Quelques extensions d'un problème de Paul Erdös sur les groupes

Alireza Abdollahi*   Nadir Trabelsi

Abstract

In this paper, we consider some combinatorial conditions on infinite subsets of groups, and we obtain in terms of these conditions some characterizations of nilpotent-by-finite and finite-by-nilpotent groups on the class of finitely generated soluble groups.

1 Introduction et résultats

Suite à un problème posé par P. Erdös, B.H. Neumann a montré dans [16] qu'un groupe G est tel que toute partie infinie contient deux éléments distincts qui commutent si, et seulement si, $G/Z(G)$ est fini, où $Z(G)$ désigne le centre de G.
Depuis ce résultat, des extensions du problème d'Erdös ont été considérées en remplaçant la commutativité par d'autres propriétés (classes) de groupes, et ont fait l'objet de nombreuses publications (voir par exemple [1]—[7], [13], [14], [15], [22]). Dans cet article, en considérant de nouvelles propriétés (classes) de groupes, on généralisera quelques résultats connus.

Soit $k > 0$ un entier fixé. On note $\mathcal{F}, \mathcal{N}, \mathcal{N}_k, \mathcal{N}_k^{(2)}$ respectivement la classe des groupes finis, des groupes nilpotents, des groupes nilpotents de classe au plus égale à k et des groupes dont les sous-groupes 2-engendrés sont dans $\mathcal{N}_k$. On note aussi E^* (respectivement E_k^*) la classe des groupes G tels que pour toute partie infinie X

*A. Abdollahi is supported by the Isfahan University Grant 801031.

Received by the editors March 2001.
Communicated by M. Van den Bergh.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 20F16; 20F99.
Key words and phrases : infinite subsets, finitely generated soluble groups, commutators.

de G, il existe deux éléments distincts $x, y \in X$, un entier positif n et des entiers rationnels non nuls $t_0, t_1, \dots, t_n$ (respectivement $t_0, t_1, \dots, t_k$) dépendants de x, y et vérifiant $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \dots, z_n^{t_n}] = 1$ (respectivement $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \dots, z_k^{t_k}] = 1$) où $z_i \in \{x, y\}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ (respectivement $\{0, 1, \dots, k\}$) et $z_0 \neq z_1$. On note aussi $E^{\#}$ (respectivement $E_k^{\#}$) la classe des groupes $G \in E^*$ (respectivement E_k^*) pour lesquels les entiers $t_0, \dots, t_n$ (respectivement $t_0, \dots, t_k$) sont dans l'ensemble $\{-1, 1\}$. Il est prouvé dans [22], qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $\mathcal{NF}$ si, et seulement si, pour toute paire $\{X, Y\}$ de parties infinies de G, il existe $x \in X$, $y \in Y$ et deux entiers positifs $m = m(x, y)$, $n = n(x, y)$ tels que $[x,_n y^m] = 1$. Il est aussi prouvé dans [22] que si G est un groupe métabélien de type fini tels que pour toute paire $\{X, Y\}$ de parties infinies de G, il existe $x \in X$, $y \in Y$ et un entier $m = m(x, y)$ vérifiant $[x,_k y^m] = 1$, alors il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_t\mathcal{F}$. Dans la deuxième section de cet article, on généralise ces résultats en prouvant les théorèmes suivants :

Théorème 1.1. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors, $G \in E^*$ si et seulement si $G \in \mathcal{NF}$.*

Théorème 1.2. *Soit G un groupe résoluble de type fini de E_k^*. Alors il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que G soit dans la classe $\mathcal{N}_t\mathcal{F}$.*

Théorème 1.3. *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors, $G \in E_k^*$ si, et seulement si, $G \in \mathcal{N}_k\mathcal{F}$*

On clôture la deuxième section par des résultats sur E_2^* ainsi que sur E_3^*.

Soit $\mathcal{E}(\infty)$ (respectivement $\mathcal{E}_k(\infty)$) la classe des groupes G dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y tels que $[x,_n y] = 1$ (respectivement $[x,_k y] = 1$) pour un entier positif $n = n(x, y)$. Il est prouvé dans [15] et [7] qu'un groupe résoluble de type fini G est dans la classe $\mathcal{E}(\infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Dans [1], il est établi qu'un groupe métabélien de type fini G est dans la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$ si, et seulement si, $G/Z_k(G)$ est fini, où $Z_k(G)$ est le $(k+1)$-ième terme de la série centrale ascendante de G ; ainsi que si G est un groupe résoluble de type fini de la classe $\mathcal{E}_k(\infty)$, alors il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que $G/Z_t(G)$ soit fini. Dans la troisième section de cet article, on généralise ces résultats en démontrant les théorèmes suivants :

