{kij} + \phi^{kji}.$$

3. Expressions tensorielles des champs de tensions.—Nous allons donner les expressions tensorielles en cordonnées locales générales, pour les résultats obtenus dans le paragraphe 2. Soient σ, ρ, α, γ, $\cdots$, etc. les champs définis et de classe C^∞ sur V, dont les composantes cartésiennes sont respectivement σ^i, ρ^{ij}, α^i, $\gamma^{ij}, \cdots$, etc. qui sont les formes considérées dans le paragraphe 2. Par les mêmes notations: σ^i, ρ^{ij}, α^i, $\gamma^{ij}, \cdots$, etc., on désignera les composantes locales en coordonnées locales générales. Alors les équations tensorielles obtenues dans le paragraphe 2 sont réalisées aussi dans les systèmes de coordonnées locales générales. Ses expressions locales sont respectivement données par:

$$\sigma^i = *(\sigma^i{}_k dx^k), \tag{3.1}$$

$$\rho^{ij} = *(\rho^{ij}{}_k dx^k), \tag{3.2}$$

$$\nu^{ij} = *(\nu^{ij}{}_k dx^k), \tag{3.3}$$

$$\gamma^{ij} = *\left(\frac{1}{2!}\gamma^{ij}{}_{kl}\, dx^k \wedge dx^l\right); \tag{3.4}$$

les expressions locales de α^i et ϕ^{ij} ont été déjà données par (2.19) et (2.20) respectivement.

De (2.19) on a:

$$d\alpha^i = *(-\nabla_j \alpha^{ij}{}_k dx^k); \tag{3.5}$$

en tenant compte de (2.2), (3.1) et (3.5), la relation (2.12) s'exprime sous la forme suivante:

$$\tau^i{}_k = \sigma^i{}_k - \nabla_j \alpha^{ij}{}_k. \tag{3.6}$$

De même, en correspondant à (2.15), d'après (3.1), (3.2) et (3.3) on a:

$$\nu^{ij}{}_k = v^{[i}\sigma^{j}{}_k{}^{]} - \rho^{ij}{}_k, \tag{3.7}$$

où v^i désignera le vecteur, dont les composantes dans le système de coordonnées cartésiennes assigné sont x^i. De plus, la relation: $\phi^{ij} = \nu^{ij} + d\gamma^{ij}$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\phi^{ij}{}_k = \nu^{ij}{}_k - \nabla_l \gamma^{ijl}{}_k. \tag{3.8}$$

Car, dans ce cas, par le lemme 1 nous avons naturellement:

$$\tau^{[ij]} = 0, \tag{3.9}$$

il résulte de (3.6) que

$$\tau^{ij} = \sigma^{(ij)} + \nabla_k \alpha^{(ij)k}. \tag{3.10}$$

D'après (2.22) on voit que

$$\nabla_k \alpha^{(ij)k} = 2\nabla_k \phi^{k(ij)}; \tag{3.11}$$

posant (3.11) dans (3.10), on obtient

$$\tau^{ij} = \sigma^{(ij)} + 2\nabla_k \phi^{k(ij)}. \tag{3.12}$$

Par un calcul facile, de (3.7), (3.8) et (3.12) il vient:

$$\tau^{ij} = n\sigma^{(ij)} + v^k \nabla_k \sigma^{(ij)} - v^{(i} \nabla_k \sigma^{|k|j)} - 2\nabla_k \rho^{k(ij)} + 2\nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}; \tag{3.13}$$

ou, dans une autre forme,

$$\tau^{ij} = n\sigma^{(ij)} + v^k \nabla_k \sigma^{(ij)} - v^{(i} \nabla^{j)} \sigma - 2\nabla^{(i} \rho^{j)} + 2\nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}, \tag{3.13'}$$

où $\sigma = \sigma^k{}_k$ et $\rho^i = \rho^{ki}{}_k$.

