Sur le transfert de Becker et Gottlieb

Lucile Vandembroucq

Résumé

Soit $F \to E \to B$ une fibration dans laquelle E et B sont dans le domaine d'Anick et F est un CW-complexe fini. Nous montrons que le transfert défini par Becker et Gottlieb existe au niveau d'un modèle algébrique de la fibration. Avec les mêmes outils, nous donnons une preuve du théorème de l'inclusion de la fibre lorsque la cohomologie de celle-ci satisfait la dualité de Poincaré.

Abstract

Let $F \to E \to B$ be a fibration such that E and B are in the Anick range and F is a finite CW complex. We show that the transfer map defined by Becker and Gottlieb exists on the cochain level. With the same tools we give a proof of the theorem of the inclusion of the fibre when the cohomology of the fibre satisfies Poincaré duality.

Dans [4] Gottlieb montre que, pour une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ dont la fibre F est une variété compacte, connexe, orientable et de classe fondamentale $\omega \in H^n(F;\mathbf{Z})$, il existe une classe $\alpha \in H^n(E;\mathbf{Z})$ vérifiant $H^*(i)(\alpha) = \chi_F \cdot \omega$, où χ_F est la caractéristique d'Euler-Poincaré de F (Théorème de l'inclusion de la fibre). À partir de cette classe, Gottlieb définit un transfert qui généralise celui des revêtements : le transfert est une application $\tau : H^*(E;\mathbf{Z}) \to H^*(B;\mathbf{Z})$ de $H^*(B;\mathbf{Z})$-modules telle que la composée $\tau \circ H^*(p)$ est la multiplication par χ_F. À partir d'une généralisation de la dualité de Spanier-Whitehead, Gottlieb et Becker [1] étendent ce transfert à toute fibration de fibre un CW-complexe fini (cf [7] pour un exposé des travaux de Becker et Gottlieb sur le transfert).

Received by the editors June 1998.
Communicated by Y. Félix.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 55P62. 55R12.
Key words and phrases : Transfer. Sullivan models.

Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif. Nous considérons une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ dans laquelle les espaces E et B sont dans le domaine d'Anick (cf la définition ci-dessous) et $H^*(F;\mathbf{k})$ est de dimension finie. L'application p peut alors être modelée par une KS-extension $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$. Nous montrons qu'il existe un transfert pour cette KS-extension. Plus précisément, nous construisons un morphisme de ΛX-modules différentiels $\tau : (\Lambda(X \oplus Y), d) \to (\Lambda X, d)$ tel que $\tau(x) = \chi_F \cdot x$ pour tout $x \in \Lambda X$. Lorsque $\chi_F \neq 0$, le transfert définit une rétraction de ΛX-modules différentiels du morphisme ψ, et cela nous permet, en particulier, de minorer la catégorie de Lusternik et Schnirelmann du rationalisé de E par la catégorie du rationalisé de B. De plus, lorsque $H^*(F;\mathbf{k})$ satisfait la dualité de Poincaré avec classe fondamentale $\omega \in H^n(F;\mathbf{k})$, nous donnons la construction explicite d'un cocycle $z \in \Lambda(X \oplus Y)$ telle que $i^*([z]) = \chi_F \cdot \omega$, $[z]$ désignant la classe de z dans $H^n(\Lambda(X \oplus Y)) = H^n(E;\mathbf{k})$.

Le texte se divise en deux parties, l'une consacrée au transfert, la seconde à l'inclusion de la fibre. Ces deux parties sont précédées d'une rapide présentation des modèles d'une fibration dans le domaine d'Anick que nous utiliserons ensuite. Nous renvoyons à [3], [5] et [8] pour davantage de détails sur ces modèles.

S. Halperin m'a donné de précieuses indications, je tiens à l'en remercier. Je remercie également Y. Félix, P. Lambrechts et D. Tanré avec lesquels j'ai eu d'utiles discussions concernant ce travail.

Dans tout ce texte, $\mathbf{k}$ est un corps commutatif fixé. L'entier $\rho(\mathbf{k})$ désigne la caractéristique de $\mathbf{k}$ lorsque celle-ci est finie et on pose $\rho(\mathbf{k}) = \infty$ sinon. Les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels gradués différentiels (evgd), (V, d), sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $\mathbf{Z}$-gradués $V = \{V^i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ munis d'une différentielle de degré $+1$. L'homologie d'un evgd (V, d) est notée $H(V, d)$. Un morphisme d'evgd qui induit un isomorphisme en homologie est repéré par le signe "$\simeq$" et appelé *quasi-isomorphisme*. Les bifoncteurs $- \otimes_{\mathbf{k}} -$ et $Hom_{\mathbf{k}}(-,-)$ sont notés respectivement $- \otimes -$ et $Hom(-,-)$, de même la cohomologie d'un espace S à coefficients dans $\mathbf{k}$ est notée $H^*(S)$.