Théorème 1.4. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors, G est dans la classe $E^{\#}$ si, et seulement si, $G \in \mathcal{FN}$.*

Théorème 1.5. *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $E_k^{\#}$. Alors, il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que $G/Z_t(G)$ soit fini.*

Théorème 1.6. *Soit G un groupe métabélien de type fini. Alors, G est dans la classe $E_k^{\#}$ si, et seulement si, $G/Z_k(G)$ est fini. En particulier, tout groupe métabélien sans torsion dans $E_k^{\#}$ est nilpotent de classe au plus égale à k.*

On clôture la troisième section par des résultats sur $E_3^{\#}$ et $E_2^{\#}$ qui généralisent ceux établis dans [1] et [2] pour les classes respectivement $\mathcal{E}_3(\infty)$ et $\mathcal{E}_2(\infty)$.

Soit $\mathcal{X}$ une classe de groupes, on note $(\mathcal{X}, \infty)$ la classe des groupes dont toute partie infinie contient deux éléments distincts x, y engendrant un $\mathcal{X}$-groupe. Dans [13] il est prouvé qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $(\mathcal{N}, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}$. Il est aussi établi dans [3] qu'un groupe résoluble de type fini G est dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ si, et seulement si, G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$. Dans [4] il est démontré qu'un groupe résoluble de type fini est dans la classe $(\mathcal{N}_2, \infty)$ si, et seulement si, $G/Z_2(G)$ est fini. Dans la quatrième section de cet article, on généralise ces résultats en prouvant le théorème suivant :

Théorème 1.7. *Soit G un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$. Alors, G est dans la classe $\mathcal{FN}$.*

Ce théorème admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.8. *(i) Si G est un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{FN}_k, \infty)$, alors G est dans la classe $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ et il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que $G/Z_t(G)$ soit fini.*
(ii) Si G est un groupe métabélien (respectivement résoluble) de type fini dans la classe $(\mathcal{FN}_k, \infty)$ (respectivement $(\mathcal{FN}_2, \infty)$) alors $G/Z_k(G)$ (respectivement $G/Z_2(G)$) est fini.

Notons que tous les théorèmes énoncés ci-dessus ne sont pas vrais pour un groupe arbitraire. Il est clair que tout groupe de torsion est dans la classe E_k^* pour tout entier $k > 0$. Comme il existe des groupes de torsion qui ne sont pas dans $\mathcal{NF}$ alors le théorème 1.1 n'est pas vrai pour tous les groupes de type fini. D'autre part, l'exemple de Golod [8] est un p-groupe infini, résiduellement fini à 3 générateurs dont tout sous-groupe 2-engendré est fini, où p est un nombre premier. Ce groupe est dans les classes $E^{\#}$ et $(\mathcal{FN}, \infty)$, mais il n'est pas dans la classe $\mathcal{FN}$. Par conséquent les théorèmes 1.4 et 1.7 ne sont pas vrais pour tous les groupes de type fini résiduellement finis. Aussi le groupe $\mathbb{Z}_2 \mathrm{wr} \oplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ qui est métabélien et dans $\mathcal{N}_3^{(2)}$ montre que ces derniers théorèmes ne sont pas vrais pour tous les groupes résolubles. De même pour le groupe construit par Vaughan-Lee et Wiegold [23] qui est un groupe infini, parfait, localement fini et d'exposant un nombre premier $p \geq 5$. Ce groupe est dans la classe $\mathcal{N}_t^{(2)}$ pour un entier $t = t(p) > 0$, mais il n'est pas dans la classe $\mathcal{NF}$. Ceci justifie notre choix de groupes résolubles et de type fini.
Notons aussi que les théorèmes 1.3, 1.6 et le corollaire 1.8(ii) ne sont pas vrais si G est résoluble de longueur dérivée > 2. En effet, le groupe construit par Newman [17] est un groupe G nilpotent de type fini, sans torsion, de longueur dérivée 3 et appartenant à la classe $\mathcal{N}_k^{(2)}$, mais $G/Z_k(G)$ est infini, où $k \geq 3$.

Nous remarquons ici que dans [6] Delizia, Rhemtulla et Smith ont prouvé que si G est un groupe de type fini localement gradué satisfaisant la condition $(\mathcal{N}_k, \infty)$ alors $G/Z_c(G)$ est fini pour un entier positif c ne dépendant que de k ; et aussi Longobardi en utilisant ce dernier résultat a prouvé dans [14] que si G est un groupe de type fini localement gradué satisfaisant la condition $(\mathcal{E}_k, \infty)$ ($\mathcal{E}_k$ étant la classe des groupes k-Engel) alors G est une extension d'un groupe fini par un groupe k-Engel.

