Fonctions entières et m- convexité

R. Choukri A. El Kinani M. Oudadess

Abstract

We show that m-convexity and completeness are, in a certain sens, necessary for entire functions to operate on locally convex algebras

Introduction. Soit A une algèbre localement convexe unitaire. On dit que les fonctions entières opèrent dans A (ou $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans A) si pour toute fonction entière $\sum a_n z^n$ et pour tout $x \in A$, la série $\sum a_n x^n$ est convergente dans A. Il est bien connu que les fonctions entières opèrent dans les algèbres de Banach, et plus généralement dans les algèbres localement multiplicativement convexes complètes ([1]). Les fonctions entières n'opèrent pas nécessairement dans les B_0-algèbres. En fait, pour que $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans une B_0-algèbre commutative, il faut, et il suffit, qu'elle soit m-convexe ([4]). Dans ce travail, nous allons montrer que dès que les fonctions entières opèrent dans une algèbre localement convexe ($a.l.c$) séparée, on peut mettre en evidence, en un sens local, une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe ($a.l.m.c$) de Fréchet. Dans le cas commutatif, on obtient la même conclusion si les fonctions entières à n variables opèrent. Un contre exemple montre que ce fait n'est pas global. Dans le cas d'une $a.l.c$ commutative complète et à produit continu, nous avons un résultat global, à savoir que les fonctions entières opèrent dans A si, et seulement si, l'algèbre A est une réunion filtrante croissante d'$a.l.m.c.$ de Fréchet (A_i, τ_i), où, pour tout i, τ_i est plus fine que la topologie induite sur A_i par celle de A.

Pour tout entier naturel non nul n, on note par $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ l'algèbre des fonctions complexes holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ munie de la famille $(p_r)_{r\geq 1}$ de semi-normes, où $p_r(f) = \sup\{|f(z_1, ..., z_n)|,\ |z_i| \leq r,\ \forall i\}$. L'algèbre $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ devient ainsi une

Received by the editors February 2000.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* Primary: 46H20, Secondary: 46H30.
Key words and phrases : Fonctions entières, convexité locale, Fréchet.

$a.l.m.c$ de Fréchet. Soit A une algèbre complexe unitaire. Pour tous $x_1, ..., x_n$ de A, on note par $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ (resp. $\overline{\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]}$) la sous-algèbre (resp. la sous-algèbre fermée) de A engendrée par $\{e, x_1, ..., x_n\}$, où e est l'unité de A. L'algèbre A est dite localement convexe ($a.l.c$) si c'est un espace localement convexe dans lequel le produit est séparement continu. Une algèbre localement multiplicativement convexe ($a.l.m.c$) est une $a.l.c$ dont la topologie est définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives. Une $a.l.c$ metrisable et complète est dite une B_0-algèbre. Une $a.l.m.c$ metrisable complète est dite de Fréchet. Nous dirons que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans A si pour toute fonction entière $\sum a_{m_1,...,m_n} z_1^{m_1}...z_n^{m_n} \in \mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ et pour tous $x_1, ..., x_n \in A$, la série $\sum a_{m_1,...,m_n} x_1^{m_1}...x_n^{m_n}$ est convergente dans A. Dans ce cas, on note par $\varphi_{x_1,...,x_n}$ l'application de $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ vers A définie par $\varphi_{x_1,...,x_n}(f) = f(x_1, ..., x_n)$. Dans toute la suite, les algèbres considérées sont supposées complexes et unitaires.

