HIROSHIMA MATH. J.
6 (1976), 207–219

Le Principe Relatif de Domination et le Principe Transitif de Domination pour les Noyau-Fonctions Boréliennes

Masayuki ITÔ

(Received September 20, 1975)

Introduction

Soit X un espace localement compact et séparé. Pour simplifier la discussion, on supposera que X sera à base dénombrable.

Une fonction borélienne $G(x, y)$ sur l'espace produit $X \times X$ s'appelle une noyau-fonction borélienne sur X si $0 \leqq G(x, y) \leqq +\infty$ sur $X \times X$ et si, pour $x \in X$ quelconque, $G(y, z) > 0$ dans un certain voisinage de (x, x). Posons $\check{G}(x, y) = G(y, x)$ sur $X \times X$; alors $\check{G}$ est aussi une noyau-fonction borélienne. On dit que $\check{G}$ est un noyau adjoint de G.

Pour une mesure positive μ dans X, le G-potentiel $G\mu$ de μ est défini par

$$G\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y) \qquad \text{sur} \quad X.$$

M. Kishi [6] montre que, pour deux noyau-fonctions G et N semi-continues inférieurement, G satisfait au principe de domination relatif à N si et seulement si $\check{G}$ satisfait au principe transitif de domination par rapport à $\check{N}$ sous la condition que G et $\check{G}$ satisfont au principe de continuité. Récemment I. Higuchi a obtenu le résultat analogue sans aucune condition additionnelle (cf. [3]).

Rappelons le principe classique du maximum pour les noyaux de convolution sur un groupe abélien localement compact. Il y a beaucoup de noyaux de convolution semi-continues supérieurement en dehors de l'origine et satisfaisant au principe classique du maximum. Au point de vue de la semi-continuité inférieure des noyau-fonctions, cela est différent du principe de domination (cf. [4]).

Le but de cette note est de montrer le résultat analogue à celui de Higuchi-Kishi pour les noyau-fonctions boréliennes. Cela donnera immédiatement la dualité du principe de domination pour les noyau-fonctions boréliennes. Pour montrer notre théorème, il est essentiel d'établir un certain théorème d'existence au moyen du théorème de point fixé obtenu par Ky Fan et Glicksberg (cf. [1] et [2]).

§ 1. Préliminaires

On notera toujours M et M_K la totalité des mesures positives dans X et son sous-ensemble des mesures positives à support compact.

Soit $\mu \in M$ donné. On désigne par $B_K(\mu)$ et par $L_2(\mu)$ l'ensemble formé par des fonctions réelles, μ-mesurables et bornées dans X à support compact et l'espace hilbertien usuel des fonctions carrés μ-sommables dans X à valeurs réelles, respectivement. On pose $B_K^+(\mu)=\{f \in B_K(\mu); f \geqq 0\ \mu-p.p.\}$ et $L_2^+(\mu) =\{f \in L_2(\mu); f \geqq 0\ \mu-p.p.\}$, où la notation $\mu-p.p.$ signifie "presque partout pour μ".

Soit G une noyau-fonction borélienne sur X. Notons $E(G)=\{\mu \in M; \int G\mu(x)d\mu(x)<+\infty\}$ et $E_K(G)=E(G) \cap M_K$. Evidemment on a $E(G)=E(\check{G})$ et $E_K(G)=E_K(\check{G})$.

Soient G et N deux noyau-fonctions boréliennes sur X. Alors on dit que:

(1) G satisfait au principe de domination relatif à N si, pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, l'inégalité $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$ implique que la même inégalité a lieu partout sur X, où $\operatorname{supp}(\mu)$ désigne le support de μ.

(2) G satisfait au principe transitif de domination par rapport à N si, pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, l'inégalité $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$ implique que $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X.

Dans le premier cas (resp. le deuxième cas), on écrit $G \prec N$ (resp. $G \sqsubset N$). Evidemment $G \prec G$ et $G \sqsubset G$ sont égaux. Dans ce cas, on dit que G satisfait au principe de domination.

Proposition 1. *Soient G et N deux noyau-fonctions boréliennes sur X. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents:*

(a) $G \prec N$.

(b) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès que $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ $\mu-p.p.$.*

(c) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès qu'il existe une constante $c>0$ telle que $G\mu(x)+c \leqq N\nu(x)$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$.*

(d) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès qu'il existe une constante $c>0$ telle que $G\mu(x)+c \leqq N\nu(x)$ $\mu-p.p.$.*

Démonstration. Evidemment on a (b)$\Rightarrow$(a), (b)$\Rightarrow$(d) et (d)$\Rightarrow$(c). Montrons d'abord que (d)$\Rightarrow$(a). Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$. Rappelons la définition des noyau-fonctions boréliennes; alors on voit que $G\mu(x)>0$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$. Pour $0<\delta<1$ quelconque, on pose $\mu_n=\mu$ sur $\{x \in X; (1-\delta)G\mu(x)+1/n \leqq N\nu(x)\}$ et $\mu_n=0$ dans son complément $(n=1, 2,\dots)$. On a $(1-\delta)G\mu_n(x)+1/n \leqq N\nu(x)$ $\mu_n-p.p.$, et donc $(1-\delta)G\mu_n(x)$

$\leqq N\nu(x)$ sur X. En faisant n $\uparrow +\infty$, on obtient que $(1-\delta)G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X, car $G\mu(x) < \infty$ $\mu-p.p.$. Donc on a $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X. On a ainsi (d)$\Rightarrow$(a).