2 Groupes de la classe E^*

Preuve du théorème 1.1. Il est clair que si $G \in \mathcal{NF}$ alors $G \in E^*$. Réciproquement, supposons que G soit dans E^* et effectuons une récurrence sur la longueur dérivée d de G pour montrer que G est dans la classe $\mathcal{NF}$. Ceci est clair si $d = 1$; supposons maintenant $d > 1$ et soit $A = G^{(d-1)}$, le d-ième terme de la série dérivée de G. D'après l'hypothèse de récurrence, G admet un sous-groupe normal H, d'indice fini et tel que H/A soit nilpotent. D'où H est une extension d'un groupe abélien par un groupe nilpotent de type fini. Il s'ensuit par [12, théorème B], qu'il existe un entier $e \geq 1$, ne dépendant que de H, tel que pour tous $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $x \in G$ l'on ait $C_G(x^n) \leq C_G(x^e)$ (*). Montrons que pour tous $a \in A$ et $y \in H$, il existe un entier $c > 0$ tel que $[a,_c y^e] = 1$. S'il existe deux entiers positifs distincts i, j tels que $a^{y^i} = a^{y^j}$, alors $[a, y^{j-i}] = 1$, donc $[a, y^e] = 1$. Supposons, maintenant, que l'ensemble $\{a^{y^n}y \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit infini ; il existe donc deux entiers positifs distincts i, j, un entier $m > 0$ et des entiers non nuls $t_0, t_1, \ldots, t_m$ tels que

$$[(a^{y^i}y)^{t_0}, (a^{y^j}y)^{t_1}, z_2^{t_2}, \ldots, z_m^{t_m}] = 1,$$

où $z_s \in \{a^{y^i}y, a^{y^j}y\}$, pour tous $s \in \{2, \ldots, m\}$. Notons que pour tous les entiers positifs r et t, on a $(a^{y^r}y)^t = y^t a^{y^r(y^t+\cdots+y)}$; si bien que tout $z_s^{t_s}$ est de la forme by^l ou $y^l b$ pour un $b \in \langle a\rangle^{\langle y\rangle}$ et un entier non nul l. Comme A est un sous-groupe abélien normal dans G, $K = \langle A, y\rangle$ est métabélien. En utilisant les identités $[c^{-1}, d] = ([c,d]^{c^{-1}})^{-1}$ et $[c, d^{-1}] = ([c,d]^{d^{-1}})^{-1}$ vérifiées par tout groupe, on peut supposer t_0, t_1 positifs. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}1 = [(a^{y^i}y)^{t_0}, (a^{y^j}y)^{t_1}, z_2^{t_2}, \ldots, z_m^{t_m}] =\\ [y^{t_0}, a^{y^j(y^{t_1}+\cdots+y)}, y^{t_2}, \ldots, y^{t_m}][a^{y^i(y^{t_0}+\cdots+y)}, y^{t_1}, y^{t_2}, \ldots, y^{t_m}] =\\ [a^{y^j(y^{t_1}+\cdots+y)}, y^{t_0}, y^{t_2}, \ldots, y^{t_m}]^{-1}[a^{y^i(y^{t_0}+\cdots+y)}, y^{t_1}, y^{t_2}, \ldots, y^{t_m}].\end{aligned}$$

Si on note A additivement, on obtient :

$$\begin{aligned}0 = ay^i(y^{t_0} + \cdots + y)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^{t_m} - 1)\\ -ay^j(y^{t_1} + \cdots + y)(y^{t_0} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^{t_m} - 1).\end{aligned}$$

Ce qui nous donne après multiplication par $(y - 1)$:

$$0 = ay(y^i - y^j)(y^{t_0} - 1)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^{t_m} - 1),$$

donc

$$0 = a(y^{i-j} - 1)(y^{t_0} - 1)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^{t_m} - 1).$$

D'après (*), on obtient

$$0 = a(y^{i-j} - 1)(y^{t_0} - 1)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^e - 1).$$

Comme K est métabélien, on a pour tous $b \in A$, $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $\sigma \in S_n$, $[b, x_1, \ldots, x_n] = [b, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$. D'où

$$0 = a(y^{i-j} - 1)(y^{t_0} - 1)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1)\cdots(y^e - 1)(y^{t_{m-1}} - 1),$$

donc de nouveau par (*), on a

$$0 = a(y^{i-j} - 1)(y^{t_0} - 1)(y^{t_1} - 1)(y^{t_2} - 1) \cdots (y^{t_{m-2}} - 1)(y^e - 1)(y^e - 1).$$

