

Densité des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs compacts non auto-adjoints et applications

Marie Thérèse Aimar¹, Abdelkader Intissar² et Jean Martin Paoli²

¹ Département de Mathématiques, Université de Provence, Place V. Hugo, F-13331 Marseille Cedex 3, France

² Département de Mathématiques, Université de Corte, Quartier Grossetti, F-20250 Corte, France

Received September 7, 1992; in revised form December 21, 1992

Abstract. We consider a closed densely defined linear operator T in a Hilbert space E , and assume the existence of $\xi_0 \in \varrho(T)$ such that $K = (T - \xi_0 I)^{-1}$ is compact and the existence of $p > 0$ such that $s_n(K) = \mathbf{o}(n^{-1/p})$, where $s_n(K)$ denotes the sequence of non-zero eigenvalues of the compact hermitian operator $\sqrt{K^*K}$. In this work, sufficient conditions (announced in [1]) are introduced to assure that the closed subspace of E spanned by the generalized eigenvectors of T coincides with E . These conditions are in particular verified by a family of non-self-adjoint operators arising in reggeon's field theory.

1. Introduction

Soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans un espace de Hilbert E muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On suppose que T est un opérateur à résolvante compacte et on désigne par $\varrho(T)$ son ensemble résolvant, alors son spectre $\sigma(T) = \mathbb{C} - \varrho(T)$ est discret, formé uniquement de valeurs propres et composé d'une suite de nombres complexes $\{\lambda_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ qu'on ordonne en général de façon croissante tels que $\lim |\lambda_i| = +\infty$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Rappel de quelques propriétés classiques [4] ou [12]. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, si on pose:

$$\begin{aligned} - \text{Ker}(\lambda I - T)^k &= \{\varphi \in D(T^k); (\lambda I - T)^k \varphi = 0\} \\ \text{et } \text{Im}(\lambda I - T)^k &= \{(\lambda I - T)^k \varphi; \varphi \in D(T^k)\} \\ - \text{Ker}(\lambda I - T^*)^k &= \{\varphi \in D(T^{*k}); (\lambda I - T^*)^k \varphi = 0\} \\ \text{et } \text{Im}(\lambda I - T^*)^k &= \{(\lambda I - T^*)^k \varphi; \varphi \in D(T^{*k})\}, \end{aligned}$$

alors on a:

- 1) Les sous espaces $\text{Ker}(\lambda I - T)^k$ et $\text{Im}(\lambda I - T)^k$ sont invariants par rapport à T .
- 2) $\text{Ker}(\lambda I - T)^k$ est de dimension finie et $\text{Im}(\lambda I - T)^k$ est fermé.
- 3) Il existe un entier m tel que:
 - a) $\text{Ker}(\lambda I - T)^k \subset \text{Ker}(\lambda I - T)^{k+1}$, $0 \leq k < m$ et $\text{Ker}(\lambda I - T)^k = \text{Ker}(\lambda I - T)^{k+1}$; $k \geq m$.

- b) $\text{Im}(\lambda I - T)^{k+1} \subset \text{Im}(\lambda I - T)^k$, $0 \leq k < m$ et $\text{Im}(\lambda I - T)^k = \text{Im}(\lambda I - T)^{k+1}$; $k \geq m$.
- c) $\text{Ker}(\lambda I - T)^m \cap \text{Im}(\lambda I - T)^m = \{0\}$ et $E = \text{Ker}(\lambda I - T)^m + \text{Im}(\lambda I - T)^m$ (Somme topologique).
- d) $(\lambda I - T)^m|_{D(T^m) \cap \text{Im}(\lambda I - T)^m}$ est inversible.
- e) $\text{Im}(\bar{\lambda} I - T^*)^k = [\text{Ker}(\lambda I - T)^k]^\perp$ et $\text{Im}(\lambda I - T)^k = [\text{Ker}(\bar{\lambda} I - T^*)^k]^\perp$.
 m est appelé indice de λ , la dimension de $\text{Ker}(\lambda I - T)$ est la multiplicité géométrique de λ et la dimension de $[\text{Ker}(\lambda I - T)^m]$ est la multiplicité algébrique de λ .

Les éléments de $[\text{Ker}(\lambda I - T)^m]$ sont appelés les vecteurs propres généralisés de T associés à λ .

