Quelques remarques concernant la théorie des corps ordonnés différentiellement clos

Christian Michaux Cédric Rivière *

Résumé

Nous commençons par donner une axiomatisation de caractère géométrique de la théorie des corps ordonnés différentiellement clos (notée $CODF$) introduite par M. Singer en 1978 (voir [Si]). Nous nous basons pour cela sur une construction similaire de D. Pierce et A. Pillay concernant la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro (notée DCF_0, voir [PP]). Nous remarquons ensuite qu'un principe de *relèvement différentiel* permet de montrer que $CODF$ n'a pas la propriété d'indépendance (en d'autres termes, ses ensembles définissables ont une dimension de Vapnik-Chervonenkis finie). La méthode de preuve utilisée ici peut s'appliquer à d'autres exemples de théories de corps différentiels.

Abstract

We first propose a "geometrical" axiomatization for the theory of closed ordered differential fields (denoted CODF) introduced by M.Singer in 1978 (see [Si]). This axiomatization is the analogue of the Pierce-Pillay axiomatization for the theory of differentially closed fields of characteristic zero (see [PP]). We also remark that a *differential lifting* principle can be used to prove that $CODF$ has not the independence property (this result gives new examples of V-C classes of definable sets). The proof used here can be generalized to other examples of theories of differential fields.

*Cette recherche a bénéficié des supports du projet INTAS 2000-447 et d'un projet financé par la Banque Nationale de Belgique. Le second auteur est doctorant boursier du FRIA.

Received by the editors September 2003.

Communicated by F. Point.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 3C10, 12H05, 12J15.

Key words and phrases : closed ordered differential fields, geometrical axiomatization, independence property, V-C classes.

1 Axiomatisation géométrique de la théorie des corps ordonnés différentiellement clos

1.1 Quelques rappels concernant CODF

Dans ce qui suit nous utiliserons des résultats classiques d'algèbre différentielle, de géométrie algébrique et de théorie des modèles sans en préciser les références. On peut les trouver dans [Ho], [Ka], [Lg], et [Sh]. La notion de corps ordonné différentiel a été introduite par A.Robinson en 1973 (voir [Ro]) ; en 1978, M.Singer montre que la théorie des corps ordonnés différentiels admet une modèle-complétion qu'il appelle la théorie des corps ordonnés différentiellement clos et qu'il note CODF (voir [Si]). Plus tard, C. Michaux [Mi] donne un cadre général pour un "relèvement" des modèles-complétions de théories de corps en modèles-complétions de théories de corps différentiels (la théorie $CODF$ entre dans ce cadre). Avant de donner l'axiomatisation de Singer, nous présentons quelques rappels d'algèbre différentielle : un corps ordonné differentiel est un corps (commutatif) k ordonné muni d'une dérivation c'est-à-dire d'une application $D : k \to k$ vérifiant les deux axiomes suivants : $\forall a, b \ D(a+b) = D(a) + D(b)$ et $\forall a, b \ D(a * b) = D(a) * b + a * D(b)$ (nous ne supposons aucune interaction entre l'ordre et la derivée). On note par $k\{x\}$ l'anneau $k[x, x', x'', ...]$ des polynômes différentiels en la variable x ; soit $f(x) \in k\{x\}$, on définit l'ordre de f comme étant le plus grand naturel n tel que $x^{(n)}$ apparaisse dans f (on prend pour convention que l'ordre d'un polynôme constant non nul est -1 et que celui du polynôme nul est $-\infty$). Considérons le langage $L'_< = \{+, *, -, ', 0, 1, <\}$, l'axiomatisation de CODF proposée par Singer est la suivante : un corps ordonné différentiel (k, D) est dit différentiellement clos si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. k est un corps réel clos
2. Pour tous polynômes différentiels $f, g_1, g_2, ..., g_l \in k\{x\}$ tels que $n = ord\ f > ord\ g_i > -\infty$ pout chaque i, s'il existe une solution $\bar{c} = (c_0, c_1, ..., c_n)$ au système non différentiel

$$f(\bar{c}) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(\bar{c}) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} g_i(\bar{c}) > 0$$

alors il existe une solution z au système différentiel

$$f(z) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} g_i(z) > 0$$

1.2 Résultats préliminaires

Commençons par fixer le contexte ; soit k un corps ordonné différentiel et soit K une extension réelle close universelle[1] de k, nous pouvons considérer la clôture algébrique $\bar{K} = K(i)$ de K (où $i^2 = -1$). Nous allons à présent rappeler quelques

[1]Pour un logicien cela signifie suffisamment saturé ; en particulier K contient suffisamment d'éléments infinitésimaux algébriquement indépendants.

définitions et résultats de géométrie algébrique (nous gardons la terminologie de l'article [PP]).