Maintenant en rptant le même raisonnement, on obtient $a(y^e - 1)^{m+2} = 0$. Ce qui équivaut à $[a,_{m+2} y^e] = 1$. Ceci implique que pour tout $y \in H$, $H_y := (A \cap H^e)\langle y^e \rangle$ est un groupe d'Engel. Or H_y est résoluble, donc il est localement nilpotent. Comme H/A est nilpotent, $\frac{H^e}{A \cap H^e}$ l'est aussi, d'où H_y est sous-normal dans H^e. Il s'ensuit que H_y est inclus dans le radical de Hirsch-Plotkin [20, 12.1.4]. D'où y^e est dans le radical de Hirsch-Plotkin pour tout $y \in H$; on en déduit que H^e est localement nilpotent. Comme H/H^e est fini, on tire que H^e est nilpotent ; par suite $G \in \mathcal{NF}$. ∎

Dans la démonstration du théorème 1.2, on utilisera les lemmes suivants :

Lemme 2.1. *Soit G un groupe métabélien. Si G est un groupe nilpotent sans torsion dans la classe E_k^*, alors la classe de nilpotence de G est au plus égale à k.*

Preuve. En procédant par récurrence sur la classe de nilpotence de G, on peut supposer que $G = Z_{k+1}(G)$. D'après [19, théorème 7.36], il suffit de montrer que G est un groupe k-Engel. Supposons qu'il existe $x, y \in G$ tels que $[x,_k y] \neq 1$. Comme $H = \langle x, y \rangle$ est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion, il est résiduellement un 2-groupe fini. Il s'ensuit qu'il existe dans H un sous-groupe normal N tel que $[x,_k y] \notin N$, et $|H/N| = 2^n$, pour un entier $n > 0$. Considérons l'ensemble infini $\{x^{2^{n+m}} y \mid m \in \mathbb{N}\}$; il existe donc deux entiers positifs distincts m_1, m_2 et des entiers non nuls $t_0, t_1, \ldots, t_k$ et des éléments $z_0, \ldots, z_k$ dans $\{x^{2^{n+m_1}} y, x^{2^{n+m_2}} y\}$ tels que

$$z_0 \neq z_1 \text{ et } [z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \ldots, z_k^{t_k}] = 1.$$

Mais G est nilpotent de classe au plus égale à $k+1$, d'après [1, lemme 1] on en déduit que $[z_0, z_1, \ldots, z_k]^{t_0 t_1 \cdots t_k} = 1$, d'où $[z_0, z_1, \ldots, z_k] = 1$ car G est sans torsion. Comme dans un groupe métabélien, on a l'identité $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k]^{-1}$ [1, lemme 1] ; on peut choisir $z_0 = x^{2^{n+m_1}} y$ et $z_1 = x^{2^{n+m_2}} y$, et d'après [1, lemme 1] il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que

$$[x^{2^{n+m_1}} y,_i x^{2^{n+m_2}} y,_{k-i} x^{2^{n+m_1}} y] = 1.$$

Prenons $p_1 = 2^{n+m_1}$ et $p_2 = 2^{n+m_2}$. Alors

$$\begin{aligned}
[x^{p_1} y,_i x^{p_2} y,_{k-i} x^{p_1} y] &= [[x^{p_1}, y]^y [y, x^{p_2}]^y,_{i-1} x^{p_2} y,_{k-i} x^{p_1} y] \\
&= [x^{p_1}, y,_{i-1} y x^{p_2},_{k-i} y x^{p_1}]^y [y, x^{p_2},_{i-1} y x^{p_2},_{k-i} y x^{p_1}]^y \\
&= [x, y,_{i-1} y x^{p_2},_{k-i} y x^{p_1}]^{(p_1 - p_2) y}.
\end{aligned}$$

d'où $[x, y,_{i-1} y x^{p_2},_{k-i} y x^{p_1}] = 1$ car G est sans torsion et $p_1 - p_2 \neq 0$. Comme 2^n divise p_1 et p_2, alors $x^{p_1}, x^{p_2} \in N$. D'où $N = [xN, yN,_{i-1} y x^{p_2} N,_{k-i} y x^{p_1} N] = [x,_k y]N$, donc $[x,_k y] \in N$, ce qui est contradictoire. ∎

Lemme 2.2. *Soit G un groupe nilpotent sans torsion dans la classe E_k^*. Alors il existe un entier positif f, ne dépendant que de k, tel que la classe de nilpotence de G soit au plus égale à f.*

Preuve. Soit H un sous-groupe de G engendré par deux éléments et soit c sa classe de nilpotence. Soient s le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{c+1}{2}$ et $A = \gamma_s(H)$, le s-ième terme de la série centrale descendante de H. A est alors un sous-groupe abélien et normal dans H, d'où pour tout $x \in H$, le groupe $K = \langle A, x \rangle$ est métabélien. Il s'ensuit d'après le lemme précédant que la classe de nilpotence de K est au plus égale à k, d'où $[A,_k x] = 1$. On en déduit, par [21, Proposition D], qu'il existe un entier positif $t = t(k)$, ne dépendant que de k, tel que $[A,_t H] = 1$. D'où $\gamma_{s+t}(H)$=1 et comme H est de classe c, on en déduit que $c + 1 \leq s + t$. Il en résulte que $c \leq 2t$ et G est alors un groupe $2t$-Engel. D'après [24, page 166] la classe de nilpotence de G est au plus égale à un entier positif $f = f(t)$, ne dépendant que de $t = t(k)$, et par conséquent, ne dépendant que de k ; ce qui achève la preuve du lemme. ∎