Afin de simplifier les notations, dans toute la suite on suppose $m = 1$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ les valeurs propres de T , on a :

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker}(\lambda_1 I - T) + \text{Im}(\lambda_1 I - T) && \text{(Somme topologique)}, \\ E &= \text{Ker}(\lambda_2 I - T) + \text{Im}(\lambda_2 I - T) && \text{(Somme topologique)}, \\ E &= \text{Ker}(\lambda_1 I - T) + \text{Ker}(\lambda_2 I - T) \\ &\quad + \text{Im}(\lambda_1 I - T) \cap \text{Im}(\lambda_2 I - T) && \text{(Sommes topologiques)}. \end{aligned}$$

Pour les n premières valeurs propres on a :

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker}(\lambda_1 I - T) + \dots + \text{Ker}(\lambda_n I - T) \\ &\quad + \bigcap_{i=1}^n \text{Im}(\lambda_i I - T) && \text{(Sommes topologiques)}, \\ E &= \text{Ker}(\bar{\lambda}_1 I - T^*) + \dots + \text{Ker}(\bar{\lambda}_n I - T^*) \\ &\quad + \bigcap_{i=1}^n \text{Im}(\bar{\lambda}_i I - T^*) && \text{(Sommes topologiques)}. \end{aligned}$$

Posons $M_n = \bigcap_{i=1}^n \text{Im}(\lambda_i I - T)$ et $M_n^* = \bigcap_{i=1}^n \text{Im}(\bar{\lambda}_i I - T^*)$, il est alors naturel de poser :

$$M_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Im}(\lambda_i I - T) \quad \text{et} \quad M_\infty^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Im}(\bar{\lambda}_i I - T^*).$$

Soient D le plus petit sous espace vectoriel fermé contenant $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Ker}(\lambda_i I - T)$, D^* le plus petit sous espace vectoriel fermé contenant $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Ker}(\bar{\lambda}_i I - T^*)$ et $T_\lambda = \lambda I - T$. On commence par rappeler quelques propriétés classiques de l'opérateur $T_\lambda = \lambda I - T$:

- 1) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall i \in \mathbb{N}$, on a : $T_\lambda(\text{Ker}(\lambda_i I - T)) \subset \text{Ker}(\lambda_i I - T)$.
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall i \in \mathbb{N}$, on a : $T_\lambda(D(T) \cap \text{Im}(\lambda_i I - T)) \subset \text{Im}(\lambda_i I - T)$.
- 3) $\forall \lambda \in \rho(T), \forall i \in \mathbb{N}$, on a : $(\lambda I - T)^{-1}(\text{Im}(\lambda_i I - T)) \subset (D(T) \cap \text{Im}(\lambda_i I - T))$
- 4) $\forall i \in \mathbb{N}$, T_{λ_i} envoie bijectivement $D(T) \cap \text{Im}(\lambda_i I - T)$ sur $\text{Im}(\lambda_i I - T)$
- 5) $\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, l'opérateur T_{λ_i} envoie bijectivement $D(T) \cap \text{Im}(\lambda_i I - T) \cap \text{Im}(\lambda_j I - T)$ sur $\text{Im}(\lambda_i I - T) \cap \text{Im}(\lambda_j I - T)$.

Dans Dunford-Schwartz [4], on peut trouver aussi les résultats suivants:

- 1) $E = D + M_\infty^* = D^* + M_\infty$ (sommes directes orthogonales)
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $T_\lambda = \lambda I - T$ est bijectif de $M_\infty \cap D(T)$ dans M_∞ .
- 3) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(\lambda I - T)^{-1}|_{M_\infty}$ est quasi-nilpotent.

Remarque 1.

- 1) M_∞ est soit réduit au singleton $\{0\}$ soit de dimension infinie.
- 2) Le système des vecteurs propres généralisés de T est dense dans E si et seulement si $M_\infty^* = \{0\}$.

Proposition 1. *L'application $\lambda \rightarrow f(\lambda) = \langle (\lambda I - T)^{-1}\varphi, \psi \rangle$, $\varphi \in M_\infty$ et $\psi \in E$ est analytique sur tout le champ complexe.*

Démonstration

- Pour $\lambda_0 \in \rho(T)$, l'analyticité de la fonction $f(\lambda) = \langle (\lambda I - T)^{-1}\varphi, \psi \rangle$ au voisinage de λ_0 se déduit de l'analyticité de la résolvante de l'opérateur T .
- Pour $\lambda_0 \in \sigma(T)$ d'indice n_0 , il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\{\lambda, |\lambda - \lambda_0| < \alpha_0\}$ soit dans $\rho(T)$ et on a le développement de Laurent:

$$f(\lambda) = \langle (\lambda I - T)^{-1}\varphi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \langle A_k \varphi, \psi \rangle + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\langle B_k \varphi, \psi \rangle}{(\lambda - \lambda_0)^k},$$

où B_1 est la projection sur $\text{Ker}(\lambda_0 I - T)$ parallèlement à $\text{Im}(\lambda_0 I - T)$ et où les autres coefficients de la série de Laurent vérifient:

- $(\lambda_0 I - T)A_0 = I - B_1$,
- $(-1)^k (\lambda_0 I - T)^k A_k = A_0$ pour tout $k \geq 0$,
- $(-1)^k (\lambda_0 I - T)^k B_1 = B_{k+1}$ pour tout $0 \leq k \leq n_0 - 1$.

