HIROSHIMA MATH. J.
1 (1971), 339-348

Sur le Balayage Relatif aux Noyaux Composés

Masayuki ITO

(Received September 20, 1971)

Introduction

Soit R^n l'espace euclidien à n dimensions ($n\geqq 1$). On rappelle qu'un noyau de convolution sur R^n est une mesure de Radon positive dans R^n.

Soit $(T_i)_{i=1}^m$ un système de laplaciens généralisés et symétriques dans R^n; supposons que, quel que soit $0<i\leqq m$, il existe un noyau de convolution N_i sur R^n tel que $T_i*N_i=-\varepsilon$, où la signe $*$ représente la convolution au sens des distributions dans R^n et ε est la mesure de Dirac à l'origine 0. Si la convolution $N=N_1*N_2*\cdots*N_m$ a un sens, on pourra considérer le balayage de type nouveau relatif au système $(N_i)_{i=1}^m$ (ou au noyau N), qui est analogue au cas du noyau d'ordre α ($\alpha>2$) (cf. [4]). Pour un ouvert Ω de R^n et pour un point x de R^n, $(\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)})_{i=1}^m$ désigne la système des mesures balayées de ε_x sur $C\Omega$ relativement au système $(N_i)_{i=1}^m$, où ε_x est la measure de Dirac au point x.

On dit que la distribution $T=T_1*T_2*\cdots*T_m$ est résolutive pour le balayage si, quel que soit Ω un ouvert borné de R^n et quel que soit $(f_i)_{i=1}^m$ un système de fonctions boréliennes et bornées sur $C\Omega$,

$$T*h(\cdot\ ;(f_i)_{i=1}^m,\ \Omega)=0$$

au sens des distributions dans Ω, où

$$h(x;(f_i)_{i=1}^m,\ \Omega)=\sum_{i=1}^m\int f_i(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}(y).$$

Cette note sera consacrée à l'étude de la résolutivité de T pour le balayage. Notre résultat principal est le suivant:

Pour que T soit résolutive pour le balayage, il faut et il suffit que, quel que soit $2\leqq i\leqq m$, T_i soit de la forme

$$T_i=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}-c_i\varepsilon,$$

où $a_{jk}^{(i)}=a_{kj}^{(i)}$ et $c_i\geqq 0$ sont constantes.

1. Le balayage

Commençons d'abord avec la définition d'un laplacien généralisé sur R^n, d'après C. S. Herz [2].

Une distribution T dans R^n est, par définition, un laplacien généralisé sur R^n si, quelle que soit $\varphi \in C_K^\infty$, $T(\varphi)\leqq 0$ dès que $\varphi(0)=\max\{\varphi(x);\ x\in R^n\}$, où C_K^∞ désigne l'espace de fonctions infiniment dérivables dans R^n, à valeurs réelles et à support compact. Il est symétrique si, quelle que soit $\varphi\in C_K^\infty$, $T(\varphi)=T(\check{\varphi})$, où $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$.

En combinant quelques résultats de [1] et de [2], on peut dire qu'un noyau de Dirichlet N sur R^n est un noyau de convolution sur R^n tel qu'il existe un laplacien généralisé et symétrique T sur R^n qui vérifie l'équation $T*N=-\varepsilon$. T est alors uniquement déterminé, et, réciproquement, pour un laplacien généralisé et symétrique T sur R^n, il existe tout au plus un noyau de Dirichlet N sur R^n qui vérifie l'équation $T*N=-\varepsilon$. On dit donc que T est le laplacien généralisé associé au noyau N.

D'après [5], on connaît la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit N un noyau de Dirichlet sur R^n. Alors, pour une mesure de Radon positive μ dans R^n et à masse totale finie, et pour un ouvert ω de R^n, il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans R^n, portée par $\bar{\omega}$, et une seule telle que l'on ait:*

(a) *$N*\mu\geqq N*\mu'_\omega$ au sens des mesures dans R^n.*

(b) *$N*\mu=N*\mu'_\omega$ au sens des mesures dans ω.*

(c) *Quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans R^n et portée par $\bar{\omega}$, $N*\mu'_\omega\leqq N*\nu$ au sens des mesures dans R^n dès que $N*\nu\geqq N*\mu$ au sens des mesures dans ω.*

On dit que μ'_ω est la mesure balayée de μ sur ω relativement au noyau N. Pour une mesure de Radon réelle μ dans R^n et avec $|\mu|(R^n)<+\infty$, $\mu'_\omega=(\mu^+)'_\omega-(\mu^-)'_\omega$ s'appelle aussi la mesure balayée de μ sur ω relativement au noyau N.