Définition 1.1. *1. Les sous-ensembles de $\bar{K}^n$ de la forme $V(I) = \{\bar{a} \in \bar{K}^n \mid \forall p \in I\ p(\bar{a}) = 0\}$ où I est un idéal de $k[x_1, ..., x_n]$ sont les fermés d'une topologie appelée topologie de Zariski. Si I est premier, $V(I)$ est irréductible et est appelé variété de $\bar{K}^n$ (définie sur k).*

2. Soit $\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in \bar{K}^n$, posons $I(\bar{a}) = \{p \in k[x_1, ..., x_n] \mid p(\bar{a}) = 0\}$; si V est une variété de $\bar{K}^n$ telle que $V = V(I(\bar{a}))$, alors nous dirons que $\bar{a}$ est un point générique de V.

Proposition 1.2. *Soient une variété V de $\bar{K}^n$ et $\bar{a} \in V$; les conditions suivantes sont équivalentes :*
. $\bar{a}$ est un point générique de V ;
. le degré de transcendance de $k(\bar{a})$ sur k est maximal parmi les points de V ;
. $\bar{a}$ appartient à tous les ouverts de Zariski (non vides) contenus dans V ;

Preuve : immédiate.

Définition 1.3. *Soient V une variété de $\bar{K}^n$ et $\bar{a} \in V$,*

1. le torseur associé à V en $\bar{a}$ est l'ensemble

$$\tau_{\bar{a}}(V) = \{\bar{v} \in \bar{K}^n \mid p^d(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i p(\bar{a}) * v_i = 0 \text{ pour tout } p \in I(V)\}$$

où $I(V)$ est l'idéal des polynômes s'annulant en tous les points de V et $p^d(\bar{x})$ est le polynôme obtenu en dérivant les coefficients de p ;

2. le fibré torseur associé à V est

$$\tau(V) = \{(\bar{a}, \bar{v}) \in \bar{K}^{2n} \mid \bar{a} \in V \wedge \bar{v} \in \tau_{\bar{a}}(V)\}$$

Remarquons que, par le caractère noethérien de $k[x_1, ..., x_n]$, les ensembles $\tau_{\bar{a}}(V)$ et $\tau(V)$ sont définissables au 1^{er} ordre dans le langage des anneaux.

Théorème 1.4. *Soient $\bar{a} \in \bar{K}^n$ un point générique d'une variété V définie sur k , $\bar{b} \in \tau_{\bar{a}}(V)$ et $W = V(I(\bar{a}, \bar{b}))$ une variété dans $\tau(V)$; alors il existe $\bar{c} \in k(\bar{a}, \bar{b})^n$ et une dérivation $D^\star$ sur $k(\bar{a}, \bar{b})$ étendant D et telle que $D^\star(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c})$.*

Preuve : ce résultat est un corollaire immédiat du théorème 1.1 et du corollaire 1.7 de [PP].

1.3 Axiomatisation

Dans leur axiomatisation de DCF_0, Pierce et Pillay utilisent le fait que les points génériques d'une variété V appartiennent aux ouverts de Zariski inclus à cette variété (cf. prop 1.2). Dans le cas des corps ordonnés, un ouvert U est un ouvert au sens de la topologie définissable associée à l'ordre (un ouvert de base U est défini par une conjonction finie d'inéquations $g_1(\bar{x}) > 0, \ldots, g_n(\bar{x}) > 0$). Ceci nécessite d'introduire une hypothèse supplémentaire dans nos axiomes.