Comme $\text{Ker } B_1 = \text{Im}(\lambda_0 I - T)$, alors si $\varphi \in M_\infty$, φ est dans $\text{Im}(\lambda_0 I - T)$ et donc dans $\text{Ker } B_1$, d'où $B_1 \varphi = 0$ et par suite $B_{k+1} \varphi = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n_0 - 1$. f est donc analytique en tout point au voisinage de λ_0 . Il nous reste à montrer que f est analytique au point λ_0 . Pour cela, on va montrer que $f(\lambda_0) = \langle A_0 \varphi, \psi \rangle$.

Comme $(\lambda_0 I - T)A_0 = I - B_1$, $A_0 \varphi \in D(T)$ et puisque $(-1)^k (\lambda_0 I - T)^k A_k = A_0$ pour tout $k \geq 0$, alors $A_k \varphi \in D(T^k)$ et $A_0 \varphi \in \text{Im}(\lambda_0 I - T)^k$. Par conséquent $A_0 \varphi \in \text{Im}(\lambda_0 I - T)$ et il en résulte que $A_0 \varphi \in D(T) \cap \text{Im}(\lambda_0 I - T)$. De plus $(\lambda_0 I - T)A_0 \varphi = (I - B_1)\varphi = \varphi$ puisque $\varphi \in M_\infty \subset \text{Ker}(B_1)$ et $(\lambda_0 I - T)[(\lambda_0 I - T)|_{M_\infty}]^{-1}\varphi = \varphi$ avec $[(\lambda_0 I - T)|_{M_\infty}]^{-1}\varphi \in D(T) \cap \text{Im}(\lambda_0 I - T)$.

Par suite on en déduit que $A_0 \varphi = [(\lambda_0 I - T)|_{M_\infty}]^{-1}\varphi$ et donc

$$\langle A_0 \varphi, \psi \rangle = \langle [(\lambda_0 I - T)|_{M_\infty}]^{-1}\varphi, \psi \rangle = f(\lambda_0).$$

2. Quelques théorèmes sur la densité des vecteurs propres généralisés

Soit E un espace de Hilbert sur \mathbb{C} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$ et T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans E .

On rappelle qu'un opérateur compact K appartient à la classe ℓ_p de Carleman si la série $\sum_{n \geq 1}^{\infty} [s_n(\sqrt{K^*K})]^p$ converge où $s_n(\sqrt{K^*K})$, $n = 1, 2, \dots$ désigne la suite des valeurs propres de l'opérateur compact hermitien positif $\sqrt{K^*K}$.

Dans [10], Lang et Locker ont utilisé l'inégalité de Carleman et le principe de Phragmén-Lindelöf pour établir des conditions suffisantes qui garantissent la densité des vecteurs propres généralisés d'un opérateur à résolvante de Hilbert-Schmidt; leurs conditions généralisent certaines conditions données par Dunford et Schwartz dans [4] (corollaire 31, Ch XI, p: 1042). Une version de leurs résultats est la suivante:

Théorème 1 (Lang et Locker [10]). *Soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans un Hilbert E ; on suppose qu'il existe $\xi_0 \in \varrho(T)$ tel que $R_{\xi_0}(T) = (\xi_0 I - T)^{-1}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soient cinq demi-droites $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ du plan complexe issues de l'origine telles que tout angle formé par deux demi-droites adjacentes soit plus petit que $\pi/2$. On suppose que pour $|\lambda|$ assez grand, la résolvante $R_\lambda(T)$ est bornée sur $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ et que sur l'une de ces demi-droites elle satisfait l'inégalité: $\|R_\lambda(T)\| = O(1/|\lambda|)$ lorsque $|\lambda| \rightarrow \infty$. Alors l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de T est dense dans E .*

En utilisant un théorème de Macaev [6] et le principe de Phragmén-Lindelöf [13], nous proposons dans ce travail de généraliser le théorème précédent à un opérateur T à résolvante $K = (T - \xi_0 I)^{-1}$ compacte pour lequel il existe $p > 0$ tel que $s_n(K) = o((n^{-1/p}))$, ($n \rightarrow \infty$).