1 Exemples

1) On sait que $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans les $a.l.m.c$ complètes. L'algèbre d'Arens L^ω ([1]) est un exemple d'une B_0-algèbre commutative dans laquelle $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ n'opère pas. Voici un exemple d'une Q-algèbre normée commutative dans laquelle seuls les polynômes opèrent. Soit A l'algèbre des fractions rationnelles à coefficients complexes qui s'écrivent $P(X)/Q(X)$ avec $Q(0)$ non nul. Soit B une algèbre de Banach unitaire intègre et non semi-simple (e.g. l'algèbre de convolution obtenue par adjonction d'une unité à $\mathbf{L}^1[0,1]$). Considérons x non nul dans le radical de B. Alors il n'est pas algébrique, car, sinon, il existerait un polynôme $P(X)$, de terme constant non nul, et un entier naturel n tel que $x^n P(x) = 0$. Mais $P(x)$ est inversible, donc $x^n = 0$ et par suite $x = 0$; ce qui n'est pas le cas. Par ailleurs, $Sp_B(x) = \{0\}$. Donc $P(x)$ est inversible, pour tout polynôme $P(X)$ vérifiant $P(0) \neq 0$. Considérons alors l'application $\varphi : A \to B$, $P(X)/Q(X) \longmapsto P(x)Q(x)^{-1}$. On montre que φ est un morphisme d'algèbres. De plus, il est injectif puisque x n'est pas algébrique. Donc A est isomorphe (algébriquement) à une sous-algèbre de B. D'où l'existence d'une norme $\|.\|$ d'algèbre sur A. Par ailleurs, A admet un seul idéal maximal (c'est le noyau du caractère χ_0 défini par $\chi_0(x) = x(0)$); il est nécessairement fermé et par suite A est une Q-algèbre. Montrons maintenant, par l'absurde, que seuls les polynômes opèrent dans A. Considérons un polynôme $Q(X)$, à terme constant non nul, de degré minimal tel que:

i) Il existe une fonction entière $f(z) = \sum_n a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme, avec $\sum_n a_n X^n$ convergente dans A.

ii) Il existe un polynôme $P(X)$ tel que $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Le polynôme $Q(X)$ n'est pas constant. Sinon, il existerait $b_0, ..., b_r \in \mathbf{C}$ tel que $\sum_n a_n X^n = \sum_{0 \leq n \leq r} b_n X^n$. En appliquant le caractère χ_0 et en utilisant l'intégrité de la complétée de A, nous aurons $a_n = b_n$ pour $n \leq r$ et que $a_n = 0$ pour $n > r$. Ainsi f serait un polynôme, ce qui n'est pas le cas. Soit maintenant α une racine de $Q(X)$ et $Q_1(X)$ un polynôme tel que $Q(X) = (X - \alpha)Q_1(X)$. On a $(X - \alpha)f(X) = \frac{P(X)}{Q_1(X)}$. Considérons la fonction entière $g(z) = (z - \alpha)f(z)$. Comme le degré de $Q_1(X)$ est strictement inférieur à celui de $Q_1(X)$, la fonction g est un polynôme. Il résulte que f est un polynôme; ce qui n'est pas le cas.

2) Il est facile d'obtenir des Q-algèbres normées non complètes dans lesquelles $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère. En effet, considérons un espace normé A de dimension infinie dénombrable. Muni du produit trivial, A devient une algèbre normée. Alors, il est clair que l'unitizée de A n'est pas complète et que $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ y opère. Voici maintenant un exemple d'une Q-algèbre normée commutative non complète dans laquelle $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère et qui est de plus intègre. Soit $(B, \|.\|)$ une algèbre de Banach commutative intègre radicale et admettant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_n$ (e.g $B = \mathbf{L}^1[0,1]$). Par ([2], corollaire 2, p.62), il existe $a \in B$ et une suite $(x_n)_n$ de B tel que $e_n = ax_n$, pour tout n. Il en résulte que aB est dense dans B. Par ailleurs, d'après ([5] , théorème 12.7, p.53), pour tout n, il existe une norme d'algèbre $\|.\|_n$ équivalente à $\|.\|$ (On peut même supposer que $\|.\|_n \leq \|.\|$) tel que $\|a\|_n \leq 1/n^2$. Considérons $A = \{x \in B, \|x\|' = \sum_n \|x\|_n < \infty\}$. Alors, $(A, \|.\|')$ est une algèbre de Banach. D'autre part, $(A, \|.\|)$ n'est pas complète. Sinon, puisque A est dense dans B, on aurait $A = B$. Ainsi $(B, \|.\|')$ serait une algèbre de Banach. Or la norme $\|.\|$ est moins fine que la norme $\|.\|'$ et donc, par le théorème de l'application ouverte, elles seront équivalentes. Et par conséquent, la suite $(e_n)_n$ serait $\|.\|'$-bornée. Ce qui n'est pas le cas. En effet, pour tout $k \geq 1$, il existe n_k tel que $\|e_n\|_k > 1/2$ pour tout $n \geq n_k$. Pour K entier naturel non nul, prenons $N = \max\{n_i, 1 \leq i \leq 2K\}$. On a $\|e_N\|' \geq \sum_{1\leq k\leq 2K} \|e_N\|_k \geq K$. L'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A est l'exemple cherché.