Etant donné un noyau de Dirichlet N sur R^n, il existe l'espace de Dirichlet spécial D sur R^n dont le noyau est égal à N (cf. [1]). Sa norme est désignée par $\|\cdot\|$. Soit μ une mesure de Radon positive dans R^n et à masse totale finie. Alors, pour un fermé F de R^n et pour une suite décroissante $(\omega_m)_{m=1}^\infty$ d'ouverts de R^n avec $\bigcap_{m=1}^\infty \omega_m=F$, la suite (μ'_{ω_m}) converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ'_F dans R^n. En effet, quelle que soit f de C_K^+ et quels que soient $m\leqq p$,

$$\|N*\mu'_{\omega_m}*f-N*\mu'_{\omega_p}*f\|^2\leqq\|N*\mu'_{\omega_m}*f\|^2-\|N*\mu'_{\omega_p}*f\|^2,$$

où C_K^+ est la totalité des fonctions numériques, continues, non-négatives dans R^n et à support compact. $N*\mu'_{\omega_m}*f\in D$ résulte de l'inégalité $\int d\mu'_{\omega_m}\leqq\int d\mu<+\infty$. La suite $(N*\mu'_{\omega_m}*f)$ converge fortement dans D avec $m\to\infty$, et (μ'_{ω_m}) est vaguement bornée. Donc il existe une mesure de Radon positive μ'_F dans R^n, portée par F telle que, quelle que soit f de C_K, la suite $(N*\mu'_{\omega_m}*f)$ converge fortement vers $N*\mu'_F*f$ dans D avec $m\to\infty$. Donc (μ'_{ω_m}) converge vaguement vers μ'_F avec $m\to\infty$.

La mesure μ'_F ne dépend pas de la suite (ω_m) d'ouverts de R^n avec $\bigcap_{m=1}^{\infty} \omega_m = F$, car, quel que soit ω un ouvert de R^n avec $\omega \supset F$, $N*\mu'_F \leqq N*\mu'_\omega$ au sens des mesures dans R^n et N satisfait au principe d'unicité [1].

La mesure μ'_F ainsi obtenue s'appelle la mesure balayée de μ sur F relativement au noyau N.

Proposition 1.2. [2] *Soient N un noyau de Dirichlet sur R^n et Ω un ouvert de de R^n; notons $\varepsilon'_{x,C\Omega}$ la mesure balayée de ε_x sur $C\Omega$ relativement au noyau N. Alors, pour une fonction f borélienne et bornée sur $C\Omega$, la fonction*

$$h_f(x) = \int f(y)\, d\varepsilon'_{x,C\Omega}(y)$$

est borélienne et bornée dans R^n.

Pour montrer cette proposition, on prépare d'abord le lemme suivant:

Lemme 1.3. *Soient N un noyau de Dirichlet sur R^n et ω un ouvert de R^n. Alors, pour une fonction φ finie, continue, non-négative dans R^n et telle que $N*\varphi$ soit bornée, la fonction*

$$h(x) = \int N*\varphi(y)\, d\varepsilon'_{x,\omega}(y)$$

est semi-continue inférieurement dans R^n.

En effet, soit $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de R^n et qui converge vers un point x_0 de R^n avec $k \to \infty$. Alors la suite $(\varepsilon'_{x_k,\omega})_{k=1}^{\infty}$ est vaguement bornée, car $\int d\varepsilon'_{x_k,\omega} \leqq 1$. Soit μ' un point vaguement adhérent de $(\varepsilon'_{x_k,\omega})$; alors μ' est portée par $\bar{\omega}$ et on a, au sens des mesures, $N*\varepsilon_{x_0} \geqq N*\mu'$ dans R^n et $N*\varepsilon_{x_0} = N*\mu'$ dans ω. D'après la définition de la mesure balayée, on a $N*\mu' \geqq N*\varepsilon'_{x_0,\omega}$ dans R^n, et par suite,

$$\varliminf_{k\to\infty} \int N*\varphi(y)\, d\varepsilon'_{x_k,\omega}(y) = \varliminf_{k\to\infty} \int \varphi(y)\, d(N*\varepsilon'_{x_k,\omega})(y)$$

$$\geqq \int \varphi(y)\, d(N*\varepsilon'_{x_0,\omega})(y) = \int N*\varphi(y)\, d\varepsilon'_{x_0,\omega}(y),$$

d'où h est semi-continue inférieurement dans R^n.