Définition. Soit $r \geq 1$. Un espace topologique S 1-connexe est dit r-tempéré (ou dans le domaine d'Anick) si son homologie $H_*(S)$ est concentrée en degrés $r < i \leq r\rho(\mathbf{k})$.

Lorsqu'un espace S est r-tempéré, l'algèbre graduée différentielle (agd) des cochaînes singulières $C^*(S)$ est "naturellement" équivalente à une algèbre graduée différentielle commutative (agdc) $A(S)$: cela signifie qu'il existe une chaîne de quasi-isomorphismes d'agd $A(S) \xleftarrow{\simeq} D(S) \xrightarrow{\simeq} C^*(S)$ et que, bien que A ne soit pas fonctoriel, on peut associer à une application $f : S \to T$ entre deux espaces r-tempérés un morphisme $A(f)$ tel que le diagramme usuel commute [5]. Une fibration $p : E \to B$ entre deux espaces r-tempérés peut donc être modelée par une KS-extension (ou modèle de Sullivan relatif) $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & A(B) \arrow[d] & D(B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & C^*(B) \arrow[d] \\
\Lambda(X \oplus Y) \arrow[r, "\simeq"] & A(E) & D(E) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & C^*(E)
\end{tikzcd}$$

Notons $\varepsilon : (\Lambda X, d) \to \mathbf{k}$ l'augmentation et $\bar{d}$ la différentielle induite sur ΛY par la projection $\pi = \varepsilon \otimes_{\Lambda X} id : \Lambda(X \oplus Y) \to \mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} \Lambda(X \oplus Y) = \Lambda Y$. Remarquons que le morphisme d'agdc $(\Lambda X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$ est en particulier un morphisme de ΛX-modules différentiels et que l'algèbre $\Lambda(X \oplus Y) = \Lambda X \otimes \Lambda Y$ est un ΛX-module libre. La KS-extension est donc, en particulier, une résolution ΛX-semi-libre (au sens de [3]) du morphisme de ΛX-modules différentiels $(\Lambda X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$. Puisque ΛX est 1-connexe (i.e. $X = X^{\geq 2}$), ce morphisme de ΛX-modules différentiels admet une résolution semi-libre minimale :

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r] \arrow[dr] & (\Lambda(X \oplus Y), d) \arrow[r, "\pi"] & (\Lambda Y, \bar{d}) \\
& (\Lambda X \otimes H(\Lambda Y, \bar{d}), d) \arrow[u, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[r, "\rho"] & (H(\Lambda Y, \bar{d}), 0) \arrow[u, "\bar{\varphi}", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, l'application φ est un quasi-isomorphisme de ΛX-modules différentiels, $\bar{\varphi}$ est un quasi-isomorphisme d'evgd et ρ désigne la projection $\varepsilon \otimes_{\Lambda X} id_H$. "Minimale" signifie ici que la différentielle sur l'evgd quotient $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} H(\Lambda Y, \bar{d}) = H(\Lambda Y, \bar{d})$ est nulle. Si $p : E \to B$ est une fibration de fibre F alors l'evgd $(\Lambda Y, \bar{d})$ est quasi-isomorphe à $C^*(F)$, autrement dit les deux espaces vectoriels $H(\Lambda Y, \bar{d})$ et $H^*(F)$ sont isomorphes. De plus, sous l'hypothèse supplémentaire $H_{r\rho(\mathbf{k})}(E) = 0$, L. Menichi [8] a montré que les morphismes d'algèbres $H(\pi) : H(\Lambda(X \oplus Y), d) \to H(\Lambda Y, \bar{d})$ et $H^*(i) : H^*(E) \to H^*(F)$, où $i : F \to E$ désigne l'inclusion de la fibre, sont identiques à isomorphisme près ; en particulier les algèbres $H(\Lambda Y, \bar{d})$ et $H^*(F)$ sont isomorphes.

1 Transfert

Dans cette partie, nous considérons une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ dont la base et l'espace total sont r-modérés et de type fini. Nous supposons également que $H_{r\rho(\mathbf{k})}(E) = 0$ et considérons $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$ un modèle de Sullivan relatif de l'application p.