Auparavant, remarquons que si $\bar{a}$ est un point générique de V, nous pouvons supposer que $a_1, \ldots, a_r$ sont algébriquement indépendants sur k et que $a_{r+1}, \ldots, a_n$ sont algébriques sur $k(a_1, \ldots, a_r)$. Appelons Q_i le polynôme obtenu à partir du polynôme minimal de a_{r+i} sur $k(a_1, \ldots, a_{r+i-1})$ en remplaçant $a_1, \ldots, a_{r+i-1}$ par les indéterminées $x_1, \ldots, x_{r+i-1}$ et en éliminant les dénominateurs. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I(V) &= \langle Q_1, \ldots, Q_{n-r}\rangle : H(Q_1, \ldots, Q_{n-r})^\infty \\ &= \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid H(Q_1, \ldots, Q_{n-r})^n \cdot f \in \langle Q_1, \ldots, Q_{n-r}\rangle \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour un certain naturel } n\} \end{aligned}$$

où $H(Q_1, \ldots, Q_{n-r})$ est le produit des coefficients dominants de chaque Q_i considéré comme un polynôme en la variable X_{r+i} et à coefficients dans $K(X_1, \ldots, X_{r+i-1})$.

Définition 1.5. *1. Les Q_i sont appelés générateurs canoniques de la variété V*

2. Si $\bar{a}$ est un point de la variété V tel que $H(Q_1, \ldots, Q_{n-r})(\bar{a}) \neq 0$ et $\frac{\partial Q_i}{\partial x_{r+i}}(\bar{a}) \neq 0$ pour chaque i dans $\{1, \ldots, n-r\}$, alors nous dirons que $\bar{a}$ est un point semi-générique de V (remarquons qu'un point générique est toujours semi-générique).

Remarque : Nous noterons $\frac{\partial Q_i}{\partial x_{r+i}}(\bar{x})$ par $s_{Q_i}(\bar{x})$.

Axiomatisation "géométrique" : Soit (k, D) un corps ordonné différentiel, on dit que (k, D) est un corps ordonné différentiel géométriquement clos si

(1) k est un corps réel clos ;
(2) soient $V \subset \bar{K}^n$ et $W \subset \tau(V)$ des variétés définies sur k et telles que W se projette génériquement sur V et soit U un ouvert de $W\mid_K$; si $U\mid_k$ contient un point semi-générique de W alors $U\mid_k$ contient un point de la forme $(\bar{c}, D(\bar{c}))$.

Proposition 1.6. *Soient V, W et U vérifiant les hypothèses de l'axiome (2), alors U contient un point générique $(\bar{c}, \bar{d})$ de $W\mid_K$ tel que $k(\bar{c}, \bar{d})$ soit un corps ordonné différentiel.*

Preuve : Nous allons prouver un résultat un peu plus général : étant donné n'importe quel point semi-générique de W, on peut trouver un point générique de W infinitésiment proche de ce point. Soient donc $(\bar{a}, \bar{b})$ un point semi-générique de $W\mid_K$ appartenant à U et $Q_1, \ldots, Q_{2n-(r+s)}$ des générateurs canoniques de W (où r=dim V et r+s=dim W). Dans K, prenons $t_1, \ldots, t_r, u_1, \ldots, u_s$ des éléments algébriquement indépendants sur $k(\bar{a}, \bar{b})$ et infinitésimaux par rapport à $k(\bar{a}, \bar{b})$. Posons $c_k = a_k + t_k$ pour $k = 1, \ldots, r$ et $d_l = b_l + u_l$ pour $l = 1, \ldots, s$, de telle sorte que $Q_1(c_1, \ldots, c_r, a_{r+1})$ et $Q_{n-r+1}(c_1, \ldots, c_r, a_{r+1}, \ldots, a_n, d_1, \ldots, d_s, b_{s+1})$ sont infinitésiment proches de 0.
Considérons à présent le développement taylorien suivant :

$$Q_1(c_1, \ldots, c_r, a_{r+1} + h) = Q_1(c_1, \ldots, c_r, a_{r+1}) + s_{Q_1}(c_1, \ldots, c_r, a_{r+1}) * h + O(h).$$