Remarque 1.4. Dans le lemme précédent, l'application $(C\omega)^i \ni x \to \varepsilon'_{x,\omega}$ n'est pas toujours vaguement continue, où $(C\omega)^i$ est l'intérieur de $C\omega$.

Démonstration de la proposition 1.2. Si $f = N*\varphi$, où φ est une fonction

---

(1) Cela signifie que, quelles que soient μ et ν mesures de Radon positives dans R^n et à masse totale finie, $\mu = \nu$ dès que $N*\mu = N*\nu$.

(2) Cette proposition a lieu pour un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini en remplacement de R^n.

qui vérifie la condition du lemme 1.3, h_f est alors borélienne et bornée dans R^n, car pour une suite décroissante (ω_m) d'ouverts de R^n avec $\bigcap_{m=1}^{\infty}\omega_m = C\Omega$, la fonction

$$h_f^{(m)}(x) = \int f(y)\, d\varepsilon'_{x,\omega_m}(y)$$

est semi-continue inférieurement dans R^n, et donc, $h_f = \lim_{m\to\infty} h_f^{(m)}$ est borélienne et bornée dans R^n. L'ensemble $\{N*(\varphi_1 - \varphi_2) \in C_K;\ \varphi_i$ vérifie la condition du lemme 1.3 $(i=1, 2)\}$ étant dense dans C_K (cf. la proposition 1.1), on obtient que si $f \in C_K$, h_f est aussi borélienne et bornée dans R^n. D'aprés la méthode usuelle, notre proposition a lieu.

PROPOSITION 1.5. *Soient N un noyau de Dirichlet sur R^n et F un fermé de R^n. Alors, pour une mesure de Radon positive μ dans R^n et à masse totale finie, μ'_F est de la forme*

$$\int \varphi\, d\mu'_F = \iint \varphi(z)\, d\varepsilon'_{y,F}(z)\, d\mu(y),$$

où $\varphi \in C_K$.

DÉMONSTRATION. D'après la définition du balayage sur un fermé, il suffit de voir que, pour un ouvert ω de R^n,

$$\int \varphi\, d\mu'_\omega = \iint \varphi(z)\, d\varepsilon'_{y,\omega}(z)\, d\mu(y).$$

D'après la proposition 1.2, pour une fonction φ de C_K^+, l'intégrale $\iint \varphi(z)\, d\varepsilon'_{y,\omega}(z)\, d\mu(y)$ a un sens. Considérons la fonctionnelle

$$C_K \ni \varphi \to \iint \varphi(z)\, d\varepsilon'_{y,\omega}(z)\, d\mu(y);$$

alors elle est évidemment positive et linéaire, et donc, cela est une mesure de Radon positive dans R^n et s'écrit μ''_ω. On a

$$N*\mu''_\omega = \int N*\varepsilon'_{y,\omega}\, d\mu(y),$$

et par suite, au sens des mesures, $N*\mu \geqq N*\mu''_\omega$ dans R^n et $N*\mu = N*\mu''_\omega$ dans ω. La mesure $\varepsilon'_{y,\omega}$ étant la limite vague de $(\varepsilon'_{y,\omega_m})$, où (ω_m) est une suite d'ouverts de R^n telle que $\bar{\omega}_m \subset \omega$ et $\bigcup_{m=1}^{\infty}\omega_m = \omega$ (cf. [5]), on a

$$N*\mu'' = \lim_{m\to\infty} \int N*\varepsilon'_{y,\omega_m}\, d\mu(y),$$

car $(N*\varepsilon'_{y,\omega_m})$ est croissante. Il est évident que $N*\mu'_\omega \geqq N*\mu''_{\omega_m}$, d'où $N*\mu'_\omega \geqq N*\mu''_\omega$. D'après la définition de μ'_ω, on a $\mu'_\omega = \mu''_\omega$.