Montrons ensuite que (a)$\Rightarrow$(b). Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ $\mu-p.p.$. On peut choisir une suite croissante $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de compacts dans X telles que $\mu(CF_n) < 1/n$ et que F_n soit contenu dans $\mathrm{supp}(\mu) \cap \{x \in X; G\mu(x) \leqq N\nu(x)\}$. Posons $\mu_n = \mu$ sur F_n et $\mu_n = 0$ dans CF_n. Alors $G\mu_n(x) \leqq N\nu(x)$ sur $\mathrm{supp}(\mu_n)$, et donc sur X. En faisant $n \uparrow +\infty$, on arrive à $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X. On a ainsi (a)$\Rightarrow$(b).

De la même manière que ci-dessus, on obtient que (c)$\Rightarrow$(d), et la démonstration est complète.

De la même manière que dans la présente proposition, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soient G et N deux noyau-fonctions boréliennes sur X. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents*:

(a) $G \sqsubset N$.

(b) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès que $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ $\mu-p.p.$.*

(c) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $G\mu(x) + c \leqq G\nu(x)$ sur* $\mathrm{supp}(\mu)$.

(d) *Pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$ quelconques, $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X dès qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $G\mu(x) + c \leqq G\nu(x)$ $\mu-p.p.$.*

§2. Théorème d'existence

Rappelons le théorème de point fixé obtenu par Ky Fan et Glicksberg (cf. [1] et [2]).

PROPOSITION 3. *Soit Y un ensemble convexe, compact et non-vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe. Soit φ une application de Y dans l'ensemble $P(Y)$ des parties de Y satisfaisant aux deux conditions suivantes*:

(1) *Pour tout y de Y, $\varphi(y)$ est convexe et non-vide.*

(2) *Le graphe $\{(y, z) \in Y \times Y;\ z \in \varphi(y)\}$ de φ est fermé dans $Y \times Y$.*

Alors il existe $y_0 \in Y$ tel que $y_0 \in \varphi(y_0)$.

On donnera une forme adaptée au cas des noyau-fonctions.

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que ξ sera une mesure dans X et que $G(x, y)$ sera une fonction non-négative définie $\xi \otimes \xi - p.p.$ sur $X \times X$ et localement $\xi \otimes \xi$-sommable. On note aussi $\check{G}(x, y) = G(y, x)$.

Soit $f \in B_K(\xi)$ quelconque. On écrit aussi

$$G(f\xi)(x) = \int G(x, y)f(y)d\xi(y).$$

Alors $G(f\xi)$ est définie $\xi - p.p.$ sur X et localement ξ-sommable.

Soit F un compact dans X. On notera $B_K(F; \xi) = \{f \in B_K(\xi);\ \mathrm{supp}(f\xi) \subset F\}$ et $L_2(F; \xi) = \{f \in L_2(\xi);\ \mathrm{supp}(f\xi) \subset F\}$. Désignons encore par $B_K^+(F; \xi)$ et par $L_2^+(F; \xi)$ leur sous-ensembles des fonctions $\geqq 0$ $\xi - p.p.$, respectivement.

LEMME 1. *Soient F un compact dans X et $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de $B_K^+(F; \xi)$ qui converge faiblement vers f dans $L_2(\xi)$ lorsque $n \to +\infty$. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f_n(x) \leqq C$ $\xi - p.p.$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors, pour $g \in B_K^+(\xi)$ quelconque,*

$$\lim_{n\to\infty} \int G(f_n\xi)(x)g(x)d\xi(x) = \int G(f\xi)(x)g(x)d\xi(x).$$

DÉMONSTRATION. Comme $\int_F \int G(x, y)g(x)d\xi(x)d\xi(y) < +\infty$, pour $\delta > 0$ quelconque, il existe un compact $F_\delta \subset F$ tel que $\check{G}(g\xi)$ soit borné sur F_δ et que $\int_{F-F_\delta} \check{G}(g\xi)(x)d\xi(x) < \delta$. Ayant $f(x) \leqq C$ $\xi - p.p.$, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left| \int G(f_n\xi)(x)g(x)d\xi(x) - \int G(f\xi)g(x)d\xi(x) \right| \\
&\leqq \limsup_{n\to\infty} \Big(\left| \int_{F_\delta} \check{G}(g\xi)(x)(f_n(x) - f(x))d\xi(x) \right| \\
&\quad + \int_{F-F_\delta} \check{G}(g\xi)(x)(f_n(x) + f(x))d\xi(x) \Big) < 2C\delta.
\end{aligned}$$

Comme δ est quelconque, on voit l'égalité demandée.

Montrons un théorème d'existence, qui jouera un rôle analogue à celui de Kishi (cf. [6] et [7]).