Puisque les t_i sont infinitésimaux, le membre de droite de cette égalité prendra le signe de h si nous supposons que $s_{Q_i}(\bar{a}, \bar{b}) > 0$ (il prendra le signe de $-h$ dans le cas contraire et la suite de la démonstration sera similaire). Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et trouver un t_{r+1} dans K qui annule le membre de gauche de l'égalité. D'autre part, le fait que t_{r+1} annule le membre de gauche de cette égalité implique qu'il est infinitésimal sur $k(\bar{a}, \bar{b})$. En posant $c_{r+1} = a_{r+1} + t_{r+1}$ et en itérant la même construction récursivement pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-r\}$ et ensuite chaque $j \in \{1, \ldots, n-s\}$, nous trouvons un élément $(\bar{c}, \bar{d})$ infiniment proche de $(\bar{a}, \bar{b})$ et qui appartient à W. De plus, l'indépendance algébrique des t_k, u_l pour $k = 1, \ldots, r$ et $l = 1, \ldots, s$ garantit l'indépendance algébrique des c_k, d_l pour ces même valeurs de k et l. Donc, en appliquant la proposition 1.2 et le théorème 1.4, nous prouvons que le point $(\bar{c}, \bar{d})$ est bien tel qu'annoncé.

Remarquons que dans cette preuve, l'ordre relatif des t_k, u_l ne joue aucun rôle, nous n'utilisons que leur caractère infinitésimal et leur indépendance algébrique.

Théorème 1.7. *Les axiomes (1) et (2) définissent la modèle-complétion de la théorie des corps ordonnés différentiels (ils sont par conséquent équivalents à ceux donnés par M. Singer dans [Si] et constituent une axiomatisation de CODF).*

Preuve : Nous allons montrer que les modèles de (1) et (2) sont exactement les corps ordonnés différentiels existentiellement clos.
a)Soit (k, D) un corps ordonné différentiel existentiellement clos (il est donc réel clos) ; si V, W et U vérifient les hypothèses de (2), nous pouvons appliquer la proposition 1.6 afin d'obtenir une extension $(k(\bar{c}, \bar{d}), D^\star)$ de (k, D) vérifiant la formule $(\exists \bar{x}, \bar{y})\ ((\bar{x}, \bar{y}) \in U \wedge \bar{x}' = \bar{y})$. Puisque (k, D) est existentiellement clos, les axiomes sont bien vérifiés.
b)Soit maintenant (k, D) un modèle de (1) et (2), soient $(L, D^\star) \supset (k, D)$, $\bar{a} \in L$ et $\phi(\bar{x})$ une formule sans quantificateur à paramètres dans k telle que $(L, D^\star) \models \phi(\bar{a})$. La formule $\phi(\bar{x})$ est équivalente à la formule $\psi(\bar{x_0}, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_r}) \wedge \bar{x_1} = \bar{x_0}' \wedge \ldots \wedge \bar{x_r} = \bar{x_{r-1}}'$ où ψ est une formule du langage des anneaux. Considérons la formule $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \psi(\bar{x_0}, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_{r-1}}, \bar{y_{r-1}}) \wedge \bar{x_1} = \bar{y_0} \wedge \ldots \wedge \bar{x_{r-1}} = \bar{y_{r-2}}$ et soient $\bar{c} = (\bar{a}, D^\star(\bar{a}), \ldots, D^{\star(r-1)}(\bar{a}))$, $V = V(I(\bar{c}))$ et $W = V(I(\bar{c}, D^\star \bar{c}))$. Si $\bar{L}$ est la clôture réelle de L alors $\bar{L} \models \exists \bar{x}, \bar{y}\ (\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge (\bar{x}, \bar{y})$ est un point semi-générique de $W)$. Puisque k est réel clos, il vérifie également cette formule et donc si U est l'ouvert défini par la partie négative de $\bar{\psi}$, $U\mid_k$ contient un point semi-générique de W et nous pouvons appliquer l'axiome (2). Nous obtenons ainsi un point $(\bar{d}, D(\bar{d}))$ dans k tel que $k \models \bar{\psi}(\bar{d}, D(\bar{d}))$, ce qui implique $k \models \phi(\bar{d_0})$ pour un sous-uple convenable $\bar{d_0}$ de $\bar{d}$ et termine la preuve.

Remarque : Il est possible de généraliser cette construction afin d'obtenir une méthode uniforme pour caractériser géométriquement les modèles existentiellement clos de certaines théories de corps différentiels. Un article reprenant les détails de cette construction a récemment été soumis par N. Guzy et le second auteur (voir [GR]).