Si la cohomologie de la fibre $H^*(F)$ est de dimension finie, on appelle *nombre de Lefschetz* d'une application continue $g : F \to F$ et on note $\Lambda_g \in \mathbf{k}$, la trace graduée de $H^*(g)$, $\Lambda_g = \sum_i (-1)^i tr H^i(g)$. Lorsque $g = id$, on retrouve la caractéristique d'Euler-Poincaré de F : $\Lambda_{id} = \chi_F$.

Rappelons que, si $H^*(F)$ est de dimension finie, l'application linéaire $T : Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \to End(H^*(F))$ définie par $T(\xi \otimes h)(h') = (-1)^{|h||h'|}\xi(h')h$ pour $h, h' \in H^*(F)$ et $\xi \in Hom(H^*(F), \mathbf{k})$ est un isomorphisme. En particulier, si $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base de $H^*(F)$ et si on note $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$ sa base duale, l'élément $\sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i \otimes e_i \in Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F)$, appelé *élément universel*, a pour image l'identité de $H^*(F)$: $T(\sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i \otimes e_i) = id$. Le nombre de Lefschetz de g s'écrit alors $\Lambda_g = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i(H^*(g)(e_i)) = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} ev(\check{e}_i \otimes H^*(g)(e_i))$ où

$ev : Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \to \mathbf{k}$ désigne l'application d'évaluation.

Théorème 1. *Considérons une application continue $f : E \to E$ telle que $p \circ f = p$ et notons $\bar{f} : F \to F$ sa restriction à la fibre. Si $H^*(F)$ est de dimension finie, alors il existe un morphisme de ΛX-modules différentiels $\tau : (\Lambda(X \oplus Y), d) \to (\Lambda X, d)$ dont la restriction à ΛX est la multiplication par le nombre de Lefschetz de $\bar{f}$: $\tau \circ \psi(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$, $x \in \Lambda X$.*
En particulier, si $\Lambda_{\bar{f}} \neq 0$, le morphisme $\psi : (\Lambda X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$ admet une rétraction de ΛX-modules différentiels.

Avant d'entamer la preuve, examinons le cas de la fibration triviale $F \to F \to *$. L'espace F est ici dans le domaine d'Anick, nous pouvons en considérer un modèle de Sullivan $(\Lambda Y, d)$. Le transfert est alors le morphisme d'evgd $\tau : (\Lambda Y, d) \to \mathbf{k}$ défini par $\tau(1) = \chi_F \cdot 1 = \chi_F$ et $\tau(y) = 0$ si $y \in \Lambda^+ Y$. Décrivons-le d'une façon un peu plus compliquée mais qui guidera le cas général. Considérons la résolution $\mathbf{k}$ semi-libre minimale de $\mathbf{k} \to (\Lambda Y, d)$ donnée par $\mathbf{k} \to (H^*(F), 0) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Y, d)$. Notons $\smile$ le produit de $H^*(F)$ et $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel $H^*(F)$. En notant $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$ la base de $Hom(H^*(F), \mathbf{k})$ associée, on définit le transfert τ en posant :

$$\tau(h) = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i(H^*(f)(e_i) \smile h).$$

Autrement dit, si $\eta : \mathbf{k} \to End(H^*(F))$ est définie par $\eta(1) = id$, le transfert est le composé

$$\begin{gathered} H^*(F) \cong \mathbf{k} \otimes H^*(F) \xrightarrow{\eta \otimes id} End(H^*(F)) \otimes H^*(F) \xrightarrow{T^{-1} \otimes id} \\ Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \otimes H^*(F) \xrightarrow{id \otimes H^*(f) \otimes id} \\ Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \otimes H^*(F) \xrightarrow{id \otimes \smile} Hom(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \xrightarrow{ev} \mathbf{k}. \end{gathered}$$