Preuve du théorème 1.2. D'après le théorème 1.1, G admet un sous-groupe normal nilpotent H tel que G/H soit fini, d'où H est de type fini. Or tout groupe nilpotent de type fini est une extension finie d'un groupe sans torsion [20, 5.4.15(i)], donc on peut supposer H sans torsion. Il s'ensuit, par le lemme 2.2, que la classe de nilpotence de H est un entier positif t ne dépendant que de k ; comme G/H est fini, le théorème est démontré. ∎

Preuve du théorème 1.3. Supposons que $G \in E_k^*$. D'après le théorème 1.1, G admet un sous-groupe normal nilpotent H tel que G/H soit fini. Soit T le sous-groupe de torsion de H ; H/T est donc un groupe nilpotent sans torsion. Il s'ensuit, d'après le lemme 2.1, que la classe de nilpotence de H/T est au plus égale à k ; donc $\gamma_{k+1}(H) \leq T$. Or T est fini car H est de type fini, donc $\gamma_{k+1}(H)$ est fini, et d'après [11, 1.5], $H/Z_k(H)$ est aussi fini. On en déduit que $G/Z_k(H)$ est fini ; d'où $G \in \mathcal{FN}_k$. ∎

Maintenant nous caractérisons les classes E_2^* et E_3^*.

Proposition 2.3. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors, $G \in E_3^*$ (respectivement E_2^*) si et seulement si $G \in \mathcal{N}_3^{(2)}\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{N}_2\mathcal{F}$).*

Prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soit G un groupe nilpotent sans torsion dans la classe E_3^* (respectivement E_2^*). Alors $G \in \mathcal{N}_3^{(2)}$ (respectivement $\mathcal{N}_2$).*

Preuve. Supposons que $G \in E_3^*$ et soit H un sous-groupe de G engendré par deux éléments. Effectuons une récurrence sur la classe de H pour montrer que $H \in \mathcal{N}_3$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $H \in \mathcal{N}_4$. D'après [10, théorème 3.5], il suffit de montrer que H est un groupe 3-Engel. Soient $a, b \in H$ tels que $[a,_3 b] \neq 1$. Comme H est résiduellement un 2-groupe fini, il existe un sous-groupe normal N de H tel que $[a,_3 b] \notin N$ et $|H/N| = 2^r$, pour un $r \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble infini $\{a^{2^{r+i}} b \mid i \in \mathbb{N}\}$; il existe 4 entiers non nuls t_0, t_1, t_2, t_3 et deux entiers positifs distincts m, n tels que $[(a^{p_0}b)^{t_0}, (a^{p_1}b)^{t_1}, (a^{p_2}b)^{t_2}, (a^{p_3}b)^{t_3}] = 1$, où $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \{2^{r+n}, 2^{r+m}\}$ et $p_0 \neq p_1$. En utilisant [1, lemme 1 (2)], on obtient $[a^{p_0}b, a^{p_1}b, a^{p_2}b, a^{p_3}b]^{t_0t_1t_2t_3} = 1$, donc $[a^{p_0}b, a^{p_1}b, a^{p_2}b, a^{p_3}b] = 1$ car H est sans torsion et $t_0t_1t_2t_3 \neq 0$. Notons que $[\gamma_2(H), \gamma_3(H)] \leq \gamma_5(H) = 1$, d'où en utilisant [1, lemme

1], on a :

$$\begin{aligned}1 &= [a^{p_0}b, a^{p_1}b, a^{p_2}b, a^{p_3}b] \\ &= [[a^{p_0}, b]^b[b, a^{p_1}]^b, a^{p_2}b, a^{p_3}b] = [[a^{p_0}, b]^b, a^{p_2}b, a^{p_3}b][[b, a^{p_1}]^b, a^{p_2}b, a^{p_3}b] \\ &= [a, b, ba^{p_2}, ba^{p_3}]^{p_0-p_1}\end{aligned}$$