THÉORÈME 1. *Soient F un compact dans X, c une constante > 0 et u une fonction > 0, ξ-mesurable et bornée sur F. Alors il existe une fonction $f_0 \in B_K^+(F; \xi)$ telle que l'on ait*

(1) $$G(f_0\xi) + cf_0 \geqq u \quad \xi - p.p. \quad \text{sur} \quad F$$

et

(2) $$G(f_0\xi) + cf_0 = u \quad \xi - p.p. \quad \text{sur} \quad \{x \in X; f_0(x) > 0\}.$$

Pour le montrer, on préparera le lemme suivant:

LEMMA 2. *Soient F, u les mêmes que ci-dessus et c une constante $\geqq 0$.*

Soit E un ensemble convexe non-vide formé par des fonctions $\neq 0$ *contenues dans* $B_K^+(F; \xi)$ *et compact pour la topologie faible dans* $L_2(\xi)$. *Supposons qu'il existe une constante* $C>0$ *telle que, pour* $f \in E$ *quelconque,* $f(x) \leqq C$ ξ*-p.p.. Alors il existe* $f_0 \in E$ *telle que, pour* $g \in E$ *quelconque,*

$$\frac{\int G(f_0\xi)f_0 d\xi + c\int (f_0)^2 d\xi}{\int u f_0 d\xi} \leqq \frac{\int G(f_0\xi) g d\xi + c\int f_0 g d\xi}{\int u g d\xi}. \tag{3}$$

Démonstration du lemme 2. Montrons d'abord notre conclusion dans le cas où $c=0$. Soit $f \in E$ quelconque. On pose, pour $g \in E$,

$$H_f(g) = \frac{\int G(f\xi)(x)g(x)d\xi(x)}{\int u(x)g(x)d\xi(x)} = \frac{\int \check{G}(g\xi)(x)f(x)\,d\xi(x)}{\int u(x)g(x)d\xi(x)}.$$

Comme une base hilbertienne de $L_2(\xi)$ est dénombrable, $L_2(\xi)$ est à base dénombrable pour la topologie faible. Alors le lemme 1 donne que l'application $E \ni g \to H_f(g)$ est continue pour la topologie faible dans $L_2(\xi)$. Posons

$$\varphi(f) = \{g \in E;\, H_f(g) = \inf_{h \in E} H_f(h)\}.$$

Alors $\varphi(f)$ est non-vide, convexe et compact pour la topologie faible dans $L_2(\xi)$. Ainsi l'application φ de E dans $P(E)$ est bien définie. On considère la proposition 3 dans l'espace $L_2(\xi)$ muni de la topologie faible. Evidemment cela est un espace vectoriel topologieque localement convexe. On montrera que le graphe de φ sera fermé. Soient $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de E convergeant faiblement vers $f\,(\in E)$ dans $L_2(\xi)$ et $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de E convergeant faiblement vers g dans $L_2(\xi)$ telle que $g_n \in \varphi(f_n)$ $(n=1, 2,\ldots)$. On a, pour un entier $m \geqq 1$ quelconque,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} H_{f_n}(g_n) &\geqq \lim_{n\to\infty} \frac{\int G_m(f_n\xi)(x)g_n(x)d\xi(x)}{\int u(x)g_n(x)d\xi(x)} \\ &= \frac{\int G_m(f\xi)(x)g(x)d\xi(x)}{\int u(x)g(x)d\xi(x)}, \end{aligned} \tag{4}$$

où $G_m(x, y) = \inf(G(x, y), m)$ sur $X \times X$. En effet, en posant $G_{m,F}(x, y) = G_m(x, y)$ sur $F \times F$ et $G_{m,F}(x, y) = 0$ dans son complément, on a

$$\int G_{m,F}(f_n\xi)(x)g_n(x)d\xi(x) = \int G_m(f_n\xi)(x)g_n(x)d\xi(x)$$

$(1 \leqq {}^{\forall}n \leqq \infty)$, où $f_\infty = f$ et $g_\infty = g$. Comme $G_{m,F}(x, y)$ est carré $\xi\otimes\xi$-sommable, l'opérateur linéaire $L_2(F; \xi) \ni f \to G_{m,F}(f\xi) \in L_2(F; \xi)$ est compact. Donc $(G_{m,F}(f_n\xi))_{n=1}^{\infty}$ converge fortement vers $G_{m,F}(f\xi)$ dans $L_2(\xi)$ lorsque $n \to \infty$, et on arrive à (4). En faisant $m \uparrow +\infty$ dans (4), on arrive à

$$\liminf_{n\to\infty} H_{f_n}(g_n) \geqq H_f(g).$$

Comme, pour toute $h \in E$,

$$H_{f_n}(g_n) \leqq H_{f_n}(h) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} H_{f_n}(h) = H_f(h)$$

(cf. le lemme 1), on a $H_f(g) \leqq H_f(h)$, d'où $g \in \varphi(f)$. On voit ainsi que le graphe de φ est fermé. En vertu de la proposition 3, il existe $f_0 \in E$ telle que $f_0 \in \varphi(f_0)$. Il en résulte immédiatement que f_0 vérifie l'inégalité (3).