PROPOSITION 1.6. *Soient N et F les mêmes que ci-dessus; alors, pour une fonction φ de C_K^+, on a*

$$N*\varphi'_F = \left(\int N*\varphi(y)d\varepsilon'_{x,F}(y)\right)dx,$$

où φ'_F est la mesure balayée de φdx sur F relativement au noyau N.

DÉMONSTRATION. Il est bien connu que $N*\varphi'_F$ est absolument continue par rapport à dx (cf. [1]). Sa densité s'écrit aussi $N*\varphi'_F$. On a, quelle que soit ψ de C_K^+,

$$\int N*\varphi'_F(x)\psi(x)dx = \int N*\varphi(x)d\psi'_F(x) = \iint N*\varphi(y)d\varepsilon'_{x,F}(y)\psi(x)dx$$

(cf. [1] et la proposition précédente). La fonction ψ étant quelconque, on arrive à notre proposition.

D'après le lemme 1.3 et la proposition 1.6, la densité de $N*\varphi'_F$ peut être considérée comme une fonction borélinne.

Soit $(N_i)_{i=1}^m$ un système des noyaux de Dirichlet sur R^n; supposons toujours que la convolution $N=N_1*N_2*\cdots*N_m$ a un sens. Alors la transformation de Fourier de N est définie et elle est une fonction localement sommable dans R^n. Donc N s'annule à l'infini (3).

Définissons le balayage relatif au système $(N_i)_{i=1}^m$. Soient $(\mu_i)_{i=1}^m$ un système des mesures de Radon positives dans R^n et à masse totale finie, et ω un ouvert de R^n tel que $C\omega$ soit compact. Alors $\mu_{1,\omega}^{(1)}$ désigne la mesure balayée de μ_1 sur ω relativement au noyau N_1. On désigne ensuite par $\mu_{2,\omega}^{(2)}$ la mesure balayée de la measure $(N_1*\mu_1 - N_2*\mu_{1,\omega}^{(1)}) + \mu_2$ sur ω relativement au noyau N_2. On définit, par récurrence, $\mu_{k,\omega}^{(k)}$ de la manière suivant:

$\mu_{k,\omega}^{(k)}$ est la mesure balayée de la mesure

$$\sum_{j=1}^{k-1} N_j*N_{j+1}*\cdots*N_{k-1}*\mu_j - \sum_{j=1}^{k-1} N_j*N_{j+1}*\cdots*N_{k-1}*\mu_{j,\omega}^{(j)} + \mu_k$$

sur ω relativement au noyau N_k. On obtient ainsi un système $(\mu_{i,\omega}^{(i)})_{i=1}^m$ des mesures de Radon positives dans R^n, qui s'appelle le système balayé de $(\mu_i)_{i=1}^m$ relativement au système $(N_i)_{i=1}^m$. Cette terminologie est résonable d'après le théorème suivant:

THÉORÈME 1.7. *Soient $(N_i)_{i=1}^m$, ω, $(\mu_i)_{i=1}^m$ et $(\mu_{i,\omega}^{(i)})$ les mêmes que ci-dessus; alors $\mu_{i,\omega}^{(i)}$ est portée par $\bar{\omega}$ et on a, au sens des mesures,*

$$\sum_{i=1}^m N_i*N_{i+1}*\cdots*N_m*\mu_i \geqq \sum_{i=1}^m N_i*N_{i+1}*\cdots*N_m*\mu_{i,\omega}^{(i)} \quad \textit{dans } R^n,$$

$$\sum_{i=1}^m N_i*N_{i+1}*\cdots*N_m*\mu_i = \sum_{i=1}^m N_i*N_{i+1}*\cdots*N_m*\mu_{i,\omega}^{(i)} \quad \textit{dans } \omega,$$

(3) Cela signifie que, quelle que soit φ de C_K, $N*\varphi(x) \to 0$ avec $x \to \infty$.