Remarque 2. Il est clair que si un opérateur compact K appartient à la classe ℓ_p de Carleman alors $s_n(K) = o(n^{-1/p})$, ($n \rightarrow \infty$).

Théorème 2. *Soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans un Hilbert E . On suppose:*

H_1) *Il existe $\xi_0 \in \varrho(T)$ tel que $K = (T - \xi_0 I)^{-1}$ soit un opérateur compact.*

H_2) *Il existe $p > 0$ tel que $s_n(K) = o(n^{-1/p})$ ($n \rightarrow \infty$).*

H_3) *Pour $|\lambda|$ assez grand, la résolvante $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ est bornée sur m demi-droites $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ issues de l'origine divisant tout le plan complexe et telles que l'angle formé par deux demi-droites adjacentes quelconques soit strictement plus petit que π/p ($m \geq [2p] + 1$ où $[2p]$ désigne la partie entière de $2p$).*

H_4) *Il existe une suite $\xi_n \in \varrho(T)$ telle que $R_{\xi_n}(T)$ converge faiblement vers zéro lorsque $|\xi_n|$ tend vers l'infini.*

Alors le système des vecteurs propres généralisés de T est dense dans E .

Proposition 2. 1) *Si un opérateur T vérifie les hypothèses du Théorème 2, alors il en est de même pour son adjoint T^* .*

2) *On pose $M_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{Im}(\lambda_k I - T)$ (fermé) où $\text{Im}(\lambda_k I - T)$ désigne l'image de l'opérateur $\lambda_k I - T$ et $\{\lambda_k\}$ $k = 1, 2, \dots$ sont les valeurs propres de T . Si un opérateur T vérifie les hypothèses du Théorème 2, alors l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de T est dense dans E si et seulement si $M_\infty = \{0\}$.*

3) *Si K est opérateur compact sur un Hilbert E et F un sous espace de Hilbert stable par K alors $s_n(K|_F) \leq s_n(K)$ pour tout $n \geq 1$.*

4) *Sous les hypothèses H_1 et H_2 du Théorème 2 on a*

$$s_n(\lambda I - T)^{-1}|_{M_\infty} = o(n^{-1/p}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Démonstration. 1) Si un opérateur T vérifie les hypothèses du Théorème 2 alors son adjoint T^* les vérifie aussi puisque $\varrho(T^*) = \overline{\varrho(T)}$ et $(\bar{\lambda} I - T^*)^{-1} = [(\lambda I - T)^{-1}]^*$ pour tout $\lambda \in \varrho(T)$. En effet les vérifications des hypothèses H_1 et H_3 du Théorème 2 se font facilement; quant à celle de H_4 , il suffit de remarquer que la convergence

faible vers zéro de $R_{\xi_n}(T^*)$ lorsque $|\xi_n|$ tend vers l'infini est équivalente à celle de $R_{\xi_n}(T)$. Le seul point un peu moins trivial est la vérification de l'hypothèse H_2 qui résulte de la propriété importante $s_n(K) = s_n(K^*)$; cette dernière se démontrant rapidement en utilisant le développement de Schmidt d'un opérateur compact.

2) Du fait que le système des vecteurs propres généralisés d'un opérateur T est dense, il ne résulte pas en général que le système des vecteurs propres généralisés de T^* soit dense, mais sous les hypothèses de notre théorème, il suffit de combiner le (1) de cette proposition et la caractérisation de la densité des vecteurs propres généralisés donnée dans la Remarque 1.

3) La propriété (3) de cette proposition est une conséquence du théorème d'Allahverdiev [6] rappelé ci-dessous:

Théorème 3 (Allahverdiev [6]). *Si K est un opérateur compact sur un Hilbert E , pour tout $n \geq 1$ on a: $s_n(K) = d(K, K_{n-1}(E))$ où $K_{n-1}(E)$ désigne le sous espace des opérateurs bornés $L(E)$, de rang $n - 1$; la distance étant prise pour la norme de $L(E)$ (espace des opérateurs bornés).*

Si F est un sous espace de Hilbert de E , $L(F)$ s'injecte dans $L(E)$ de façon à avoir $d_{L(F)}(K|_F, K_{n-1}(F)) \leq d_{L(E)}(K, K_{n-1}(E))$ et donc $s_n(K|_F) \leq s_n(K)$ pour tout $n \geq 1$.