Montrons notre conclusion dans le cas où $c > 0$. On peut supposer ici que $\mathrm{supp}(\xi) \supset F$, car il suffit de discuter notre lemme pour $F \cap \mathrm{supp}(\xi)$ au lieu de F. Prenons une suite décroissante $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts dans $X \times X$ telle que $V_n \supset \{(x, x) \in X \times X; x \in F\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \{(x, x); x \in F\}$. Alors on peut choisir une suite $(k_n(x, y))_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $\geqq 0$, finies et continues dans $X \times X$ telle que $\mathrm{supp}(k_n) \subset V_n$, $k_n(x, y) = k_n(y, x)$ sur $X \times X$, pour $x \in X$ quelconque, $\int k_n(x, y) d\xi(y) \leqq 1$ et que, pour $x \in F$ quelconque, $\int k_n(x, y) d\xi(y) = 1$. En effet, considérons la décomposition d'unité; alors, pour tout n, il existe un entier $m \geqq 1$ et une famille $(\varphi_i)_{i=1}^{m}$ de fonctions $\geqq 0$, finies et continues dans X à support compact tels que $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) = 1$ sur F, $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \leqq 1$ sur X, $\{x \in X; \varphi_i(x) > 0\} \cap F \neq \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ et que le support de la fonction $\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ de (x, y) soit contenu dans V_n. Comme $\mathrm{supp}(\xi) \supset F$, on a $\int \varphi_i d\xi > 0$, et donc on peut choisir une constante $a_i > 0$ telle que $a_i \int \varphi_i d\xi = 1$. Posons $k_n(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ sur $X \times X$; alors $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite demandée. Posons

$$K_n(x, y) = \int k_n(x, z) k_n(z, y) d\xi(z).$$

Rappelons la première partie; alors on voit qu'il existe $f_n \in E$ telle que, pour $g \in E$ quelconque,

$$\frac{\int G(f_n\xi) f_n d\xi + c\int K_n(f_n\xi) f_n d\xi}{\int u f_n d\xi} \leqq \frac{\int G(f_n\xi) g d\xi + c\int K_n(f_n\xi) g d\xi}{\int u g d\xi}. \tag{5}$$

On peut supposer que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers f_0 $(\in E)$ dans $L_2(\xi)$ lorsque $n \to \infty$. On montrera que f_0 sera une fonction demandée.

On a d'abord, pour $g \in L_2(\xi)$ quelconque,

$$(6)\quad \begin{aligned} \int |k_n(g\xi)(x)|^2 d\xi(x) &= \iint K_n(x, y) g(y) g(x) d\xi(y) d\xi(x) \\ &\leqq \frac{1}{2}\iint K_n(x, y)((g(x))^2 + (g(y))^2) d\xi(y) d\xi(x) \leqq \int |g(x)|^2 d\xi(x), \end{aligned}$$

car $K_n(x, y) = K_n(y, x)$ sur $X \times X$ et, pour $x \in X$ quelconque, $\int K_n(x, y) d\xi(y) \leqq 1$. On a aussi

$$(7)\quad \int |K_n(g\xi)(x)|^2 d\xi(x) \leqq \int |g(x)|^2 d\xi(x).$$

Notons $C_K = C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact. Pour $h \in C_K$ quelconque, on a évidemment $\lim_{n\to\infty} k_n(h\xi)(x) = \lim_{n\to\infty} K_n(h\xi)(x) = h(x)$ sur F et $|k_n(h\xi)(x)| \leqq \sup_{y\in X} |h(y)|$, $|K_n(h\xi)(x)| \leqq \sup_{y\in X} |h(y)|$ sur X. Donc

$$(8)\quad \liminf_{n\to\infty} \int |k_n(h\xi)|^2 d\xi \geqq \int_F |h|^2 d\xi \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \int |K_n(h\xi)|^2 d\xi \geqq \int_F |h|^2 d\xi.$$

Soit $g \in L_2(F; \xi)$ quelconque. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \int k_n(g\xi) h d\xi = \lim_{n\to\infty} \int k_n(h\xi) g d\xi = \int hg d\xi$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int K_n(g\xi) h d\xi = \int hg d\xi,$$

les suites $(k_n(g\xi))_{n=1}^{\infty}$ et $(K_n(g\xi))_{n=1}^{\infty}$ convergent faiblement vers g dans $L_2(\xi)$. Pour $\delta > 0$ quelconque, on choisit $h \in C_K$ tel que $\int |g-h|^2 d\xi < \delta^2$. En utilisant (6), (7) et (8), on a

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \left(\int |k_n(g\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} &\geqq \liminf_{n\to\infty} \left(\int |k_n(h\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} - \delta \\ &\geqq \left(\int_F |h|^2 d\xi\right)^{1/2} - \delta \geqq \left(\int |g|^2 d\xi\right)^{1/2} - 2\delta \end{aligned}$$

et aussi

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int |K_n(g\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \geqq \left(\int |g|^2 d\xi\right)^{1/2} - 2\delta.$$

En remarquant (6) et (7), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty}\int|k_n(g\xi)|^2d\xi=\int|g|^2d\xi \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\int|K_n(g\xi)|^2d\xi=\int|g|^2d\xi\,.$$

Par conséquent $(k_n(g\xi))_{n=1}^{\infty}$ et $(K_n(g\xi))_{n=1}^{\infty}$ convergent fortement vers g dans $L_2(\xi)$ lorsque $n\to+\infty$.