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_i*N_{i+1}*\cdots*N_k*\mu_i = \sum_{i=1}^{k} N_i*N_{i+1}*\cdots*N_k*\mu_{i,\omega}^{(i)} \quad dans\ \omega,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$N_1*\mu_1 = N_1*\mu_{1,\omega}^{(1)} \quad dans\ \omega.$$

Cela est évident d'après la définition du système $(\mu_{i,\omega}^{(i)})$. En particulier, pour une mesure de Radon positive μ dans R^n et à masse totale finie, le système balayé de $(\mu, 0, \cdots, 0)$ sur ω relativement au système $(N_i)_{i=1}^m$ s'appelle simplement celui de μ sur ω relativement à $(N_i)_{i=1}^\infty$, qui s'écrit $(\mu_\omega^{(i)})$. Pour un fermé F de R^n dont le complément est borné, on peut définir immédiatement $(\mu_{i,F}^{(i)})$ et $(\mu_F^{(i)})$ de la même manière que ci-dessus.

Proposition 1.8. *Soient $(N_i)_{i=1}^m$ un système des noyaux de Dirichlet sur R^n et F un fermé de R^n dont le complément est borné. Alors, pour un système $(f_i)_{i=1}^m$ des fonctions boréliennes et bornnées sur F, la fonction*

$$h(x; (f_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^{m} \int f_i(y) d\varepsilon_{x,F}^{(i)}(y)$$

est borélienne et bornée dans R^n.

Démonstration. On a, quel que soit $1 \leqq k \leqq m$,

$$\int f_k d\varepsilon_{x,F}^{(k)} = \iint f_k(z) d\varepsilon'_{k,y,F}(z) d(N_1*N_2*\cdots*N_{k-1}*\varepsilon_x - \sum_{i=1}^{k-1} N_i*\cdots N_{k-1}*\varepsilon_{x,F}^{(i)})(y),$$

où $\varepsilon'_{k,y,F}$ est la mesure balayée de ε_y sur F relativement au noyau N_K. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.5. D'après proposition 1.2 et par récurrence, on a notre proposition.

Remarque 1.9. Soient $(N_i)_{i=1}^m$ et F les mêmes que ci-dessus. Pour une mesure de Radon positive μ dans R^n et à masse totale finie, $\mu_F^{(i)}$ est de la forme

$$\int \varphi d\mu_F^{(i)} = \iint \varphi(z) d\varepsilon_{y,F}^{(i)} d\mu(y).$$

En effet, on a, quelle que soit φ de C_K^+,

$$\int \varphi d\mu_F^{(i)} = \iint \varphi(z) d\varepsilon'_{i,y,F}(z) d(N_1*N_2*\cdots N_{i-1}*\mu - \sum_{j=1}^{i-1} N_j*\cdots*N_{i-1}*\mu_F^{(j)})(y),$$

et donc, d'après la proposition 1.5 et par récurrence, on peut voir facilement notre remarque.

2. La résolutivité de $T_1*T_2*\cdots*T_m$

Soit T un laplacien généralisé et symétrique sur R^n. Pour une fonction

φ de C_K^∞, le théorème de Levy-Khinchine permet à T de s'écrire

$$T(\varphi) = -c\int \varphi\, dx + L(\varphi) + \int (\varphi(x) - \varphi(0))\, d\sigma(x),$$

où c, L et σ sont respectivement une constante non-négative, un opérateur différentiel elliptique à coefficients constants et une mesure de Radon positive dans $R^n - \{0\}$, symétrique par rapport à 0 avec

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\, d\sigma(x) < +\infty.$$

Proposition 2.1. *Soit* $(T_i)_{i=1}^m$ *un système des laplaciens généralisés et symétriques sur* R^n. *Alors la convolution* $T = T_1 * T_2 * \cdots * T_m$ *a un sens.*

Cela résulte immédiatement du théorème de Levy-Khinchine.