4) Soit $\xi_0 \in \varrho(T)$, comme $(T - \xi_0 I)^{-1}|_{M_\infty} = (T|_{M_\infty} - \xi_0 I)^{-1}$, on obtient en combinant l'hypothèse H_2 de notre théorème et la propriété (3) de cette proposition: $s_n((T - \xi_0 I)^{-1}|_{M_\infty}) = \mathbf{o}(n^{-1/p})$ ($n \rightarrow \infty$).

Soit $\xi_0 \in \varrho(T)$, on pose $K_1 = (T - \xi_0 I)^{-1}|_{M_\infty}$ et soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{\xi_0\}$ on a:

- i) $(\lambda I - T)|_{M_\infty} = \lambda I - T|_{M_\infty} = \lambda I - \xi_0 I + \xi_0 I - T|_{M_\infty}$.
- ii) $(\lambda I - T)|_{M_\infty} \cdot K_1 = [(\lambda - \xi_0)I + (\xi_0 I - T|_{M_\infty})] \cdot K_1 = (\lambda - \xi_0)K_1 + I$.
- iii) $\frac{1}{\xi_0 - \lambda}(\lambda I - T)|_{M_\infty} \cdot K_1 = -K_1 + \frac{I}{\xi_0 - \lambda} = \frac{I}{\xi_0 - \lambda} - K_1$.
- iv) $\frac{1}{\xi_0 - \lambda}(\lambda I - T)|_{M_\infty} \cdot K_1 \left(\frac{I}{\xi_0 - \lambda} - K_1\right)^{-1} = I$ sur M_∞ .

On montre de même que:

$$\frac{1}{\xi_0 - \lambda} \cdot K_1 \left(\frac{I}{\xi_0 - \lambda} - K_1\right)^{-1} (\lambda I - T)|_{M_\infty} = I \text{ sur } D(T) \cap M_\infty.$$

d'où l'on déduit que:

$((\lambda I - T)|_{M_\infty})^{-1} = \frac{1}{\xi_0 - \lambda} \cdot K_1 \left(\frac{I}{\xi_0 - \lambda} - K_1\right)^{-1}$ qui est fermé et partout défini sur M_∞ donc borné (par le théorème du graphe fermé). Par suite, comme $s_n(B \cdot K_1) \leq \|B\| \cdot s_n(K_1)$ pour tout opérateur B borné, on a:

$$s_n(\lambda I - T)^{-1}|_{M_\infty} = \mathbf{o}(n^{-1/p}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Démonstration du Théorème 2. La démonstration du Théorème 2 repose sur la proposition précédente et le théorème de Macaev [6] rappelé ci-dessous:

Théorème 4 (Macaev [6]). *Soit K un opérateur quasi-nilpotent, on note $M(r)$ ($0 \leq r < \infty$) la fonction:*

$$M(r) = \text{Max}_{|\lambda|=r} \|(I - \lambda K)^{-1}\|$$

Si $s_n(K) = O(n^{-1/p})$, (respectivement $\mathbf{o}(n^{-1/p})$) pour un certain $p > 0$, alors $\text{Log } M(r) = O(r^p)$ (respectivement $\mathbf{o}(r^p)$). Si $K \in \ell_p$, on a de plus:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log } M(r)}{r^{p+1}} dr < \infty.$$

En vertu de ce théorème et de l'hypothèse H_3 de notre théorème, la fonction $f(\lambda) = \langle (\lambda I - T)^{-1}\varphi, \psi \rangle$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in M_\infty$ et $\psi \in E$ vérifie les hypothèses du principe de Phragmén-Lindelöf [13], elle est donc bornée sur tous les secteurs limités par les demi-droites $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, c'est à dire sur \mathbb{C} tout entier; f fonction entière bornée sur \mathbb{C} est donc constante. D'autre part, de l'hypothèse H_4 de notre théorème, on déduit que f est identiquement nulle. Ainsi, pour tout $\varphi \in M_\infty$ et $\psi \in E$, $\langle (\lambda I - T)^{-1}\varphi, \psi \rangle = 0$ donc $(\lambda I - T)^{-1}\varphi = 0$ et par injectivité de $(\lambda I - T|_{M_\infty})^{-1}$ on obtient $M_\infty = \{0\}$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3. Notre théorème généralise d'autres théorèmes établis sur la densité des vecteurs propres généralisés, présentés ci-dessous sous forme simplifiée:

Théorème 5 (Macaev [6]). *Soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans un espace de Hilbert E et $1 \leq p < \infty$ vérifiant:*

i) *Il existe $\xi_0 \in \varrho(T)$ tel que l'opérateur $K = (T - \xi_0 I)^{-1}$ soit compact, et tel que $s_n(K) = \mathbf{o}(n^{-1/p})$ lorsque n tend vers l'infini.*

ii) *Il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'image numérique de l'opérateur T soit*

$$\text{incluse dans le secteur } S_p = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{2p} + \varepsilon \leq \text{Arg}(\lambda) \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon \right\}.$$

Alors l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de T est dense dans E .