Si on pose:

$$\omega^{ij} = 2\nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}, \tag{3.14}$$

il est évident que

$$\nabla_j \omega^{ij} = 0, \quad \omega^{[ij]} = 0,$$

c'est-à-dire que le champ, dont les composantes locales sont données par

$$\omega^i = *(\omega^i{}_k dx^k),$$

est un champ de tensions sur V. Nous poserons:

$$\chi^{kijl} = \gamma^{kijl} + \gamma^{jlki}, \tag{3.15}$$

alors on voit que

$$\omega^{ij} = \nabla_k \nabla_l \chi^{kijl}, \tag{3.16}$$

où $\chi^{kijl}=-\chi^{ikjl}=-\chi^{kilj}=\chi^{jlki}$. Les fonctions χ^{kijl} sont ce qu'on appelle *fonctions de tensions* (voir C. Truesdell [9], p. 6).

De plus, si on pose:

$$w_{r_1\cdots r_{n-2}\,s_1\cdots s_{n-2}}=\left(\frac{1}{2!}\right)^2 e_{kir_1\cdots r_{n-2}}e_{jls_1\cdots s_{n-2}}\chi^{kijl}, \tag{3.17}$$

on a la formule suivante:

$$\omega^{ij}=\left(\frac{1}{(n-2)!}\right)^2 e^{kir_1\cdots r_{n-2}}e^{jls_1\cdots s_{n-2}}\nabla_k\nabla_l w_{r_1\cdots r_{n-2}s_1\cdots s_{n-2}}, \tag{3.18}$$

où $w_{r_1\cdots r_{n-2}s_1\cdots s_{n-2}}$ est antisymétrique en les r_i, et aussi en les s_i, et $w_{r_1\cdots r_{n-2}s_1\cdots s_{n-2}}=w_{s_1\cdots s_{n-2}r_1\cdots r_{n-2}}$, (voir [5], p. 191, pour les fonctions de tensions dans E^n).

Ensuite, nous poserons

$$\pi^{ij}=n\sigma^{(ij)}+v^k\nabla_k\sigma^{(ij)}-v^{(i}\nabla^{j)}\sigma-2\nabla^{(i}\rho^{j)}, \tag{3.19}$$

$$\text{où}\quad \sigma=\sigma^k{}_k \quad\text{et}\quad \rho^i=\rho^{ki}{}_k,$$

d'après la construction précédente de solution, nous pourons conclure qu'il existe un champ de tensions π, dont les composantes locales sont données par (3.19), satisfaisant à la condition limite $t\pi=\theta$, et telle que $\int_{C_\kappa}\pi^i=a^i_\kappa$ et $\int_{C_\kappa}x^{[i}\pi^{j]}=b^{ij}_\kappa$ dans le système de coordonnés cartésiennes assigné. De plus, un calcul facile permet d'établir:

$$n\nabla^l\nabla_l\pi^{ij}+2\nabla^i\nabla^j\pi^l{}_l=0, \tag{3.20}$$

$$\text{i.e.,}\qquad n\Delta\pi^i-2{*d}(\nabla^i\pi^l{}_l)=0;$$

par conséquent,

$$\delta\Delta\pi^i=\delta d\delta\pi^i=0,\quad ({*\Delta\pi^i})_i=0. \tag{3.21}$$

Ainsi nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 1.—*Soient C_κ $(\kappa=1, 2,\cdots, R_1(V))$ les $(n-1)$-cycles rélatifs indépendants donnés d'avance de V (mod ∂V), et a^i_κ, $b^{ij}_\kappa=-b^{ji}_\kappa$ $(i, j=1, 2,\cdots, n;\ \kappa=1, 2,\cdots, R_1(V))$ les nombres réels arbitrairement assignées. Alors il existe un champ de tensions π tel que $t\pi=\theta$, étant θ admissible et assigné sur ∂V, et tel le suivant:*

$$\int_{C_\kappa} \pi^i = a^i_\kappa \quad et \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\pi^{j]} = b^{ij}_\kappa,$$