2 Fonctions entières et m- convexité

Soit A une *a.l.c* dans laquelle $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère pour un certain n. Les applications $\varphi_{x_1,\ldots,x_n}$ sont continues, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in A$. Ceci va nous permettre de dégager une certaine topologie justifiant le fait que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère. Mais d'abord, commençons par les deux lemmes suivants qui nous seront fort utiles par la suite.

Lemme II.1. Soit n un entier naturel non nul. La topologie de $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ est également définie par la famille $(q_r)_{r\geq 1}$ de semi-normes avec
$q_r(\sum_{(m_1,\ldots,m_n)} a_{m_1\cdots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}) = \sup\{\sum_{(m_1,\ldots,m_n)} |a_{m_1\ldots m_n}||z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}|,$
$|z_i| \leq r, \forall i\}$.

Preuve. Il est clair que la topologie de $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ est moins fine que la topologie définie par la famille $(q_r)_{r\geq 1}$ puisque $p_r \leq q_r$, pour tout r. Ensuite, on montre que $(A, (q_r)_{r\geq 1})$ est complète. Le théorème de l'application ouverte permet de conclure.

Lemme II.2. Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une *a.l.c* dans laquelle $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère pour un certain entier non nul n. Alors $K = \sup\{p_\lambda(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+\ldots+m_n}}, (m_1, \ldots m_n) \in \mathbf{N}^n\} < \infty$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tous x_1,...,$x_n \in A$.

Preuve. Supposons que $K = \infty$. Alors, pour tout $k \geq 1$, il existe $m_{i,k} \geq k, 1 \leq i \leq n$, tel que $p_\lambda(x_1^{m_{1,k}} \ldots x_n^{m_{n,k}})^{\frac{1}{m_{1,k}+\ldots+m_{n,k}}} \geq k$.
Posons $f(z_1, \ldots, z_n) = \sum k^{-(m_{1,k}+\ldots+m_{n,k})} z_1^{m_{1,k}} \ldots z_n^{m_{n,k}}$.
On a $f \in \mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$, mais $k^{-(m_{1,k}+\ldots+m_{n,k})} x_1^{m_{1,k}} \ldots x_n^{m_{n,k}}$ ne tend pas vers zéro.

Il est facile de voir que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans une *a.l.c* A si, et seulement si, $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans $\overline{\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]}$, pour tous $x_1, ..., x_n \in A$. Ceci explique, en quelque sorte, le caractère local du théorème suivant.

Théorème II.3. Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une *a.l.c* commutative et $n \in \mathbf{N}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1) $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans A.

2) Pour tous x_1,...,$x_n \in A$, il existe une sous-algèbre $A_{x_1,...,x_n}$ de A tel que $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n] \subset A_{x_1,...,x_n} \subset \overline{\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]}$ et qui peut être munie d'une topologie d'*a.l.m.c* de Fréchet plus fine.

Preuve. L'implication **2**)$\Rightarrow$**1**) est claire.
Montrons que **1**)$\Rightarrow$**2**). Soient $x_1, ..., x_n \in A$. Montrons que $\varphi = \varphi_{x_1,...,x_n}$ est continu. Pour $\lambda \in \Lambda$, on a $K = \sup\{p_\lambda(x_1^{m_1}...x_n^{m_n})^{\overline{\frac{1}{m_1+...+m_n}}},\ (m_1, ..., m_n) \in \mathbf{N}^n\}$ est fini, par le lemme II.2. Considérons un entier $r \geq K$. Pour $f(z_1, ..., z_n) = \sum_{(m_1,...,m_n)} a_{m_1...m_n} z_1^{m_1}...z_n^{m_n} \in \mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$, on a

$$\begin{aligned} p_\lambda(f(x_1, ..., x_n)) &\leq \quad \textstyle\sum_{(m_1,...,m_n)} |a_{m_1} \cdots_{m_n}| p_\lambda(x_1^{m_1}...x_n^{m_n}) \\ &\leq \textstyle\sum_{(m_1,...,m_n)} |a_{m_1} \cdots_{m_n}| K^{m_1+...+m_n} \leq q_r(f). \end{aligned}$$

D'où la continuité de φ.
Par ailleurs, $Im\varphi$ est isomorphe (algébriquement) à $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)/Ker\varphi$. D'où l'existence d'une topologie d'*a.l.m.c* de Fréchet sur $Im\varphi$. Cette topologie est plus fine que la topologie induite par celle de A sur $Im\varphi$. D'autre part, on a bien $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n] \subset Im\varphi \subset \overline{\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]}$. Ainsi, $Im\varphi$ est la sous-algèbre cherchée.