2 Les corps ordonnés différentiellement clos n'ont pas la propriété d'indépendance

2.1 La propriété d'indépendance

Avant de définir mathématiquement ce qu'est la propriété d'indépendance (que l'on notera PI), précisons que cette dernière est apparue durant les années septante dans les travaux de S. Shelah concernant la théorie de la stabilité (voir [Sh1, Sh2]). Elle peut être interpretée comme une mesure grossière de l'instabilité d'une théorie ; on peut dire qu'une théorie instable ne vérifiant pas la PI aura un comportement plus proche des théories stables qu'une théorie la vérifiant (pour plus de précisions et de résultats concernant la PI, on peut consulter le chapitre 12 de [Po]). Parmi les exemples classiques de théories n'ayant pas la PI, on trouve les théories stables (ceci se déduit directement de la définition ci-dessous) ainsi que les théories o-minimales (ce résultat datant de 1986 est dû à A. Pillay et C. Steinhorn, voir [PS]). Voici à présent la définition de la propriété d'indépendance :

Définitions 2.1. – *Soit T une théorie complète. Une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la PI dans T si cette dernière prouve chacun des énoncés I_n suivants, où les $\bar{x}$ sont indicés par $n = \{0, \ldots, n-1\}$ et les $\bar{y}$ par l'ensemble des parties de n c'est-à-dire 2^n :*

$$(\exists \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_i, \ldots \bar{x}_{n-1})(\exists \bar{y}_\phi, \ldots, \bar{y}_w, \ldots, \bar{y}_{2^n-1})(\bigwedge_{i \in w} \phi(\bar{x}_i, \bar{y}_w)) \wedge (\bigwedge_{i \notin w} \neg\phi(\bar{x}_i, \bar{y}_w))$$

– *T a la PI s'il existe une formule $\phi(x, \bar{y})$ qui a la PI dans cette théorie.*

remarque : Le fait que l'on puisse se restreindre aux formules du type $\phi(x, \bar{y})$ dans la seconde définition ci-dessus est un résultat de S. Shelah qui peut se prouver par induction sur la longueur du uple $\bar{x}$ via le théorème de Ramsey (voir [Po], page 327 et suivantes).

2.2 Résultats et remarques

Nous allons maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 2.2. *La théorie CODF n'admet pas la propriété d'indépendance.*

Preuve : Nous allons procéder par l'absurde en supposant qu'il existe une $L'_<$-formule $\phi(x, \bar{y})$ qui a la PI par rapport à $CODF$. Puisque $CODF$ admet l'élimination des quantificateurs dans $L'_<$, nous pouvons supposer que cette formule est sans quantificateur et s'écrit sous la forme $\phi(x, \ldots, x^{(r)}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(s)})$ où aucun symbole de dérivation ne porte sur les coefficients y apparaissant. Considérons la formule non différentielle $\phi^c(x_0, \ldots, x_r, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_s)$ telle que $\phi(x, \bar{y})$ est équivalente à la formule

$$\phi^c(x_0, \ldots, x_r, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_s) \wedge x_1 = {x_0}' \wedge \ldots \wedge x_r = {x_{r-1}}' \wedge \bar{y}_1 = \bar{y_0}' \wedge \ldots \wedge \bar{y}_s = \bar{y}_{s-1}'$$

Il est clair que la satisfaction de ϕ entraîne la satisfaction de ϕ^c et, puisque la première a la PI par rapport $CODF$, nous pouvons déduire que pour tout naturel n et tout modèle K de $CODF$,

$$K \models (\exists X_0, \ldots, X_{n-1})(\exists \bar{Y}_0, \ldots, \bar{Y}_{2n-1})(\bigwedge_{i \in w} \phi(X_i, \bar{Y}_w)) \wedge (\bigwedge_{i \notin w} \neg\phi(X_i, \bar{Y}_w))$$

où les X_i et les $\bar{Y}_j$ sont respectivement des éléments de K^{r+1} et $K^{l*(s+1)}$ avec l étant la longueur du uple $\bar{y}$ apparaissant dans ϕ. Nous avons ainsi trouvé une formule du langage des anneaux ordonnés ϕ^c qui a la PI par rapport à K. Ce dernier étant ordonné différentiellement clos, il est en particulier réel clos (voir l'axiomatisation de $CODF$ ci-dessus) et donc nous arrivons à une contradiction (la théorie des corps réels clos est o-minimale et donc elle ne vérifie pas la PI).