L'ingrédient essentiel permettant de déduire ce théorème de notre théorème est le lemme suivant:

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, sur toute demi-droite γ du plan complexe issue de l'origine et n'appartenant pas au secteur S_p , la norme de la résolvante $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$ est bornée indépendamment de λ .*

Démonstration. On suppose par exemple que $0 \in \varrho(T)$, on en déduit que $\langle T^{-1}\psi, \psi \rangle / \|\psi\|^2 \in S_p \forall \psi \in E$. Soit $\lambda \in \gamma$ avec $|\lambda|$ assez grand et n'appartenant pas au secteur S_p , on a:

$$\left| \frac{1}{\lambda} - \langle T^{-1}\psi, \psi \rangle / \|\psi\|^2 \right| \geq |\sin(\theta_0)| / |\lambda|$$

où θ_0 désigne le plus petit des deux angles formés par la demi-droite γ et les bords du secteur S_p . En simplifiant par $|\lambda|$ on obtient:

$$|\langle (I - \lambda T^{-1})\psi, \psi \rangle| \geq \|\psi\|^2 \cdot |\sin(\theta_0)|.$$

D'où on déduit (en appliquant l'inégalité de Cauchy) que:

$$\|(I - \lambda T^{-1})^{-1}\| \leq 1 / |\sin(\theta_0)|.$$

Enfin, comme $(T - \lambda I)^{-1} = T^{-1}(I - \lambda T^{-1})^{-1}$ on obtient

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| / |\sin(\theta_0)|,$$

ce qui prouve que la résolvante est uniformément bornée sur γ .

Théorème 6 (Keldys [6]). *Soit E un espace de Hilbert.*

1) Soient H un opérateur auto-adjoint de classe ℓ_p de Carleman, S un opérateur compact et $A = H(I + S)$. Si l'opérateur A est injectif, alors le système de ses vecteurs propres généralisés est dense dans E .

2) Soit $A = L + T$, où L est un opérateur auto-adjoint à spectre discret, c'est-à-dire son spectre est formé de valeurs propres isolées de multiplicité finie avec un seul point d'accumulation à l'infini, et T un opérateur L -compact. On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \varrho(L)$ tel que l'opérateur $(L - \lambda_0 I)^{-1} T (L - \lambda_0 I)^{-1}$ soit de classe ℓ_p de Carleman. Alors le système des vecteurs propres généralisés de l'opérateur A est dense dans E .

Théorème 7 (Reed et Simon [11]). 1) Soit A un opérateur à trace et strictement m -accrétif c'est-à-dire qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'image numérique de l'opérateur A soit incluse dans le secteur $S_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \text{Arg}(\lambda) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}$.

Alors l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de A est dense dans E .

2) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe de contraction. On suppose que $(A + I)^{-1}$ est un opérateur à trace. Alors l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de A est dense dans E .

3. Application à l'opérateur de Gribov

La théorie des champs de reggeons a été inventée par Gribov en 1967 [5] afin de décrire le comportement à haute énergie des sections efficaces de collisions de particules élémentaires. Elle est caractérisée par une famille d'opérateurs non auto-adjoints s'exprimant en fonction des opérateurs de création et d'annihilation usuels.

A n sites et en une dimension transverse, la famille d'opérateurs de Gribov se présente sous la forme:

Soit

$$H = \lambda' \sum_{j=1}^n S_j + \mu \sum_{j=1}^n H_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} H_{12j} + i\lambda \sum_{j=1}^n H_{2j} = \text{Re} \cdot H + i \text{Im} \cdot H; \quad i^2 = -1$$

où

$$\begin{aligned} - S_j &= A_j^{*2} A_j^2 \\ - H_{1j} &= A_j^* A_j \\ - H_{12j} &= A_{j+1}^* A_j + A_j^* A_{j+1} \\ - H_{2j} &= A_j^* (A_j + A_j^*) A_j \end{aligned}$$

avec $(\lambda', \mu, \alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^4$.