dans le système de coordonnées cartésinnes. Tout champ de tensions τ satisfaisant aux conditions énoncées s'exprime sous la forme: $\tau = \pi + \omega$, où ω est quelque champ de tensions, dont les composantes locales ω^{ij} sont données par:

$$\omega^{ij} = \nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}, \quad \gamma^{kijl} = -\gamma^{ikjl} = -\gamma^{kilj},$$

tel que $t\gamma^{ki} = 0$ dans le système de coordonées cartésiennes, où $\gamma^{ki} = *\Big(\frac{1}{2!}\gamma^{ki}{}_{jl}\, dx^j \wedge dx^l\Big)$. Le champ de tensions π satisfait aux conditions:

$$n\Delta\pi^i - 2*d(\nabla^i \pi^l{}_l) = 0.$$

Dans le théorème 1, si $\theta = 0$, $a^i_\kappa = 0$ et $b^{ij}_\kappa = 0$, alors le champ particulier de tensions π est nul, par conséquent on a $\tau = \omega$. Inversement, si ω est un champ de tensions, dont les composantes locales ω^{ij} sont données par:

$$\omega^{ij} = \nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}, \quad \gamma^{kijl} = -\gamma^{kilj} = -\gamma^{ikjl},$$

tel que

$$t\gamma^{ki} = 0, \quad \text{où} \quad \gamma^{ki} = *\Big(\frac{1}{2!}\gamma^{ki}{}_{jl}\, dx^j \wedge dx^l\Big),$$

par la considération dans le paragraphe 2, on voit que, pour le champ ω,

$$t\omega = 0, \quad \int_{C_\kappa} \omega^i = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\omega^{j]} = 0.$$

4. Champs de tensions aux autres conditions limites. — Soient $C_\kappa(\kappa = 1, 2, \cdots, R_{n-1}(V))$ $R_{n-1}(V)$ $(n-1)$-cycles absolus indépendants assignés d'avance de V, a^i_κ, $b^{ij}_\kappa = -b^{ji}_\kappa$ les nombres réels arbitrairement donnés et θ la valeur limite tangentielle admissible sur ∂V, satisfaisant les conditions: $\int_{A_\kappa} \theta^i = a^i_\kappa$ et $\int_{A_\kappa} x^{[i}\theta^{j]} = b^{ij}_\kappa$ pour chaque $(n-1)$-cycle A_κ dans ∂V homologues à C_κ, dans le système de coordonnées assigné. Nous nons proposons de trouver des champs de tensions τ aux conditions limites:

$$t\tau = \theta, \quad \int_{C_\kappa} \tau^i = a^i_\kappa \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\tau^{j]} = b^{ij}_\kappa, \tag{4.1}$$

dans le système de coordonnées cartésiennes.

Par le théorème 4 dans [2], nous avons les champs harmoniques σ^i et ρ^{ij} détérminées, d'une manière unique, respectivement par les conditions:

$$t*\sigma^i = 0, \quad \int_{C_\kappa} \sigma^i = a^i_\kappa, \tag{4.2}$$

et

$$t*\rho^{ij} = 0, \quad \int_{C_\kappa} \rho^{ij} = b^{ij}_\kappa, \tag{4.3}$$

dans le système précédent de coordonnées cartésiennes.

Alors $\tau^i - \sigma^i$ et $x^{[i}\tau^{j]} - \rho^{ij}$ sont, respectivement, les formes fermées satisfaisant aux:

$$\int_{C_\kappa} (\tau^i - \sigma^i) = 0, \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} (x^{[i}\tau^{j]} - \rho^{ij}) = 0; \tag{4.4}$$

d'où, par le théorème 4 dans [1], on voit que

$$\tau^i = \sigma^i + d\alpha^i, \tag{4.5}$$

$$x^{[i}\tau^{j]} = \rho^{ij} + d\beta^{ij}. \tag{4.6}$$

De la même manière dans les paragraphes 2 et 3, nous obtiendrons les résultats analogues à ceux-là. De (4.5) et (4.6) on peut construire le champ de tensions π:

$$\pi^{ij} = n\sigma^{(ij)} + v^k \nabla_k \sigma^{(ij)} - v^{(i}\nabla^{j)}\sigma - 2\nabla^{(i}\rho^{j)}, \tag{4.7}$$

$$\text{où} \quad \sigma = \sigma^k{}_k \quad \text{et} \quad \rho^j = \rho^{kj}{}_k.$$