Mentionnons encore la définition de la résolutivité pour le balayage. Soit T_i un laplacien généralisé associé au noyau de Dirichlet N_i sur $R^n (i = 1, 2, \dots, m)$, où m est un entier positif; supposons que la convolution $N_1 * N_2 * \cdots * N_m$ a un sens. Alors, pour un système $(f_i)_{i=1}^m$ des fonctions boréliennes et bornées sur le complément d'un ouvert borné Ω de R^n, la fonction

$$h(x; (f_i)_{i=1}^m, \Omega) = \sum_{i=1}^m \int f_i(y)\, d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$$

est borélienne et bornée dans R^n, où $(\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)})_{i=1}^m$ est le système balayé de ε_x relativement au système $(N_i)_{i=1}^m$. Donc la convolution

$$T * h(\cdot\, , (f_i)_{i=1}^m, \Omega)$$

est définie au sens des distributions, où $T = T_1 * T_2 * \cdots * T_m$. On dit que T est résolutive pour le balayage si, quel que soit Ω un ouvert borné de R^n et quel que soit $(f_i)_{i=1}^m$ un système des fonctions boréliennes et bornées sur $C\Omega$, la convolution précédente est égale à 0 dans Ω.

Théorèm 2.2. *Soit* T_i *un laplacien généralisé associé au noyau de Dirichlet* N_i *sur* $R^n (i = 1, 2, \dots, m)$; *supposons que* $N_1 * N_2 * \cdots * N_m$ *a un sens. Pour que* $T = T_1 * \cdots * T_m$ *soit résolutive pour le balayage, il faut et il suffit que, quel que soit* $2 \leq i \leq m$, T_i *soit un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint d'ordre 2 à coefficients constants, ou* $T_i = -c_i \varepsilon$.

Démonstration. On montre d'abord que la condition est suffisante. Soient Ω un ouvert borné de R^n et f une fonction borélienne et bornée sur $C\Omega$; on pose alors

$$h_f^{(i)}(x) = \int f(y)\, d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Il suffit de montrer que lorsque f est une fonction de C_K^∞, $T*h_f^{(i)}=0$ au sens des distributions dans Ω, car f est considérée d'être définie partout dans R^n et, pour une suite (φ_m) des fonctions non-négatives de C_K^∞, portées par un compact fixé et qui tend vers ε avec $m\to\infty$, on a

$$\lim_{m\to\infty}\int f*\varphi_m(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}=\int f(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(i)}.$$

On a

$$h_f^{(i)}(x)=\iint N_i*(-T_i*f)(z)d\varepsilon'_{i,y,C\Omega}(z)d(N_1*\cdots*N_{i-1}*\varepsilon_x-\sum_{k=1}^{i-1}N_k*\cdots*N_{i-1}*\varepsilon_{x,C\Omega}^{(k)})(y).$$

D'après la proposition 1.6 et du fait que $h_f^{(i)}$ est portée par un compact, on a, quelle que soit φ de C_K,

$$\iiint\varphi(x)N_i*(-T_i*f)(z)d\varepsilon'_{i,y,C\Omega}(z)d(N_1*\cdots*N_{i-1}*\varepsilon_x)(y)dx$$

$$=\int\varphi(x)d(N_1*\cdots N_i*(g_i)'_{i,C\Omega})(x),$$

où $(g_i)'_{i,C\Omega}$ est la mesure balayée de $(-T_i*f)dx$ sur $C\Omega$ relativement au noyau N_i. Ayant $\int d|(g_i)'_{i,C\Omega}|<+\infty$, car $\int|-T_i*f|dx<+\infty$, et $N_1*\cdots*N_i$ s'annulant à l'infini, la convolution $T*(N_1*\cdots*N_i*(g_i)'_{i,C\Omega})$ a un sens et on a

$$T*(N_1*\cdots*N_i*(g_i)'_{i,C\Omega})=T_{i+1}*\cdots*T_m*(g_i)'_{i,C\Omega}=0$$

au sens des distributions dans Ω, car le support de T_k $(2\leqq k\leqq m)$ est égal à $\{0\}$ et $(g_i)'_{i,C\Omega}$ est portée par $C\Omega$. D'autre part, quel que soit k $(1\leqq k\leqq i-1)$,

$$\iint f(z)d\varepsilon'_{i,y,C\Omega}(z)d(N_k*\cdots*N_{i-1}*\varepsilon_{x,C\Omega}^{(k)})(y)$$

$$=\int N_k*\cdots*N_{i-1}*h_i(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(k)}(y),$$

où

$$h_i(x)=\int f(y)d\varepsilon'_{i,x,C\Omega}(y).$$

La fonction h_i étant borélienne et bornée dans R^n à support compact, la fonction $N_k*\cdots*N_{i-1}*h_i$ est aussi borélienne et bornée dans R^n. Par conséquent, si $T*h_f^{(1)}=0$ au sens des distributions dans Ω, on obtient, par récurrence, que la condition est suffisante. On a, quelle que soit φ de C_K,

$$\int\varphi(x)h_f^{(1)}(x)dx=\int\varphi(x)d(N_1*(g_1)'_{1,C\Omega})(x),$$

et par suite,

$$T*h_f^{(1)}=0$$

au sens des distributions dans Ω, d'où la condition est suffisante.