Rappelons que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de E obtenue ci-dessus. Comme, pour $g\in L_2(F;\,\xi)$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty}\int k_n(f_n\xi)g\,d\xi=\lim_{n\to\infty}\int k_n(g\xi)f_n\,d\xi=\int g f_0\,d\xi\,,$$

$\lim_{n\to\infty} k_n(f_n\xi)(x)=0$ dans CF et $k_n(f_n\xi)\leqq C$ sur X, la suite $(k_n(f_n\xi))_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers f_0 dans $L_2(\xi)$ lorsque $n\to+\infty$. On obtient aussi que $(K_n(f_n\xi))_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers f_0 dans $L_2(\xi)$ lorsque $n\to+\infty$. On a donc

$$\liminf_{n\to\infty}\int K_n(f_n\xi)f_n\,d\xi=\liminf_{n\to\infty}\int|k_n(f_n\xi)|^2d\xi\geqq\int|f_0|^2d\xi\,.$$

En rappelant la démonstration de la première partie, on voit que

$$\liminf_{n\to\infty}\int G(f_n\xi)f_n\,d\xi\geqq\int G(f_0\xi)f_0\,d\xi\,.$$

Remarquons encore l'inégalité (5) et le lemme 1; alors on obtient que, pour $g\in E$ quelconque,

$$\frac{\int G(f_0\xi)f_0\,d\xi+c\int(f_0)^2d\xi}{\int uf_0\,d\xi}\leqq\frac{\int G(f_0\xi)g\,d\xi+c\int f_0 g\,d\xi}{\int ug\,d\xi}\,.$$

Par conséquent f_0 est une fonction demandée, et la démonstration est ainsi complète.

Le théorème 1 est un résultat immédiat du lemme 2. Montrons notre théorème. On peut supposer évidemment que $\xi(F)>0$. Soit c' une constante vérifiant $0<c'<c$. Posons

$$E=\left\{f\in B_K^+(F;\,\xi)\,;\,G(f\xi)+cf\geqq u\ \ \xi-p.p.\text{ sur }F,\ f\leqq\frac{1}{c'}u\ \ \xi-p.p.\text{ sur }F\right\}.$$

Alors E satisfait à toutes les conditions demandées dans le lemme 2, car, pour une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de E convergeant faiblement vers $f\in B_K^+(F;\,\xi)$ dans $L_2(\xi)$, le lemme 1 donne que $G(f\xi)+cf\geqq u\ \ \xi-p.p.$ sur F. Posons

$$E_0=\left\{f\in E;\,\frac{\int G(f\xi)f\,d\xi+c\int(f)^2d\xi}{\int uf\,d\xi}\leqq\frac{\int G(f\xi)g\,d\xi+c\int fg\,d\xi}{\int ug\,d\xi}\text{ pour }{}^{\forall}g\in E\right\}.$$

Alors le lemme 2 donne que $E_0 \neq \emptyset$. Soit $f \in E_0$ quelconque. Posons $\alpha = \min\{\beta$: constante>0, $\beta f \in E\}$. On a alors $\alpha f \in E$. On voit ensuite $\alpha f \in E_0$. On montrera que, en posant $f_0 = \alpha f$, f_0 sera une fonction demandée. Notons

$$b = \frac{\int G(f_0\xi) f_0 d\xi + c\int (f_0)^2 d\xi}{\int u f_0 d\xi}.$$

Pour notre conclusion, il suffit de montrer que $b=1$. Supposons que $b \neq 1$. Alors $b>1$. On pose

$$A = \{x \in F;\ G(f_0\xi)(x) + c f_0(x) < bu(x)\}.$$

Montrons que, sous la condition que $b>1$, $\xi(A) \neq 0$ et $f_0(x) = u(x)/c'$ $\xi - p.p.$ sur A. Supposons que $\xi(A)=0$. Alors $G(f_0\xi) + cf_0 \geqq bu$ $\xi - p.p.$ sur F, et donc $f_0/b \in E$. Mais cela est en contradiction avec la définition de f_0, d'où $\xi(A)>0$. Supposons que

$$\xi\left(\left\{x \in A; f_0(x) < \frac{1}{c'} u(x)\right\}\right) > 0.$$

Alors il existe $g \neq 0 \in B_K^+(F;\xi)$ portée par $\{x \in A; f_0(x) < u(x)/c'\}$ telle que $f_0 + g \in E$. On a

$$\frac{\int G(f_0\xi) g d\xi + c\int f_0 g d\xi}{\int u g d\xi} < b,$$

et par suite

$$\frac{\int G(f_0\xi)(f_0+g) d\xi + c\int f_0(f_0+g) d\xi}{\int u(f_0+g) d\xi} < b.$$

Mais cela est une contradiction. Donc $f_0(x) = u(x)/c'$ $\xi - p.p.$ sur A. On a ainsi $b > c/c'$. Par conséquent

$$G(f_0\xi) + cf_0 \geqq \frac{c}{c'} u \quad \xi - p.p. \quad \text{sur } F.$$

Comme $c/c' > 1$ et $(c'/c) f_0 \in E$, on arrive à une contradiction, d'où $b=1$. On obtient ainsi que f_0 est une fonction demandée, et la démonstration est ainsi complète.