Remarquons que cette description utilise de façon fondamentale l'élément universel et le produit de $H^*(F)$. La preuve du Théorème 1 consiste à adapter cette construction au cas général. Les rôles de $\mathbf{k}$ et $H^*(F)$ seront respectivement tenus par $(\Lambda X, d)$ et par un ΛX-module différentiel de rang fini $(\Lambda X \otimes K, d)$. Les bifoncteurs $- \otimes -$ et $Hom(-,-)$ seront remplacés par les bifoncteurs $- \otimes_{\Lambda X} -$ et $Hom_{\Lambda X}(-,-)$ qui, à deux ΛX-modules différentiels (M, d_M) et (N, d_N), associent les ΛX-modules différentiels $(M \otimes_{\Lambda X} N, d)$ et $(Hom_{\Lambda X}(M, N), D)$. Leurs différentielles sont respectivement définies par $d(m \otimes_{\Lambda X} n) = d_M m \otimes_{\Lambda X} n + (-1)^{|m|} m \otimes_{\Lambda X} d_N n$ et $Df(m) = d_N(f(m)) - (-1)^{|f|} f(d_M m)$ pour $m \in M$, $n \in N$ et $f \in Hom_{\Lambda X}(M, N)$. Rappelons que si (M, d_M) et (N, d_N) sont deux ΛX-modules différentiels libres comme ΛX-modules non différentiels ($M = \Lambda X \otimes K$, $N = \Lambda X \otimes K'$) il en de même des ΛX-modules différentiels $(M \otimes_{\Lambda X} N, d)$ et $(Hom_{\Lambda X}(M, N), D)$: ces ΛX-modules sont en effet respectivement isomorphes aux ΛX-modules libres $\Lambda X \otimes K \otimes K'$ et $\Lambda X \otimes Hom(K, K')$.

La proposition suivante nous garantit l'existence d'un élément universel. La démonstration est une adaptation directe du cas classique.

Proposition 1. *Si $(M, d) = (\Lambda X \otimes K, d)$ est un ΛX-module différentiel de rang fini, alors l'application $T_{\Lambda X} : (Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X) \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes K, d) \to (End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K), D)$ définie, pour z, w dans $\Lambda X \otimes K$ et f dans $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$, par $T_{\Lambda X}(f \otimes_{\Lambda X} z)(w) = (-1)^{|z||w|} f(w) \cdot z$ est un isomorphisme de ΛX-modules différentiels.*

Rappelons que les cocycles de $(End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K), D)$ sont les morphismes de ΛX-modules différentiels. En particulier l'identité est un cocycle et étant donnée une base, nous pouvons former dans $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X) \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes K$ un cocycle "universel" de la façon suivante :
Soit $\{b_i\}_{i \in I}$ une base de K et $\{\check{b}_i \mid i \in I\} \subset Hom(K, \mathbf{k})$ sa base duale, alors $\{\beta_i = 1 \otimes b_i \mid i \in I\} \subset \Lambda X \otimes K$ et $\{\check{\beta}_i = id \otimes \check{b}_i \mid i \in I\} \subset Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$ constituent respectivement des bases des ΛX-modules $\Lambda X \otimes K$ et $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$. L'élément $\sum\limits_i (-1)^{|\beta_i|} \check{\beta}_i \otimes \beta_i$ dont l'image par $T_{\Lambda X}$ est l'identité est alors un cocycle, appelé cocycle "universel".

Le deuxième ingrédient nécessaire pour notre construction du transfert est un "relèvement" du cup-produit de la fibre. Plus précisément nous utiliserons l'énoncé suivant :

Proposition 2. *Soit* $(\Lambda U, d) \to (\Lambda(U \oplus V), d)$ *une KS extension et considérons sa résolution* $(\Lambda U, d)$*-semi-libre minimale*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda U, d) \arrow[r] \arrow[dr] & (\Lambda(U \oplus V), d) \arrow[r, "\pi"] & (\Lambda V, \bar{d}) \\
 & (\Lambda U \otimes H(\Lambda V, \bar{d}), d) \arrow[u, "\varphi"', "\simeq"] \arrow[r, "\rho"] & (H(\Lambda V, \bar{d}), 0) \arrow[u, "\bar{\varphi}"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Notons υ *le produit de* $H = H(\Lambda V, \bar{d})$*. Alors, il existe un morphisme de* ΛU*-modules différentiels* $\mu : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \to (\Lambda U \otimes H, d)$ *rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\rho \otimes \rho"'] & (\Lambda U \otimes H, d) \arrow[d, "\rho"] \\
(H \otimes H, 0) \arrow[r, "\upsilon"] & (H, 0).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Notons respectivement m et m' les multiplications des algèbres $\Lambda(U \oplus V)$ et ΛV. L'application $\Lambda U \otimes H \otimes \Lambda U \otimes H \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} \Lambda(U \oplus V) \otimes \Lambda(U \oplus V) \xrightarrow{m} \Lambda(U \oplus V)$ induit un morphisme de ΛU-modules différentiels $\bar{m} : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \to (\Lambda(U \oplus V), d)$. Puisque le module $\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H$ est un ΛU-module différentiel semi-libre, il existe, par le lemme de relèvement [2] un morphisme de ΛU-modules différentiels $\mu : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \to (\Lambda U \otimes H, d)$ et une application ΛU-linéaire $\theta : \Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H \to \Lambda(U \oplus V)$ de degré -1 tels que $\varphi \circ \mu - \bar{m} = d\theta + \theta d$. Notons $\bar{\mu}$ le morphisme d'evgd $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda U} \mu : (H \otimes H, 0) \to (H, 0)$. Montrons que $\bar{\mu}$ est exactement le produit de H et l'énoncé sera démontré. Puisque θ est ΛU-linéaire, l'application $\pi \circ \theta$ induit une application $\theta' : H \otimes H \to \Lambda V$ de degré -1 telle que $\pi \circ \theta = \theta' \circ (\rho \otimes \rho)$. On vérifie facilement que θ' est une homotopie entre les morphismes d'evgd $\bar{\varphi} \circ \bar{\mu}$ et $m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi}$ i.e. $\bar{\varphi} \circ \bar{\mu} - m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi} = \bar{d}\theta'$. Soit $q : (\Lambda V, \bar{d}) \to (H, 0)$ une rétraction d'evgd de $\bar{\varphi}$, $q \circ \bar{\varphi} = id$. On obtient donc $\bar{\mu} - q \circ m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi} = q\bar{d}\theta = 0$. Il suffit, pour conclure, de remarquer que le produit de H est exactement le composé $q \circ m' \circ (\bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi})$. ∎