Par suite $[a, b, ba^{p_2}, ba^{p_3}] = 1$, car $p_0 - p_1 \neq 0$ et H sans torsion, donc $[aN, bN, ba^{p_2}N, ba^{p_3}N] = N$. Or 2^r divise p_2 et p_3, et $x^{2^r} \in N$ pour tout $x \in H$, il s'ensuit que $[a,_3 b] \in N$; ce qui est contradictoire.
Supposons maintenant que $G \in E_2^*(\subset E_3^*)$. Donc pour tous $x, y \in G$, $\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_3$; d'où $\langle x, y\rangle$ est métabélien [20, 5.1.12]. Il s'ensuit, d'après le lemme 2.1, que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_2$, donc G est un groupe 2-Engel. Comme G est sans torsion, on en déduit, par [20, 12.3.6], que $G \in \mathcal{N}_2$. ■

Preuve de la proposition 2.3. Supposons que $G \in E_3^*$ (respectivement $G \in E_2^*$), d'après le théorème 1.1, G admet un sous-groupe normal nilpotent H tel que G/H soit fini, d'où H est de type fini. Or un groupe nilpotent de type fini est une extension d'un groupe sans torsion par un groupe fini, donc on peut supposer que H soit sans torsion. Il s'ensuit, d'après le lemme 2.4, que $H \in \mathcal{N}_3^{(2)}$ (respectivement $H \in \mathcal{N}_2$) ; d'où $G \in \mathcal{N}_3^{(2)}\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{N}_2\mathcal{F}$).
Réciproquement, il est facile de voir que si $G \in \mathcal{N}_3^{(2)}\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{N}_2\mathcal{F}$) alors $G \in E_3^*$ (respectivement E_2^*). ■

3 Groupes de la classe $E^{\#}$

Preuve du théorème 1.4. Supposons que $G \in E^{\#}$. D'après le théorème 1.1, $G \in \mathcal{NF}$; comme G est de type fini, il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Par suite, $E^{\#}$ étant stable par passage aux quotients, on peut supposer que G n'est pas dans $\mathcal{FN}$ mais tout quotient propre de G est dans $\mathcal{FN}$. Soit H un sous-groupe normal nilpotent de G tel que G/H soit fini. Notons que G est infini, donc H est un groupe nilpotent de type fini et infini. Il admet donc un sous-groupe caractéristique $A \neq 1$ tel que A soit abélien libre. Montrons que A est inclus dans l'ensemble des éléments d'Engel à droite de G. Soient $1 \neq y \in A$ et $x \in G$, l'ensemble $\{xy^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ étant infini, il existe deux entiers positifs distincts m, n, des entiers $t_0, t_1, \ldots, t_r \in \{-1, 1\}$ et des éléments $z_0, z_1, \ldots, z_r \in \{xy^n, xy^m\}$ tels que $z_0 \neq z_1$ et

$$[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}, \ldots, z_r^{t_r}] = 1.$$

Comme A est un sous-groupe normal abélien de G et $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}] \in A$, on obtient $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1},_{r-1} x] = 1$. Mais $[z_0^{t_0}, z_1^{t_1}] = ([y, x]^{t(n-m)})^{x^s}$, où s un entier et $t \in \{-1, 1\}$, d'où $[y,_r x]^{t(n-m)} = 1$, donc $[y,_r x] = 1$ car A est sans torsion. Par suite y est un élément d'Engel à droite de G. D'après [20, 12.3.7], l'hypercentre de G est donc non trivial. En particulier, $Z(G) \neq 1$, d'où $G/Z(G) \in \mathcal{FN}$. Ce qui implique, d'après [18, théorème 4.25], que G est dans la classe $\mathcal{FN}$; ce qui est contradictoire.
Réciproquement, supposons que G soit une extension d'un groupe fini par un groupe nilpotent. D'après [11, 1.5], il existe un entier positif n tel que $G/Z_n(G)$ soit fini. Considérons un ensemble infini X de G. Puisque $G/Z_n(G)$ est fini, il existe deux

éléments $x, y \in X$ tels que $x, y \in aZ_n(G)$ pour un $a \in G$. D'où $\langle x, y\rangle\, Z_n(G)/Z_n(G)$ est nilpotent, il en résulte que $\langle x, y\rangle$ est nilpotent, donc $[x,_r y] = 1$ pour un entier positif r et G est alors dans $E^{\#}$. ∎

Preuve du théorème 1.5. D'après le théorème 1.4, G admet un sous-groupe normal fini N tel que G/N soit nilpotent. Soit T/N le sous-groupe de torsion de G/N. Comme G/N est de type fini, T/N est fini, donc T est fini. Maintenant G/T est un groupe nilpotent de type fini et sans torsion ; d'après le lemme 2.2, il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que G/T soit nilpotent de classe au plus égale à t. D'où $\gamma_{t+1}(G) \leq T$, donc $\gamma_{t+1}(G)$ est fini. On en déduit, par [11, 1.5] que $G/Z_t(G)$ est aussi fini. ∎