§3. Notre théorème principal

Soient G et N deux noyau-fonctions boréliennes sur X. Pour un entier $m \geqq 1$ quelconque, on notera toujours $G_m(x, y) = \inf(G(x, y), m)$ et $N_m(x, y) = \inf(N(x, y), m)$ sur $X \times X$. En appliquant le théorème 1, on montrera notre théorème principal.

THÉORÈME 2. *Soient G et N des noyau-fonctions boréliennes sur X. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *G satisfait au principe de domination relatif à N.*

(2) *$\check{G}$ satisfait au principe transitif de domination par rapport à $\check{N}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que (1)⇒(2). Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$, $\nu \in M_K$ et une constante $c > 0$, $\check{G}\mu(x) + c \leqq \check{G}\nu(x)$ sur $\mathrm{supp}(\mu)$. Soit $y \in X$ quelconque. Prenons une suite croissante $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de compacts dans X telle que $F_n \subset \mathrm{supp}(\mu) \cap \{x \in X;\ N\varepsilon_y(x) > 0\}$ et $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(\{x \in X;\ N\varepsilon_y(x) > 0\})$, où ε_y est la mesure d'unité à y. Soit m un entier $\geqq 1$ quelconque fixé. Comme $0 < N_m\varepsilon_y(x) \leqq m$ sur F_n, le théorème 1 donne qu'il existe $f_n \in B_K^+(F_n;\ \mu)$ telle que

$$G(f_n\mu) + cf_n \geqq N_m\varepsilon_y \quad \mu - p.p. \qquad \text{sur} \quad F_n$$

et

$$G(f_n\mu) + cf_n = N_m\varepsilon_y \quad \mu - p.p. \qquad \text{sur} \quad \{x \in X; f_n(x) > 0\}.$$

Comme $G(f_n\mu) \leqq N_m\varepsilon_y \leqq N\varepsilon_y$ $(f_n\mu) - p.p.$ et $G \prec N$, on a

$$G(f_n\mu) \leqq N\varepsilon_y \qquad \text{partout sur} \quad X$$

(cf. la proposition 1). Posons $\mu_n = \mu$ sur F_n et $\mu_n = 0$ dans CF_n. Alors on a

$$\check{N}_m\mu_n(y) = \int N_m\varepsilon_y(x)d\mu_n(x) \leqq \int (G(f_n\mu)(x) + cf_n(x))d\mu_n(x)$$

$$= \int (\check{G}\mu_n(x) + c)f_n(x)d\mu(x) \leqq \int \check{G}\nu(x)f_n(x)d\mu(x) = \int G(f_n\mu)(x)d\nu(x)$$

$$\leqq \int N\varepsilon_y d\nu(x) = \check{N}\nu(y).$$

En faisant $n \uparrow +\infty$, on a $\check{N}_m\mu(y) \leqq \check{N}\nu(y)$. En faisant ensuite $m \uparrow +\infty$, $\check{N}\mu(y) \leqq \check{N}\nu(y)$. Comme y est quelconque, on a $\check{N}\mu \leqq \check{N}\nu$ partout sur X. D'après la proposition 2, on voit que $\check{G} \sqsubset \check{N}$, d'où (1)⇒(2).

De la même manière que ci-dessus, on pourra montrer (2)⇒(1). Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$, $\nu \in M_K$ et une constante $c > 0$, $G\mu(x) + c \leqq N\nu(x)$ sur $\mathrm{supp}(\mu)$.

Soit $y \in X$ quelconque. On prend une suite croissante $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de compacts dans X telle que $F_n \subset \operatorname{supp}(\mu) \cap \{x \in X\,;\, \check{G}\varepsilon_y(x) > 0\}$ et $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(\{x \in X\,;\, \check{G}\varepsilon_y(x) > 0\})$. Soit m un entier $\geqq 1$ quelconque. Le théorème 1 donne qu'il existe $f_n \in B_K^+(F_n;\mu)$ telle que l'on ait

$$\check{G}(f_n\mu) + cf_n \geqq \check{G}_m\varepsilon_y \quad \mu-p.p. \qquad \text{sur} \quad F_n,$$

$$\check{G}(f_n\mu) + cf_n = \check{G}_m\varepsilon_y \quad \mu-p.p. \qquad \text{sur} \quad \{x \in X\,; f_n(x) > 0\}\,.$$