Démonstration du Théorème 1. Rappelons que $\psi : (\Lambda X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$ est un modèle de Sullivan relatif de la fibration $p : E \to B$. Notons $\varepsilon : \Lambda X \to \mathbf{k}$ l'augmentation. Considérons la résolution ΛX-semi-libre minimale du morphisme de ψ :

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr] & (\Lambda(X \oplus Y), d) \arrow[r, "\pi"] & (\Lambda Y, \bar{d}) \\
& (\Lambda X \otimes H(\Lambda Y, \bar{d}), d) \arrow[u, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[r, "\rho"] & (H(\Lambda Y, \bar{d}), 0) \arrow[u, "\bar{\varphi}", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Il suffit de construire un morphisme de ΛX-modules différentiels $\tau : (\Lambda X \otimes H, d) \to (\Lambda X, d)$ tel que $\tau(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$ pour $x \in \Lambda X$. D'après [8], on sait que les morphismes d'algèbres $H^*(\pi)$ et $H^*(i)$ coïncident, en particulier l'algèbre $H(\Lambda Y, \bar{d})$ est isomorphe à $H^*(F)$. On note donc $H = H(\Lambda Y, \bar{d}) = H^*(F)$ et $\smile$ le produit. L'application $f : E \to E$ induit un morphisme de ΛX-modules différentiels $\Phi : \Lambda X \otimes H \to \Lambda X \otimes H$. La projection de Φ sur H, $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} \Phi$, s'identifie à l'application linéaire $H^*(\bar{f})$ induite par la restriction de f à la fibre. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel H et $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$ sa base duale. Les ensembles $\{\varepsilon_i = 1 \otimes e_i \mid i \in I\}$ et $\{\check{\varepsilon}_i = id \otimes \check{e}_i \mid i \in I\}$ constituent alors des bases des ΛX-modules $\Lambda X \otimes H$ et $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$. Nous allons construire le transfert à partir du cocycle "universel" $\sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i$. Notons (Φ_{ij}) la matrice de Φ dans la base $\{\varepsilon_i\}$. Remarquons que $(\varepsilon \Phi_{ij})$ est exactement la matrice de $H^*(\bar{f})$ dans la base $\{e_i\}$ et que, pour raison de degré, on a $\Phi_{ii} = \varepsilon \Phi_{ii}$ pour tout i. À l'aide du morphisme $\mu : \Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \to \Lambda X \otimes H$ construit dans la proposition 2 pour la KS extension $\psi : (\Lambda X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$, on définit l'application $\tau : \Lambda X \otimes H \to \Lambda X$ par $\tau(x \otimes h) = x \cdot \sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i(\mu(\Phi(\varepsilon_i) \otimes_{\Lambda X} h))$ pour $x \in \Lambda X$ et $h \in H$. En utilisant l'égalité $d(\sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i) = 0$, il est facile de voir que τ commute à la différentielle. L'application τ est ainsi un morphisme de ΛX-modules différentiels qui, de plus, vérifie pour $x \in \Lambda X$:
$\tau(x \otimes 1) = x \cdot \tau(1) = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon_i)) = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \varepsilon \Phi_{ii}$
$= x \cdot \sum_i (-1)^{|e_i|} \varepsilon \Phi_{ii} = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x.$ ∎