Et il est évident que

$$\int_{C_\kappa} \pi^i = a^i_\kappa \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\pi^{j]} = b^{ij}_\kappa. \tag{4.8}$$

Soit $\omega = \tau - \pi$, alors, d'après (4.1) et (4.8) on sait que ω est le champ de tensions satisfaisant à la condition:

$$t\omega = \theta - t\pi, \quad \int_{C_\kappa} \omega^i = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\omega^{j]} = 0. \tag{4.9}$$

Car $d\psi^i = 0$ et $\int_{A_\kappa} \psi^i = 0$, où $\psi^i = \theta^i - t\pi^i$; pour chaque indice i, en appliquant le théorème 4 dans [1] à la forme ψ^i sur le bord ∂V, nous avons une forme ξ^i telle que $\psi^i = d\xi^i$. Soit $\bar{\xi}^i$ un prolongement régulier (de classe C^∞) de ξ^i sur V, alors on a:

$$d(\omega^i - d\bar{\xi}^i) = 0, \quad t(\omega^i - d\bar{\xi}^i) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\kappa} (\omega^i - d\bar{\xi}^i) = 0.$$

D'où, par le théorème 6 dans [1], nous avons une forme α^i telle que

$$\omega^i - d\bar{\xi}^i = d\alpha^i, \quad t\alpha^i = 0;$$

autrement dit, une forme $\bar{\alpha}^i$ telle que

$$\omega^i = d\bar{\alpha}^i, \quad t\bar{\alpha}^i = \xi^i. \tag{4.10}$$

De même, nous avons une forme $\bar{\beta}^{ij}$ telle que

$$x^{[i}\omega^{j]} = d\bar{\beta}^{ij}, \quad t\bar{\beta}^{ij} = \eta^{ij}, \tag{4.11}$$

où η^{ij} étant une forme quelconque satisfaisant à la condition: $x^{[i}\psi^{j]} = d\eta^{ij}$.

De (4.10), et (4.11), il résulte que

$$x^{[i}d\bar{\alpha}^{j]} = d\bar{\beta}^{ij}; \tag{4.12}$$

on peut vérifier que la condition (4.12) est admissible pour les valeurs limites $t\omega^i = \psi^i$. Ainsi nous voyons que les composantes ω^{ij} de ω s'expriment sous la forme:

$$\omega^{ij} = 2\nabla_k \nabla_l \bar{\gamma}^{k(ij)l} \quad \text{où} \quad t\bar{\gamma}^{ij} = x^{[i}\xi^{j]} - \eta^{ij}. \tag{4.13}$$

Donc nous pouvons énoncer:

THÉORÈME 2.—*Il existe toujours un champ de tensions π aux conditions*:

$$\int_{C_\kappa} \pi^i = a^i_\kappa \quad \textit{et} \quad \int_{C_\kappa} x^{[i}\pi^{j]} = b^{ij}_\kappa.$$

Tout champ de tensions τ aux conditions limites (4.1) *s'exprime sous la forme suivante*:

$$\tau = \pi + \omega,$$

$$\textit{où} \quad \omega^{ij} = 2\nabla_k \nabla_l \gamma^{k(ij)l}, \quad t\omega = \theta - t\pi;$$

le champ de tensions ω est caractérisé par les conditions:

$$\int_{C_\kappa} \omega^i = \int_{C_\kappa} x^{[i}\omega^{j]} = 0.$$

De plus, on a:

$$n\Delta\pi^i - 2*d(\nabla^i \pi^l{}_l) = 0.$$

Il me semble que ce théorème est une généralisation des résultats obtenus par M. E. Gurtin [3]. En suivant son idée dans [3], nous pourons directement construire un exemple pour le théorème 2. Soient $B_\iota(\iota=0, 1, 2,\cdots, m)$ les balles dans l'espace euclidien E^n de dimension n, dont les centres sont $P_\iota(x_\iota^i)$, telles que $B_\iota \subset B_0$ et $B_\iota \cap B_\kappa = \phi(\iota \neq \kappa)$ pour $\iota, \kappa = 1, 2,\cdots, m$. Ici, V désignera le sous-domaine $B_0 - \bigcup_{\iota=1}^m B_\iota$, alors $\partial V = \bigcup_{\iota=0}^m S_\iota$, où $S_\iota = \partial B_\iota$. On sait que, dans ce cas, $S_1,\cdots, S_m$ sont $(n-1)$-cycles absolus indépendants et $R_{n-1}(V) = m$. Nous construirons les fonctions suivantes:

$$\tau_\kappa^{ij} = \frac{1}{v_n} \frac{1}{r_\kappa^{n+2}} \Big\{ \sum_{k=1}^n c_\kappa^{ik}(x^j - x_\kappa^j)(x^k - x_\kappa^k) + \sum_{k=1}^n c_\kappa^{jk}(x^i - x_\kappa^i)(x^k - x_\kappa^k) - \sum_{k=1}^n a_\kappa^k (x^k - x_\kappa^k)(x^i - x_\kappa^i)(x^j - x_\kappa^j) \Big\}, \tag{4.14}$$

où v_n désigne le volume de la balle de rayon 1 dans E^n; $r_\kappa^2 = \sum_{i=1}^n (x^i - x_\kappa^i)^2$, et $c_\kappa^{ij} = b_\kappa^{ij} - x_\kappa^{[i} a_\kappa^{j]}$; a_κ^k et $b_\kappa^{ik}(= - b_\kappa^{ki})$ étant les nombres réels assignés d'avance. Nous poserons:

$$\tau^{ij} = \sum_{\kappa=1}^m \tau_\kappa{}^{ij}, \tag{4.15}$$

par un calcul facile nous pourons vérifier:

$$\nabla_j \tau^{ij} = 0, \quad \tau^{ij} = \tau^{ji}, \tag{4.16}$$

et de plus,

$$\int_{S_\kappa} \tau^i = a_\kappa^i, \quad \int_{S_\kappa} x^{[i}\tau^{j]} = b_\kappa^{ij}, \quad (\kappa = 1, 2,\cdots, m). \tag{4.17}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. F. Duff, *Differential forms in manifolds with boundary*, Ann. of Math., **56** (1952), 115-127.
[2] G. F. Duff and D. C. Spencer, *Harmonic tensors on Riemannian manifolds with boundary*, Ann. of Math., **56** (1952), 128-156.
[3] M. E. Gurtin, *A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **13** (1963) 321-329.
[4] J. Lelong-Ferrand, *Quelques propriétés des groupes de transformations infinitésimales d'une variété riemannienne*, Bull. Soc. Math. Belgique, **8** (1956), 15-30.
[5] K. Morinaga and T. Nôno, *On stress-functions in general coordinates*, J. Sci. Hiroshima Univ., (A), **14** (1950), 181-194.
[6] J. R. Munkres, Elementary differential topology, Ann. of Math. Studies, 54, Princeton, Princeton Univ. Press, 1963.
[7] G. De Rham, Variétés differentiables, Paris, Hermann, 1955.
[8] G. Rieder, *Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktion*, Abh. Braunschweig, Wiss. Ges. **7** (1960), 4-65.
[9] C. Truesdell, *Invariant and complete stress functions for general continua*, Arch. Rational Mech. Anal., **4** (1959/60), 1-29.
[10] Y. Yamamoto, *Theory of elasticity and biharmonic tensors*, RAAG Memoirs, **2** (1958), 165-190.

Institut de Mathématiques
Université de Hiroshima