D'après $\check{G} \sqsubset \check{N}$ et la proposition 2, on a $\check{N}(f_n\mu) \leqq \check{N}\varepsilon_y$ partout sur X. Posons $\mu_n = \mu$ sur F_n et $\mu_n = 0$ dans CF_n; alors on a

$$\begin{aligned} G_m\mu_n(y) &= \int \check{G}_m\varepsilon_y(x)\, d\mu_n(x) \leqq \int (\check{G}(f_n\mu)(x) + cf_n(x))d\mu_n(x) \\ &= \int (G\mu_n(x) + c)f_n(x)d\mu(x) \leqq \int Nv(x)f_n(x)d\mu(x) \\ &= \int \check{N}(f_n\mu)(x)dv(x) \leqq \int \check{N}\varepsilon_y(x)dv(x) = Nv(y)\,. \end{aligned}$$

En faisant $n \uparrow +\infty$ et ensuite $m \uparrow +\infty$, on obtient que $G\mu(y) \leqq Nv(y)$. Par conséquent $G\mu \leqq Nv$ partout sur X. D'après la proposition 1, on voit que $G \prec N$, d'où (2)$\Rightarrow$(1). La démonstration est ainsi complète.

En posant $N = G$ dans le théorème 2, on obtient la dualité du principe de domination pour les noyau-fonctions boréliennes.

COROLLAIRE 1. *Soit G une noyau-fonction borélienne sur X. Alors G satisfait au principe de domination si et seulement si $\check{G}$ y satisfait aussi.*

Le résultat analogue a été obtenu dans l'article [5]. La définition du principe de domination dans [5] est un peu différent de notre définition.

COROLLAIRE 2. *Soient G et N deux noyau-fonctions boréliennes. Supposons que $G \prec N$ et que N est finie en dehors de l'ensemble diagonal. Alors, pour $\mu \in E_K(G)$ et un nombre $\delta > 0$ quelconques, il existe un compact F_δ dans X tel que $\mu(CF_\delta) < \delta$ et que $\check{N}\mu_\delta$ soit fini $\mu_\delta - p.p.$, où $\mu_\delta = \mu$ sur F_δ et $\mu_\delta = 0$ dans CF_δ.*

En effet, rappelons la définition des noyau-fonctions boréliennes; alors on voit qu'à tout x de X, on peut associer un voisinage ouvert $V(x)$ de x tel que, pour $y \in V(x)$ quelconque, $\check{G}(y, x) > 0$. Comme μ est à support compact, on peut choisir un entier $n \geqq 1$ et $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ tels que $\mu(\{x_i\}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et que $\bigcup_{i=1}^n V(x_i) \supset \operatorname{supp}(\mu)$. Ayant $\int \check{G}\mu d\mu < +\infty$, on peut prendre un compact $F_{\delta,0}$ tel que $\mu(CF_{\delta,0}) < (n+1)^{-1}\delta$ et que $\check{G}\mu$ soit borné sur $F_{\delta,0}$. Soit $F_{\delta,i}$ un compact dans X tel que $\inf_{y \in F_{\delta,i}} \check{G}(y, x_i) > 0$, $F_{\delta,i} \subset V(x_i)$ et que $\mu(CF_{\delta,i} \cap V(x_i)) < (n+1)^{-1}\delta$. Posons $F_\delta = F_{\delta,0} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} F_{\delta,i})$ et définissons μ_δ comme ci-dessus; alors on a $\mu(CF_\delta) < \delta$ et $G\mu_\delta$ est borné sur $F_\delta \supset \mathrm{supp}(\mu_\delta)$. Comme $\inf_{y \in F_\delta} \sum_{i=1}^{n} \check{G}(y, x_i) > 0$, on a, avec une constante $a > 0$, $\check{G}\mu_\delta \leqq a \sum_{i=1}^{n} \check{G}\varepsilon_{x_i}$ sur F_δ. D'après le théorème 2, on a $\check{N}\mu_\delta \leqq a \sum_{i=1}^{n} \check{N}\varepsilon_{x_i}$ partout sur X. Comme $\mu(\{x_i\}) = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, on voit que $N\mu_\delta$ est fini $\mu_\delta - p.p.$, d'où le corollaire 2.

Dans le présent corollaire, on ne peut pas éviter la condition que N est finie en dehors de l'ensemble diagonal.

Il fait question si, sous les conditions dans le corollaire 2, $E_K(G) \subset E_K(N)$.