La catégorie de Lusternik et Schnirelmann d'un espace S est le plus petit $n \in \mathbf{N}$ pour lequel S peut être recouvert par $n + 1$ ouverts contractiles dans S. En notant $S_{\mathbf{Q}}$ le rationalisé de l'espace S, nous obtenons comme conséquence du Théorème 1 :

Corollaire. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration dans laquelle tous les espaces sont 1-connexes et du type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini. Si $H^*(F; \mathbf{Q})$ est de dimension finie et si $\chi_F \neq 0$ alors $cat E_{\mathbf{Q}} \geq cat B_{\mathbf{Q}}$.*

Fixons pour le reste de cette section $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$. Tous les espaces 1-connexes et ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini sont ainsi dans le domaine d'Anick. Félix et Halperin [2] ont caractérisé la LS-catégorie du rationalisé d'un espace de la façon suivante :
Soit S un espace 1-connexe du type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini et soit $(\Lambda U, d)$ un modèle de Sullivan de cet espace. Considérons, pour tout $n \geq 0$, un

modèle relatif de la projection $(\Lambda U, d) \to (\Lambda U/\Lambda^{>n}U, d)$:

$$(\Lambda U, d) \xrightarrow{j} (\Lambda U \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda U/\Lambda^{>n}U, d)$$

Alors [2] $catS_{\mathbf{Q}}$ est le plus petit $n \in \mathbf{N}$ pour lequel j admet une rétraction d'agcd. Dans [6] K. Hess montre que ceci est équivalent à l'existence d'une rétraction de ΛU-modules différentiels.

Démonstration du corollaire. Soit $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$ un modèle (sur $\mathbf{Q}$) de la fibration p. Supposons $catE_{\mathbf{Q}} \leq n$, et considérons un modèle de la projection

$$(\Lambda(X \oplus Y), d) \xrightarrow{j_1} (\Lambda(X \oplus Y) \otimes \Lambda V, d) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\phi_1}} (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus Y), d)$$

et $r : (\Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda V, d) \to (\Lambda(X \oplus Y), d)$ une rétraction de $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ modules différentiels de l'application j_1. Considérons également

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{j_2} (\Lambda X \otimes \Lambda W, d) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\phi_2}} (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d)$$

un modèle de la projection et

$$\psi' : (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d) \to (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus y), d)$$

l'application d'agdc induite par ψ. Nous obtenons ainsi le diagramme commutatif en traits pleins suivant

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j_2"'] & \Lambda X \otimes \Lambda Y \arrow[r, "j_1"] & \Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda V \arrow[d, "\phi_1"', "\simeq"] \\
\Lambda X \otimes \Lambda W \arrow[r, "\phi_2"'] \arrow[urr, dotted, "\lambda"] & (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d) \arrow[r, "\psi'"'] & (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus Y), d)
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les applications sont des morphismes de ΛX-modules différentiels et ϕ_1 est un quasi-isomorphisme surjectif. Par le lemme de relèvement [2], il existe un morphisme de ΛX-modules différentiels λ tel que $\phi_1 \circ \lambda = \psi' \circ \phi_2$. Soit maintenant $\tau : (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \to (\Lambda X, d)$ le transfert construit dans le Théorème 1 vérifiant $\tau \circ \psi = \chi_F$. Puisque $\chi_F \neq 0$, formons le composé $\tilde{r} = \frac{1}{\chi_F}\tau \circ r \circ \lambda$. Cette application est un morphisme de ΛX-modules différentiels et vérifie $\tilde{r} \circ j_2 = id_{\Lambda X}$, par conséquent $catB_{\mathbf{Q}} \leq n$. ∎

2 Inclusion de la fibre

Rappelons la définition suivante :

Une algèbre graduée connexe A de dimension finie satisfait la *dualité de Poincaré* pour $\omega \in A^n$ si $A^n = \omega \cdot \mathbf{k}$, $A^{>n} = 0$ et si la multiplication de A induit une forme bilinéaire non dégénérée $P : A \otimes A \to A \xrightarrow{I} \mathbf{k}$ où I est l'application linéaire définie par $I(\omega) = 1$ et $I(A^{<n}) = 0$.
L'application $\nu : A \to Hom(A, \mathbf{k})$ définie par $\nu(a)(b) = I(a.b)$ est alors une application linéaire bijective de degré $-n$.
Si $\{b_i\}_{i\in J}$ est une base homogène de l'espace vectoriel gradué A, on note $\{b_i^*\}_{i\in J}$ sa base duale pour la dualité de Poincaré P. L'élément b_i^* vérifie $deg(b_i^*) = n - deg(b_i)$ et $P(b_i^* \otimes b_j) = \delta_{ij}$. L'application ν transforme la base $\{b_i^*\}$ en la base duale de $\{b_i\}$ pour la dualité linéaire i.e. $\nu(b_i^*) = \check{b}_i$.