Preuve du théorème 1.6. Si $G/Z_k(G)$ est fini, alors il est aisé de voir que $G \in E_k^{\#}$. Réciproquement, supposons que G soit dans $E_k^{\#}$; d'après le théorème 1.4 G admet un sous-groupe normal et fini N tel que G/N soit nilpotent. Soit T/N le sous-groupe de torsion de G/N, donc T est fini et G/T est sans torsion. D'après le lemme 2.1, $\gamma_{k+1}(G/T) = T/T$, d'où $\gamma_{k+1}(G)$ est fini, donc $G/Z_k(G)$ est aussi fini.
Supposons, maintenant, que H soit un groupe métabélien sans torsion dans la classe $E_k^{\#}$. Si $x_1, \ldots, x_{k+1}$ sont des éléments quelconques de H, alors d'après ce qui précède $\gamma_{k+1}(K)$ est fini, où $K = \langle x_1, \ldots, x_{k+1}\rangle$. Or K est sans torsion, donc $\gamma_{k+1}(K) = 1$, d'où $[x_1, \ldots, x_{k+1}] = 1$. Il en résulte que H est nilpotent de classe au plus égale à k. ∎

Nous terminons cette section par des résultats sur $E_2^{\#}$ et $E_3^{\#}$.

Proposition 3.1. *Soit G un groupe résoluble de type fini. Alors, $G \in E_3^{\#}$ (respectivement $E_2^{\#}$) si, et seulement si, $G \in \mathcal{FN}_3^{(2)}$ (respectivement $G/Z_2(G)$ est fini).*

Preuve. Supposons que $G \in E_3^{\#}$ (respectivement $E_2^{\#}$). D'après le théorème 1.4, G admet un sous-groupe normal et fini N tel que G/N soit nilpotent. Soit T/N le sous-groupe de torsion de G/N, donc T est fini et G/T est sans torsion. D'après le lemme 2.4, $G/T \in \mathcal{N}_3^{(2)}$ (respectivement $G/T \in \mathcal{N}_2$). Maintenant si $G \in E_3^{\#}$, alors $G \in \mathcal{FN}_3^{(2)}$ et si $G \in E_2^{\#}$, alors $G \in \mathcal{FN}_2$ donc $\gamma_3(G)$ est fini et d'après [11, 1.5] $G/Z_2(G)$ est fini.
Réciproquement, supposons que $G \in \mathcal{FN}_3^{(2)}$, d'après [3, théorème], $G \in (\mathcal{N}_3, \infty) \subset E_3^{\#}$. De même, si $G/Z_2(G)$ est fini alors d'après [2], $G \in \mathcal{E}_2(\infty) \subset E_2^{\#}$. ∎

4 Groupes de la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$

Preuve du théorème 1.7. Soit G dans $(\mathcal{FN}, \infty)$; d'après [11, 1.5] G est alors dans $(\mathcal{NF}, \infty)$. Or il est clair que $(\mathcal{NF}, \infty)$ est incluse dans E^*. Il en résulte, d'après le théorème 1.1 que $G \in \mathcal{NF}$. D'où G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Comme la classe $(\mathcal{FN}, \infty)$ est stable par passage au quotient, on peut donc supposer que G n'est pas dans $\mathcal{FN}$, mais tout quotient propre de G est dans $\mathcal{FN}$. Le groupe G étant dans $\mathcal{NF}$, il admet un sous-groupe normal nilpotent H d'indice fini. Donc H est de type fini ; par conséquent on peut le considérer sans torsion [20, 5.4.15(i)]. Soit $1 \neq x \in Z(H)$ et $g \in G$; l'ensemble $\{x^n g \mid n \in \mathbb{N}\}$ étant infini, il existe deux entiers positifs distincts i, j tels que $\langle x^i g, x^j g\rangle \in \mathcal{FN}$, donc

$\langle x^{i-j}, x^j g\rangle \in \mathcal{FN}$. D'où il existe deux entiers positifs n, m tels que $[x^{i-j},_n x^i g]^m = 1$. Comme $x \in Z(H)$, on obtient $[x,_n g]^{(i-j)m} = 1$. Or $[x,_n g]$ est un élément du groupe sans torsion H, donc $[x,_n g] = 1$. Il s'ensuit que x est un élément d'Engel à droite de G. Comme G vérifie la condition maximale, l'ensemble des éléments d'Engel à droite coincide avec l'hypercentre de G [19, théorème 7.21], qui est donc non trivial. D'où $Z(G)$ est non trivial, donc $G/Z(G) \in \mathcal{FN}$. Il s'ensuit par [11, 1.5] que $|G/Z(G) : Z_r\left(\frac{G}{Z(G)}\right)|$ est fini pour un entier positif r, donc $|G : Z_{r+1}(G)|$ est fini, d'où par [11, 1.5] $G \in \mathcal{FN}$; ce qui est contradictoire. ∎

Preuve du corollaire 1.8. Soit G un groupe résoluble de type fini de la classe $(\mathcal{FN}_k, \infty)$. D'après le théorème 1.7, $G \in \mathcal{FN}$. Soit H un sous-groupe normal fini de G tel que G/H soit nilpotent. Comme G/H est de type fini, son sous-groupe de torsion T/H est fini, donc T est fini. Il est clair que $G/T \in (\mathcal{FN}_k, \infty)$; et comme G/T est sans torsion, il est dans $(\mathcal{N}_k, \infty)$.