Cette famille d'opérateurs non auto-adjoints agit sur l'espace de Bargmann-Segal [3]:

$$E = \left\{ \varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytiques; } \int_{\mathbb{C}^n} \text{Exp} \left(- \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) |\varphi(z)|^2 dz_j d\bar{z}_j < \infty \right. \\ \left. \text{et } \varphi(0) = 0 \right\}.$$

Dans cette représentation les opérateurs A_j^* et A_j ne sont autres que la multiplication par z_j et la dérivation par rapport à z_j .

H s'écrit ainsi:

$$H = \sum_{j=1}^n (\lambda' z_j^2 + i\lambda z_j) \partial^2 / \partial z_j^2 + (i\lambda z_j^2 + \mu z_j) \partial / \partial z_j + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} (z_{j+1} \partial / \partial z_j + z_j \partial / \partial z_{j+1}).$$

Pour cette famille d'opérateurs, Ando, Intissar et Zerner ont développé dans [2, 7, 9] une théorie spectrale complète: Définition du domaine, construction du semi-groupe associé, analyse spectrale et comportement asymptotique de ce semi-groupe, analyticité de la plus petite valeur propre de H par rapport au paramètre μ (intercept de Pomeron) et développement en série entière par rapport au paramètre α (pente de la trajectoire de Regge).

Nous commençons par préciser quelques notations et donner sous forme d'une proposition quelques propriétés spectrales de l'opérateur H étudiées dans [7].

- P_0 désigne l'ensemble des polynômes qui s'annulent à l'origine.
- $S = \sum_{j=1}^n S_j$ de domaine $D(S) = \{\varphi \in E; S\varphi \in E\}$.
- le domaine maximal de H est $D(H) = \{\varphi \in E; H\varphi \in E\}$.
- Le domaine minimal de H est:

$$D_{\min}(H) = \{\varphi \in E; \exists p_n \in P_0 \text{ et } \exists \psi \in E; p_n \rightarrow \varphi \text{ et } H_{p_n} \rightarrow \psi\}.$$

Alors on a:

Proposition 3. (Intissar [7]). i) Pour $\lambda' \neq 0$, $D(H) = D_{\min}(H) = \bigcap_{j=1}^n D(A_j^4) = D(S)$.

ii) Pour $\lambda' \neq 0$ il existe $\beta > 0$; $H + \beta I$ soit bijectif.

Théorème 8. 1) Pour $\lambda' > 0$, H est un opérateur à résolvante de classe ℓ_p ($p > n/2$) de Carleman.

2) Pour $\lambda' > 0$ il existe $\beta_0 > 0$ tel que $H + \beta_0 I$ soit accr tif et d'image numérique incluse dans un secteur d'ouverture π/p .

3) Pour $\lambda' > 0$, le sous espace engendré par les vecteurs propres généralisés de H est dense dans l'espace de Bargmann-Segal.

Démonstration. 1) Soit $H_1 = \mu \sum_{j=1}^n H_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} H_{12j} + i\lambda \sum_{j=1}^n H_{2j}$ donc

$$H + \beta I = \lambda' S + \beta I + H_1 = (I + H_1(\lambda' S + \beta I)^{-1})(\lambda' S + \beta I)$$

d'où ($H + \beta I$)⁻¹ = ($\lambda' S + \beta I$)⁻¹($I + H_1(\lambda' S + \beta I)^{-1}$)⁻¹, l'opérateur ($\lambda' S + \beta I$) est auto-adjoint positif et ses valeurs propres sont

$$\beta_{k_1 k_2 \dots k_n} = \lambda'(k_1(k_1 - 1) + (k_2(k_2 - 1) + \dots + k_n(k_n - 1)) + \beta.$$

Si $p \geq n/2$ la série $\sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_2 \geq 1} \dots \sum_{k_n \geq 1} (1/\beta_{k_1 k_2 \dots k_n})^p$ est convergente. Comme

($\lambda' S + \beta I$)⁻¹ appartient au moins à ℓ_p ($p > n/2$) alors il en est de même pour ($H + \beta I$)⁻¹.

2) La démonstration de ces propriétés repose sur le lemme suivant [7, p. 267]

Lemme 2 (Intissar [7]). 1) Soit $j \in [1, n]$, et k un entier non nul, alors pour tout p polynôme en A_j et A_j^* de degré $r < 2k$ on a: $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $\forall \varphi \in D(A_j^{2k}); |\langle p(A_j, A_j^*)\varphi, \varphi \rangle| \leq \varepsilon \langle A_j^{*k} A_j^k \varphi, \varphi \rangle + C_\varepsilon \|\varphi\|^2$.