Le corollaire 2 donne la remarque suivante:

REMARQUE. Soient G, N et K trois noyau-fonctions boréliennes. Supposons que N est finie en dehors de l'ensemble diagonal. Si $G \prec N$ et $N \prec K$, alors $G \prec K$.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2, il suffit de montrer que $\check{G} \sqsubset \check{N}$, $\check{N} \sqsubset \check{K} \Rightarrow \check{G} \sqsubset \check{K}$. Montrons cette implication. Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M_K$, $\check{G}\mu \leqq \check{G}\nu$ sur $\mathrm{supp}(\mu)$. Alors $\check{G} \sqsubset \check{N}$ donne que $\check{N}\mu \leqq \check{N}\nu$ sur X. Soit δ un nombre > 0 quelconque et μ_δ une mesure positive obtenue dans le corollaire 2. Alors $N\mu_\delta$ est fini $\mu_\delta - p.p.$. Pour un entier $n \geqq 1$ quelconque, on désigne par $\mu_{\delta,n}$ la restreinte de μ_δ sur $\{x \in X; N\mu_\delta(x) \leqq n\}$. Alors $\mu_{\delta,n} \in E_K(N)$. Comme $\check{N}\mu_{\delta,n} \leqq \check{N}\mu \leqq \check{N}\nu$ sur X, $\check{N} \sqsubset \check{K}$ donne que $\check{K}\mu_{\delta,n} \leqq \check{K}\nu$ sur X. En faisant $n \uparrow +\infty$ et ensuite $\delta \downarrow 0$, on arrive à $\check{K}\mu \leqq \check{K}\nu$ sur X. On obtient ainsi que $\check{G} \sqsubset \check{K}$, et la démonstration est complète.

On remarque finalement sur le principe classique du maximum. Pour une noyau-fonction borélienne G, le principe classique du maximum pour G est égal à $G \prec 1$. Dans l'espace euclidien R^n à dimension $n \geqq 3$, le noyau-fonction

$$G(x, y) = |x-y|^{2-n} - \int |x-y-z|^{2-n} d\sigma(z)$$

satisfait au principe classique du maximum dès que $|x|^{2-n} - \int |x-y|^{2-n} d\sigma(y) \geqq 0$ sur R^n, où σ est une mesure positive dans R^n et où $|x|$ désigne la distance entre x et l'origine.

Fournons explicitement sa démonstration. Notons $N(x, y) = |x-y|^{2-n}$ sur $R^n \times R^n$. Supposons que, pour $\mu \in E_K(G)$, $G\mu(x) \leqq 1$ sur $\mathrm{supp}(\mu)$. Supposons de plus que $\mu \in E_K(N)$; alors $G\mu(x) = N\mu(x) - N(\mu * \sigma)(x)$ $\mu - p.p.$ sur R^n. Comme $N\mu \leqq N(\mu * \sigma) + 1$ $\mu - p.p.$, le principe complet du maximum pour N donne que

$N\mu \leqq N(\mu * \sigma)+1$ sur R^n, d'où $G\mu \leqq 1$ sur R^n. Donc il suffit de montrer que $E_K(G) \subset E_K(N)$. On peut supposer que $\sigma(\{0\})=0$. D'après le principe de positivité de masse pour le noyau newtonien, on a $\int d\sigma \leqq 1$. Pour un nombre $r>0$, on note σ'_r la mesure balayée de σ sur $\{x \in R^n;\ |x| \leqq r\}$ relativement au noyau newtonien. Alors $\lim_{r \to 0} \int d\sigma'_r = 0$. Posons

$$G_r(x, y) = |x-y|^{2-n} - \int |x-y-z|^{2-n} d\sigma'_r(z).$$

Comme $N\sigma(x) = N\sigma'_r(x)$ dans $\{x \in R^n;\ |x|<r\}$, on a $E_K(G)=E_K(G_r)$. Par conséquent, pour montrer que $E_K(G) \subset E_K(N)$, il suffit de supposer que $\int d\sigma < 1$. Soit $\mu \in E_K(G)$ quelconque; alors $k*\mu*\check{\mu}*(\varepsilon-\sigma)(0)<\infty$, où $k(x)=|x|^{2-n}$, $\check{\mu}$ est la mesure positive définie par $\int f d\check{\mu} = \int f(-x) d\mu$ pour toute $f \in C_K(R^n)$ et où ε désigne la mesure de Dirac à l'origine. D'après la formule de Parseval, on a

$$+\infty > \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2 (1-\hat{\sigma}(x))}{|x|^2} \mathrm{dx} \geqq \left(1 - \int \mathrm{d}\sigma\right) \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{|x|^2} \mathrm{dx},$$

où la signe ^ désigne la transformation de Fourier. Donc on a $\int |\hat{\mu}(x)|^2 |x|^{-2} dx < +\infty$, d'où $k*\mu*\check{\mu}(0) < +\infty$. On obtient donc que $\mu \in E_K(N)$, d'où $E_K(G) \subset E_K(N)$. On voit ainsi que G satisfait au principe classique du maximum.

On remarque que G est toujours semi-continue supérieurement en dehors de l'ensemble diagonal. En général, cela n'est pas semi-continue inférieurement.

Bibliographie

[1] Ky Fan: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **38** (1952), 121–126.

[2] I. L. Glicksberg: A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 170–174.

[3] I. Higuchi: Duality of domination principle for non-symmetric lower semi-continuous function-kernels, Hiroshima Math. J. **5** (1975), 551–559.

[4] M. Itô: Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris **268** (1969), 867–868.

[5] ————: Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J. **44** (1971), 133–164.

[6] M. Kishi: Maximum principles in the potential theory, ibid. **23** (1963), 165–187.

[7] ————: An existence theorem in potential theory, ibid. **27** (1966), 133–137.

Mathematical Institute,
Nagoya University