Pour une fibration $F \to E \to B$ dans laquelle la cohomologie de la fibre satisfait la dualité de Poincaré, nous montrons que cette dualité s'étend en une dualité entre un modèle de E et son dual comme module sur un modèle de la base. Nous nous servons ensuite de cette dualité pour démontrer dans notre cadre le théorème de l'inclusion de la fibre et en déduire la construction d'un morphisme de transfert.

Considérons à nouveau une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ dans laquelle la base et l'espace total sont r-tempérés et de type fini. Supposons que $H_{r\rho(\mathbf{k})}(E) = 0$ et notons $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$ un modèle de Sullivan relatif de l'application p. Considérons également la ΛX résolution semi-libre minimale du morphisme ψ

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r] \arrow[dr] & (\Lambda(X \oplus Y), d) \arrow[r, "\pi"] & (\Lambda Y, \bar{d}) \\
& (\Lambda X \otimes H, d) \arrow[r, "\rho"] \arrow[u, "\varphi", "\simeq"'] & (H, 0) \arrow[u, "\bar{\varphi}", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

où $H = H(\Lambda Y, \bar{d}) = H^*(F)$.

Théorème 2. *Supposons que $H = H^*(F)$ satisfait la dualité de Poincaré pour la classe $\omega \in H^n(F)$. Notons $I_{\Lambda X} : \Lambda X \otimes H \to \Lambda X$ l'application définie par $I_{\Lambda X}(x \otimes h) = (-1)^{|x|n} x \cdot I(h)$ et μ le relèvement du produit de H (cf Prop 2). Alors*
(i) L'application $\nu_{\Lambda X} : \Lambda X \otimes H \to Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$, définie par :

$$\nu_{\Lambda X}(u)(v) = I_{\Lambda X} \circ \mu(u \otimes_{\Lambda X} v) \quad u, v \in \Lambda X \otimes H$$

est une bijection de ΛX-modules différentiels de degré $-n$.
(ii) Pour toute application $f : E \to E$ vérifiant $p \circ f = p$ il existe un cocycle $z \in \Lambda X \otimes H$ tel que $\rho(z) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega$ où $\bar{f}$ est la restriction de f à la fibre.
De plus, $\nu_{\Lambda X}(z) : \Lambda X \otimes H \to \Lambda X$ est un transfert i.e. $\nu_{\Lambda X}(z)$ est un morphisme de ΛX-modules différentiels tel que $\nu_{\Lambda X}(z)(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$ pour $x \in \Lambda X$.

Démonstration. *(i)* Notons $P_{\Lambda X}$ le composé $\Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \xrightarrow{\mu} \Lambda X \otimes H \xrightarrow{I_{\Lambda X}} \Lambda X$. Pour raison de degré $I_{\Lambda X}$ est une application différentielle, $P_{\Lambda X}$ et $\nu_{\Lambda X}$ sont donc des applications de ΛX-modules différentiels.
Pour montrer que $\nu_{\Lambda X}$ est bijective, nous montrons qu'elle transforme une base en

une base. Soit $\{e_i\}_{i\in\{0,..,N\}}$ une base de H telle que $e_0 = 1, e_N = \omega$ et $\mid e_i \mid\leq\mid e_j \mid$ pour $i \leq j$. Notons $\varepsilon_i = 1 \otimes e_i$ les éléments de la base de $\Lambda X \otimes H$ correspondante. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \Lambda X \otimes H \arrow[r, "I_{\Lambda X}"] \arrow[d, "\rho"] & \Lambda X \arrow[d, "\varepsilon"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\smile"] & H \arrow[r, "I"] & \mathbf{k}
\end{tikzcd}$$

nous donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = 0 \text{ si } \mid e_i \mid + \mid e_j \mid < n, \\ P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = P(e_i \otimes e_j) \text{ si } \mid e_i \mid + \mid e_j \mid = n, \\ P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) \in \Lambda^+ X \text{ si } \mid e_i \mid + \mid e_j \mid > n. \end{cases}$$