2) Soit $j \in [1, n]$, pour tout entier k , on a: $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $\forall \varphi \in D(A_j^{k+1})$;
 $\|A_j^k \varphi\|^2 \leq \varepsilon \|A_j^{k+1} \varphi\|^2 + C_\varepsilon \|\varphi\|^2$.

De ce lemme, on déduit que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $|\operatorname{Im}\langle H\varphi, \varphi \rangle| \leq |\lambda| \varepsilon \langle S\varphi, \varphi \rangle + |\lambda| C_\varepsilon \|\varphi\|^2 \forall \varphi \in D(S)$ et donc $|\operatorname{Im}\langle H\varphi, \varphi \rangle| \leq \frac{\lambda}{\lambda'} |\varepsilon \langle \lambda' S\varphi, \varphi \rangle + |\lambda| C_\varepsilon \|\varphi\|^2 \forall \varphi \in D(S)$.

Comme $\alpha \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} (A_{j+1}^* A_j + A_j^* A_{j+1}) \varphi, \varphi \right\rangle \geq -2|\alpha| \sum_{j=1}^n \|A_j \varphi\|^2$, il en résulte que

$$\operatorname{Re}\langle H\varphi, \varphi \rangle \geq \langle \lambda' S\varphi, \varphi \rangle - (|\mu| + 2|\alpha|) \sum_{j=1}^n \langle A_j^* A_j \varphi, \varphi \rangle.$$

En appliquant à nouveau le lemme précédent $\langle A_j^* A_j \varphi, \varphi \rangle$; $1 \leq j \leq n$, on obtient:

$$\forall \delta > 0, \exists C_\delta > 0; \operatorname{Re}\langle H\varphi, \varphi \rangle \geq \langle \lambda' S\varphi, \varphi \rangle - (|\mu| + 2|\alpha|)(\delta/\lambda') \langle \lambda' S\varphi, \varphi \rangle - (|\mu| + 2|\alpha|) C_\delta \|\varphi\|^2.$$

En choisissant $\delta \leq \lambda'/(|\mu| + 2|\alpha|)$ et $\beta \geq (|\mu| + 2|\alpha|) C_\delta$ on en déduit que $H + \beta I$ est un opérateur accréatif. Maintenant, si on choisit

$$\varepsilon < (\lambda'/|\lambda|) \operatorname{tg}(\pi/2p) \cdot (1 - (|\mu| + 2|\alpha|)(\delta/\lambda'))$$

et $\beta_0 > (|\mu| + 2|\alpha|) C_\delta + (|\lambda| C_\varepsilon / \operatorname{tg}(\pi/2p))$, on déduit que $H + \beta I$ est accréatif et que son image numérique est incluse dans le secteur d'ouverture π/p .

3) Il suffit d'appliquer le Théorème 2 ou le Théorème 5.

Bibliographie

1. Aimar, M.T., Intissar, A. et Paoli, J.M.: Densité des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs compacts non auto-adjoints. C. R. Acad. Sci. Paris, **315**, Série I (1992)
2. Ando, T. et Zerner, M.: Sur une valeur propre d'un opérateur. Commun. Math. Phys. **93** (1984)
3. Bargmann, V.: On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I. Commun. Pure App. Math **14** (1962)
4. Dunford, N, Schwartz, J.T.: Linear operators. II, III. In: Pure Appl. Math., Vol 7. New York: Interscience, 1963
5. Gribov, V.: J.E.T.P (Sov. Phys), **26** (1968), 414
6. Gohberg, I.C., Krein, M.G.: Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. A.M.S **18** (1969)
7. Intissar, A.: Etude spectrale d'une famille d'opérateurs non-symétriques intervenant dans la théorie des champs de reggeons. Commun. Math. Phys. **113** (1987)
8. Intissar, A.: Quelques nouvelles propriétés spectrales de l'hamiltonien de la théorie des champs de reggeons. C. R. Acad. Sci. Paris **308** Série I (1989)
9. Intissar, A.: Théorie spectrale dans l'espace de Bargmann. Cours de D.E.A, Université de Besançon (1989)
10. Lang, P., Locker, J.: Denseness of the generalized eigenvectors of an $H - S$ discrete operator. J. Funct. Anal. **82**, No. 2 (1989)
11. Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. London, New York: Academic Press, 1978
12. Taylor, A.E., Lay, D.C.: Introduction to functional analysis. New York: Wiley, 1980
13. Titchmarsh, E.C.: The theory of functions. Oxford: Oxford University Press