Réciproquement, on suppose ensuite que T est résolutive pour le balayage. Soit Ω un ouvert borné de R^n. Pour que la condition soit nécessaire, il suffit de montrer que, quel que soit $k\leqq i\leqq m$ et quelle que soit φ une fonction de C_K^+ et portée par $C\Omega$,

$$T*N_1*N_2*\cdots*N_i*\varphi=0$$

au sens des distributions dans Ω. En effet, il en résulte que

$$T_{i+1}*\cdots*T_m*\varphi=0$$

au sens des distributions dans Ω et donc, le support de $T_{i+1}*\cdots*T_m$ est égal à $\{0\}$, d'où le support de $T_k=\{0\}$ $(k=2,\cdots,m)$. On connaît bien, d'après le théorème de Levy-Khinchine, que si le support de T_k est $\{0\}$, T_k est un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint d'ordre 2 à coefficients constants, ou $T_k=-c_k\varepsilon$.

Soit φ une fonction de C_K^+ et portée par $C\Omega$; posons $f=N_i*\varphi$. On a alors

$$T*h_f^{(i)}=0$$

au sens des distributions dans Ω, où $h_f^{(i)}$ est la meme que ci-dessus. Notons aussi

$$h_i(x)=\int f(y)d\varepsilon'_{i,x,C\Omega}(y).$$

Il résulte de la même manière que

$$\begin{aligned}h_f^{(i)}(x)&=N_1*N_2*\cdots N_i*\varphi(x)-\sum_{k=1}^{i-1}\int N_k*\cdots*N_{i-1}*h_i(y)d\varepsilon_{x,C\Omega}^{(k)}(y)\\&=N_1*N_2*\cdots*N_i*\varphi(x)-\sum_{k=1}^{i-1}h^{(k)}_{(N_k*\cdots*N_{i-1}*h_i)}(x),\end{aligned}$$

et donc,

$$T*N_1*N_2*\cdots*N_i*\varphi=0$$

au sens des distributions dans Ω. La démonstration est ainsi complète.

Considérons finalement le noyau $r^{\alpha-n}$ d'ordre $\alpha\,(2<\alpha<n)$, où $r=|x|$. Alors on a

$$(\text{pf. } r^{-\alpha-n}) * r^{\alpha-n} = -C_\alpha \varepsilon,$$

où pf. signifie la partie finie d'intégrale et C_α est une constante positive. On a déjà discuté le balayage relatif à $r^{\alpha-n}$ et on connaît que pf. $r^{-\alpha-n}$ est résolutive (cf. [4]). D'après notre théorème, quand on écrit

$$r^{\alpha-n} = C_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} r^{\alpha_1 - n} * \cdots * r^{\alpha_m - n},$$

où $C_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$ est une constante positive, $0 < \alpha_i \leqq 2$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \alpha$, la distribution pf. $r^{-\alpha-n}$ est réslutive pour le balayage relatif au système $(r^{\alpha_i - n})_{i=1}^{m}$ si et seulement si, quel que soit $2 \leqq i \leqq m$, $\alpha_i = 2$. On peut voir aussi le résultat analogue concernant les potentiels besseliens.

Références

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **45** (1959), 208-215.

[2] C. S. Herz: Théorie élémentaire des distributions de Beurling, Pub. Sém. d' Orsay, 4ème année, 1964/65.

[3] M. Itô: Etude des fonctions polyharmoniques par la méthode du balayage, C. R.Acad. Sci. Paris, **267** (1968), 806-809.

[4] ————: Etude des potentiels d'ordre α et des fonctions α-harmoniques, Inventiones Math., **8** (1969), 55-68.

[5] ————: Noyaux convolution réguliers et noyaux convolution singuliers, Nagoya Math. J., 44 (1971), 61-77.

Institut Mathématique
Université de Nagoya