(i) G/T est donc un groupe résoluble de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$; il en résulte, d'après [3, Proposition 1], que $G/T \in \mathcal{N}_k^{(2)}$, donc $G \in \mathcal{FN}_k^{(2)}$.

Comme $G/T \in \mathcal{N}_k^{(2)}$, il est en particulier un groupe k-Engel, nilpotent et sans torsion. Il s'ensuit, d'après [24], qu'il existe un entier positif t, ne dépendant que de k, tel que la classe de nilpotence de G/T soit au plus égale à t. D'où $G \in \mathcal{FN}_t$, donc $G/Z_t(G)$ est fini.

(ii) G/T est donc un groupe métabélien (respectivement résoluble) de type fini dans la classe $(\mathcal{N}_k, \infty)$ (respectivement $(\mathcal{N}_2, \infty)$) ; il en résulte d'après [3, proposition] (respectivement [4] ou [2]) que $G/T \in \mathcal{N}_k$ (respectivement $\mathcal{N}_2$) ; d'où $G/Z_k(G)$ (respectivement $G/Z_2(G)$) est fini. ∎

Références

[1] A. Abdollahi, *Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **62** (2000) 141-148.

[2] A. Abdollahi, *Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **103** (2000) 47-49.

[3] A. Abdollahi et B. Taeri, *A condition on finitely generated soluble groups*, Comm. Algebra **27** (1999) 5633-5638.

[4] C. Delizia, *Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **128** (1994) 201-208.

[5] C. Delizia, *On certain residually finite groups*, Comm. Algebra **24** (1996) 3531-3535.

[6] C. Delizia, A.H. Rhemtulla et H. Smith, *Locally graded groups with a nilpotency condition on infinite subsets*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **69** (2000) 415-420.

[7] G. Endimioni, *Groups covered by finitely many nilpotent subgroups*, Bull. Austral. Math. Soc. **50** (1994) 459-464.

[8] E.S. Golod, *Some problems of Burnside type*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **84** (1969) 83-88.

[9] K.W. Gruenberg, *Two theorems on Engel groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953) 377-380.

[10] N.D. Gupta et M.F. Newman, *Third Engel groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **40** (1989) 215-230.

[11] P. Hall, *Finite-by-nilpotent groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956) 611-616.

[12] J.C. Lennox et J.E. Roseblade, *Centrality in finitely generated soluble groups*, J. Algebra **16** (1970) 399-435.

[13] J.C. Lennox et J. Wiegold, *Extensions of a problem of Paul Erdös on groups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **31** (1981) 459-463.

[14] P. Longobardi, *On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets*, Arch. Math. (Basel) **76** (2001) no. 2, 88-90.

[15] P. Longobardi et M. Maj, *Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **89** (1993) 97-102.

[16] B.H. Neumann, *A problem of Paul Erdös on groups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **21** (1976) 467-472.

[17] M.F. Newman, *Some varieties of groups*, J. Austral. Math. Soc. **16** (1973) 481-494.

[18] D.J.S. Robinson, *"Finiteness conditions and generalized soluble groups, part 1"*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

[19] D.J.S. Robinson, *"Finiteness conditions and generalized soluble groups, part 2"*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

[20] D.J.S. Robinson, *"A Course in the Theory of Groups"*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[21] A. Shalev, *Combinatorial conditions in residually finite groups, II,* J. Algebra **157** (1993) 51-62.

[22] N. Trabelsi, *Characterization of nilpotent-by-finite groups,* Bull. Austral. Math. Soc. **61** (2000) 33-38.

[23] M.R. Vaughan-Lee et J. Wiegold, *Countable locally nilpotent groups of finite exponent with no maximal subgroups,* Bull. London Math. Soc. **13** (1981) 45-46.

[24] E.I. Zel'manov, *On some problems of group theory and Lie algebras,* Math. Sb. **180** (1989) 159-167.

Département de Mathématiques, Université d'Ispahan,
Ispahan 81744, Iran.
email : alireza_abdollahi@yahoo.com

Département de Mathématiques, Université Ferhat Abbas,
Sétif 19000, Algérie.
email : trabelsi_dz@yahoo.fr