Remarque II.4. 1) Pour $n = 1$, le théorème précédent est valide dans le cas non nécessairement commutatif.

2) Le théorème précédent montre que derrière le fait que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère, il y a, localement, une topologie d'*a.l.m.c* de Fréchet. Ce fait n'est pas nécessairement global. En effet, soit A l'algèbre des suites complexes stationnaires. Considérons la famille $(A_k)_{k\geq 1}$ des sous-algèbres de dimension finie, où $A_k =\{(x_n)_n \in A,\ x_n = x_k,\ \forall n \geq k\}$. Munie de la topologie localement convexe limite inductive du système inductif $(A_k)_{k\geq 1}$, l'algèbre A devient une *a.l.m.c* complète. Alors, les fonctions entières y opèrent. Cependant, il n'existe aucune topologie d'*a.l.m.c* de Fréchet sur A puisqu'elle est de dimension dénombrable.

Comme corollaire, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire II.5. Soit A une *a.l.c* de dimension dénombrable. Pour que $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans A, il faut, et il suffit, que A soit algébrique, i.e., $\mathbf{C}[x]$ soit de dimension finie, pour tout $x \in A$.

Preuve. La condition suffisante est claire. La nécessité découle du résultat précédent et du théorème de Baire.

Corollaire II.6. Toute $a.l.m.c$ complète de dimension dénombrable est algébrique.

Remarque II.7. Nous avons vu que si $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans une $a.l.c$ A, alors l'application de $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ vers A qui à f associe $f(x)$ est continue, pour tout $x \in A$. Cependant, dans une telle algèbre, l'application définie dans A qui à x associe $f(x)$ n'est pas nécessairement continue, où $f \in \mathbf{H}(\mathbf{C})$. En effet, soit A l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$ munie de la norme: $\|x\| = \int_{[0,1]} |x(t)|dt$. L'algèbre A est ainsi A-normée et non normée. Les fonctions entières opèrent dans A. Mais l'application, définie sur A, qui à x associe x^2 n'est pas continue. Dans le cas complet, un autre contre-exemple est donné par M. Oudadess dans ([3]).

Au lemme 2, nous avons donné une condition nécessaire pour que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans une $a.l.c$. Cette condition n'est pas suffisante en général. Cependant, elle l'est dans le cas complet comme le montre le résultat suivant.

Proposition II.8. Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une $a.l.c$ complète et n un entier naturel non nul tel que $\sup\{p_\lambda(x_1^{m_1}...x_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+...+m_n}}, (m_1,...,m_n) \in \mathbf{N}^n\} < \infty$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tous $x_1,...,x_n \in A$. Alors $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans A.

Preuve. Soient $x_1,...,x_n \in A$ et $f(z_1,...,z_n) = \sum_{(m_1,...,m_n)} a_{m_1...m_n} z_1^{m_1}...z_n^{m_n} \in \mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$. Posons $K = \sup\{p_\lambda(x_1^{m_1}...x_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+...+m_n}}, (m_1,...,m_n) \in \mathbf{N}^n\}$. Pour $\lambda \in \Lambda$, on a $\sum_{(m_1,...,m_n)} p_\lambda(a_{m_1\cdots m_n} x_1^{m_1}...x_n^{m_n}) \leq \sum_{(m_1,...,m_n)} |a_{m_1\cdots m_n}| K^{m_1+...+m_n} < \infty$.

Voici maintenant une caractérisation des $a.l.c$ commutatives dans lesquelles $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère pour tout n.

Théorème II.9. Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une $a.l.c$ commutative. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1) $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère dans A, pour tout n.

2) L'algèbre A est une réunion filtrante croissante d'$a.l.m.c.$ de Fréchet (A_i, τ_i), où, pour tout i, la topologie τ_i est plus fine que la topologie induite sur A_i par celle de A.