Remarques :

(i) La démonstration ci-dessus peut se généraliser à d'autres théories de corps (ou d'anneaux) différentiels ayant l'élimination des quantificateurs et dont la théorie de corps (ou d'anneaux) n'a pas la PI. Par exemple, elle peut s'appliquer à la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique 0 ; même si, dans ce cas, le résultat peut se déduire directement de la stabilité de la théorie. Ce type de résultat concernant la PI et obtenu par un principe de relèvement n'est pas nouveau. Par exemple F. Delon a montré que, sous les hypothèses du théorème d'Ax-Kochen, un corps valué n'a pas la PI pourvu que son corps des restes ne l'ait pas ([De]).

(ii) Il est intéressant de souligner qu'une notion de contenu combinatoire identique à la propriété d'indépendance a été introduite par V. N. Vapnik et A. Y. Chervonenkis en 1971 ([VC]). Cette notion, appelée dimension de Vapnik-Chervonenkis (ou V-C dimension) a acquis une grande réputation dans le domaine de la statistique et, sans entrer ici dans les détails, il peut être intéressant de trouver de nouveaux exemples de classes d'ensembles définissables ayant une V-C dimension finie (on appelle de telles classes des V-C classes). A cette fin, M. Laskowski, reprenant des résultats apparus dans le chapitre 12 de [Po], énonce en 1992 le théorème suivant qui met en parallèle la notion modèle théorique de PI et celle combinatoire de V-C dimension :

Théorème 2.3. *Soient $A \models T$ et $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)$ une formule du langage de T, on définit :*

– pour $\bar{b} \in A^k$, $\phi_{\bar{b}} = \{\bar{c} \in A^k | A \models \phi(\bar{c}, \bar{b})\}$,

– $\phi_A = \{\phi_{\bar{b}} | \bar{b} \in A^k\}$,

alors ϕ_A est une V-C classe ssi ϕ n'a pas la PI par rapport à T.

Preuve : voir [La].

En conclusion, nous pouvons donc affirmer que les classes d'ensembles définissables dans CODF donnent de nouveaux exemples de V-C classes.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les rapporteurs pour leurs remarques et commentaires avisés ainsi que F. Point pour son aide précieuse apportée lors de la réalisation de ce travail. De plus, une première version de ce travail comportait une imprécision dans la définition 1.5. Nous remercions N. Guzy de nous avoir signalé celle-ci.

Références

[De] Delon F., *Corps avec ou sans propriété d'indépendance*, Séminaire de Structures Algébriques Ordonnées 1995/1996 (notes manuscrites), Prépublications de l'Equipe de Logique de Paris 7, n61, 1997.

[GR] Guzy N., Rivière C., *Principle of differential lifting for theories of differential fields and Pierce-Pillay axiomatization*, soumis.

[Ho] Hodges W., *Model theory*, Cambridge University Press (1993).

[Ka] Kaplansky I., *An introduction to differential algebra*, Hermann (1955).

[La] Laskowski M., *Vapnik-Chervonenkis classes of definable sets*, J. Lond. Math. Soc. 2, Serv. 45, number 2 (1992), pp. 377-384.

[Lg] Lang S., *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1970).

[Mi] Michaux C., *Differential fields, machines over the real numbers and automata*, Thèse UMH (1991)

[PP] Pierce D., Pillay A., *A note on the axioms for differentially closed fields of characteristic zero*, J. of Algebra 204 (1998),pp. 108-115.

[Ro] Robinson A. , *Ordered differential fields*, J. of Comb. Theory 14 (1973),pp. 324-333.

[Po] Poizat B., *Cours de théorie des modèles*, Nur al-mantiq wal-ma'rifah (1985).

[PS] Pillay A., Steinhorn C., *Definable sets in ordered structures 1*, Trans. AMS 295 (1986), pp. 565-592.

[Sh] Shafarevich I.R., *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag (1994).

[Sh1] Shelah S., *Stability,the f.c.p and superstability*, An. of Math. Logic 3 (1971), pp.271–362, 1971.

[Sh2] Shelah S., *Classification Theory*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[Si] Singer M., *The model theory of ordered differential fields*, J. Symb. Logic, 43 (1978), pp.82–91.

[VC] Vapnik V.N., Chervonenkis A.Y., *On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities*, Theory Prob. Appl. 16 (1971), pp.264-279.

Université de Mons-Hainaut,
Institut de Mathématique,
Place du Parc 20, 7000 Mons, Belgique
e-mail : christian.michaux@umh.ac.be, cedric.riviere@umh.ac.be