Soit $\{e_i^*\}$ la base duale de e_i pour la dualité de Poincaré. En suivant le procédé de Gramm-Schmidt, nous construisons une base $\{\varepsilon_i^*\}$ du ΛX-module libre $\Lambda X \otimes H$ telle que $\varepsilon_i^* = 1 \otimes e_i^* + \sum\limits_{j>i} \alpha_{ij} \cdot \varepsilon_j^*$ où $\alpha_{ij} \in \Lambda^+ X$ et telle que $P_{\Lambda X}(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = \delta_{ij}$. Les ε_i^* sont définis par récurrence par $\varepsilon_N^* = 1 \otimes e_N^*$ et $\varepsilon_{N-k}^* = 1 \otimes e_{N-k}^* - \sum\limits_{i<k} P_{\Lambda X}(1 \otimes e_{N-k}^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_{N-i}) \cdot \varepsilon_{N-i}^*$. Par ailleurs, notons $\check{\varepsilon}_i = id \otimes \check{e}_i$ l'image de la forme linéaire $\check{e}_i$, duale de e_i, par l'isomorphisme canonique $Hom(H, \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$. Les éléments $\{\check{\varepsilon}_i\}$ forment une base de $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$. L'image de ε_i^* par $\nu_{\Lambda X}$ est exactement $\check{\varepsilon}_i$ ce qui signifie que l'application $\nu_{\Lambda X}$ transforme une base en une base. Le point *(i)* est donc démontré.

(ii) L'application f induit un morphisme de ΛX-modules différentiels $\Phi : (\Lambda X \otimes H, d) \to (\Lambda X \otimes H, d)$ dont la projection sur H s'identifie à l'application linéaire $H^*(\bar{f})$ induite par la restriction de f à la fibre. Notons (Φ_{ij}) la matrice de Φ dans la base $\{\varepsilon_i\}$. Rappelons que $(\varepsilon\Phi_{ij})$ est la matrice de $H^*(\bar{f})$ dans la base $\{e_i\}$ et que $\varepsilon\Phi_{ii} = \Phi_{ii} \in \mathbf{k}$ pour tout i.
Nous cherchons un cocycle $z \in \Lambda X \otimes H$ tel que $\rho(z) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega$. Remarquons que $\Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega = \sum\limits_{i=0}^{N} (-1)^{|e_i|} \varepsilon\Phi_{ii} e_i^* \smile e_i = \sum\limits_{i=0}^{N} (-1)^{|\varepsilon_i|} \varepsilon\Phi_{ii} \rho\mu(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i) = \rho(\sum\limits_{i=0}^{N} (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i))$.
L'élément $\sum\limits_{i=0}^{N} (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i$ est un cocycle car il est l'image inverse du cocycle Φ par la bijection différentielle $T_{\Lambda X} \circ (\nu_{\Lambda X} \otimes id) : \Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \to End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H)$. Puisque μ commute à la différentielle $z = \sum\limits_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i)$ est également un cocycle. Ce cocycle vérifie $\rho(z) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega$ et répond donc à la question. Son image par $\nu_{\Lambda X}$ est également un cocycle i.e. un morphisme de ΛX-modules différentiels $\nu_{\Lambda X}(z) : (\Lambda X \otimes H, d) \to (\Lambda X, d)$. Vérifions que $\nu_{\Lambda X}(z)$ est un transfert : soit $x \in \Lambda X$, on a $\nu_{\Lambda X}(z)(x) = (-1)^{|x||\nu_{\Lambda X}(z)|} x \cdot \nu_{\Lambda X}(1) = x \cdot I_{\Lambda X} \circ \mu(\sum\limits_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i) \otimes 1) = x \cdot \sum\limits_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} P_{\Lambda X}(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$. ∎

Références

[1] J.C. Becker et D.H. Gottlieb : The transfer map for fibrations and duality, *Compositio-Math.* **33** (1976), 107-133.

[2] Y. Félix, S. Halperin : Rational LS-category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273**, (1982), 1-37.

[3] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas : Rational homotopy theory, version June 1997.

[4] D.H. Gottlieb : Fiber bundles and the Euler characteristic, *J. Diff. Geom.* **10** (1975), 39-48.

[5] S. Halperin : Universal envelopping algebras and loop space homology, *J. Pure Appl. Algebra* **83** (1992), 237-282.

[6] K. Hess : A proof of Ganea's conjecture for rational spaces, *Topology* **30** (1991), 205-214.

[7] J-M. Lemaire : Le transfert dans les espaces fibrés (d'après J. Becker et D. Gottlieb), Séminaire Bourbaki 23^e année 1975/76 n^o 472.

[8] L. Menichi : Sur l'algèbre de cohomologie d'une fibre, Thèse, Lille (1997).

URA-CNRS 0751
U.F.R. de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. France
lucilev@gat.univ-lille1.fr