Preuve. L'implication **2**)⇒**1**) est claire. Montrons que **1**)⇒**2**). Pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $x = (x_1,...,x_n) \in A^n$, notons par φ_x le morphisme d'algèbre continu définie de $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ vers A par $\varphi_x(f) = f(x_1,...,x_n)$. Munie de la topologie quotient, l'algèbre $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)/Ker\varphi_x$ est une $a.l.m.c$ de Fréchet. Posons $A_x = Im\varphi_x$ et notons par τ_x la topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet sur A_x déduite de l'isomorphisme (algébrique) entre A_x et $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)/Ker\varphi_x$. Alors la famille $(A_x)_x$ est filtrante croissante et $A = \cup A_x,$. De plus, pour tout x, la topologie τ_x est plus fine que la topologie induite sur A_x par celle de A vu la continuité de φ_x.

Dans le cas complet et à produit continu, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème II.10. Soit A une $a.l.c$ complète commutative à produit continu. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère dans A.

2) L'algèbre A est une réunion filtrante croissante d'$a.l.m.c.$ de Fréchet (A_i, τ_i), où, pour tout i, la topologie τ_i est plus fine que la topologie induite sur A_i par celle de A

Preuve. L'implication **2)⇒1)** est evidente**.** Montrons que **1)⇒2).** Par le théorème précédent, il suffit de montrer que $\mathbf{H}(\mathbf{C}^n)$ opère pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Moyennant la proposition II.8, il suffit de montrer que $\sup\{p_\lambda(x_1^{m_1}...x_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+...+m_n}}, (m_1, ..., m_n) \in \mathbf{N}^n\} < \infty$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tous $x_1, ..., x_n \in A$. Ceci s'obtient facilement en utilisant le fait que le produit est continu.

3 Remarques concernant les morphismes φ_x

1) L'application φ_x n'est pas nécessairement injective. En fait, si A est une algèbre normée dans laquelle $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ opère, alors φ_x est injective si, et seulement si, x n'est pas algébrique. En effet, la condition est evidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit $f \in \mathbf{H}(\mathbf{C})$ tel que $f(x) = 0$. Le spectre de x relativement à la complétée de A est alors une partie de l'ensemble des racines de f. Comme celui ci est discret, le spectre de x est fini, vu qu'il est compact. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses éléments. Considérons $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{C}$ et $g \in \mathbf{H}(\mathbf{C})$ avec $g(\lambda_i) \neq 0$, $\forall i$, tels que $f(z) = \Pi_{1 \leq i \leq n}(z - \lambda_i)^{\alpha_i} g(z)$. Par ailleurs, $g(x)$ est inversible dans la complétée de A. On en déduit que $\Pi_{1 \leq i \leq n}(z - \lambda_i)^{\alpha_i} = 0$. Notons que ce résultat n'est pas valide dans une algèbre m-convexe quelconque. En effet, considérons l'$a.l.m.c$ de Fréchet quotient $\mathbf{H}(\mathbf{C})/\overline{f\mathbf{H}(\mathbf{C})}$, où $f \in \mathbf{H}(\mathbf{C})$ admettant une infinité de zéros et s la surjection canonique de $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{H}(\mathbf{C})/\overline{f\mathbf{H}(\mathbf{C})}$. Soit $y = s(x)$, où $x(z) = z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Alors on a $f(y) = s(f(x)) = 0$. Cependant, y n'est pas algébrique.

2) L'image de φ_x n'est pas nécessairement égale à la sous-algèbre fermée $\overline{\mathbf{C}[x]}$ de A engendrée par x. En effet, Considérons une algèbre de Banach A admettant un élément x non algébrique (e.g.l'algèbre de Banach des fonctions complexes définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et $x(t) = t$, $\forall t \in [0, 1]$). Par 1), on a φ_x injective. Supposons que $Im\varphi_x = \overline{\mathbf{C}[x]}$. Il en résulte que $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\overline{\mathbf{C}[x]}$. D'où l'existence d'une norme d'algèbre de Banach sur $\mathbf{H}(\mathbf{C})$; ce qui n'est pas possible.

References

[1] R. Arens, "The space L^ω and convex topological rings", Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), p. 931-935.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, "Complete normed algebras", Ergebnisse der Mathematik, Band 80, Springer-Verlag, 1973.

[3] M. Oudadess, "Discontinuity of the product in multiplier algebras", Publications Matemàtique, Vol 34, (1990), 397-401.

[4] B. S. Mitiagin, S. Rolewicz and W. Zelazko, "Entire functions in B_0-algebras", Studia Math., 21 (1962), 291-306.

[5] W. Zelazko, "Banach algebras", Warszawa, 1973.

E. N. S Takaddoum. Département de Mathématiques.
B.P. 5118. Rabat.
10105. Maroc.